3.7. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОДУКТОВОГО МАГАЗИНА

Подчищаева О.В., к. ф.-м.н., доцент,
кафедра информационных систем
в финансово-кредитной сфере

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ

С целью оптимизации работы продуктового магазина, а именно для удовлетворения спроса покупателей и получения при этом магазином максимальной прибыли предлагается многоступенчатая экономико-математическая модель, основанная на теории игр и линейном программировании. Рассматриваются две параллельных «игры» и сводятся затем к задачам линейного программирования. В итоге магазину даются рекомендации по закупке продуктов для реализации с целью получения максимальной прибыли при данных состояниях спроса.

При оптимальном функционировании любого продуктового магазина параллельно должны учитываться два аспекта – удовлетворение спроса покупателя и максимизация прибыли самого магазина [1]. За основу математической модели процесса функционирования магазина удобно взять измененную в соответствии с конкретной ситуацией модель игры с природой. В данной модели роль природы, т.е. объективных обстоятельств играет спрос покупателей на различные товары, роль осознанного игрока играет сам магазин [2]. Данные о спросе и прибыли магазина за три месяца были предоставлены магазином «Пятерочка». По статистике 2016 г. магазины «Пятерочка» контролируют 41% продуктового рынка Российской Федерации [3].

Итак, в табл. 1 предоставлена прибыль на вложенный рубль для различных категорий продуктов в зависимости от состояния спроса (теплая и холодная погода) в магазине «Пятерочка» среднего размера.

Таблица1

ПРИБЫЛЬ НА ВЛОЖЕННЫЙ РУБЛЬ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КАТЕГОРИЙ ПРОДУКТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТОЯНИЯ СПРОСА В МАГАЗИНЕ «ПЯТЕРОЧКА»

Категория продуктов	Холодная погода	Теплая погода
1. Хлебобулочные и кондитерские изделия	0,296	0,313
2. Мясные и молочные продукты	0,360	0,290
3. Фрукты-овощи	0,632	0,638
4. Алкогольная продукция	0,699	0,634

Если строго придерживаться модели игры, т.е. рассматривать категории продуктов как стратегии первого игрока, то первую и вторую стратегию нужно заведомо исключить как невыгодные [4]. Но здесь мы имеем дело с магазином, который должен удовлетворять спрос населения и обязательно иметь в продаже все категории продуктов.

Задача 1. Применим классическую модель игры с природой только ко всем категориям товаров:

Таблица 2

ПРИБЫЛЬ НА ВЛОЖЕННЫЙ РУБЛЬ ДЛЯ ВСЕХ КАТЕГОРИЙ ПРОДУКТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТОЯНИЯ СПРОСА В МАГАЗИНЕ «ПЯТЕРОЧКА»

Стратегии первого игрока – магазина	Стратегии второго игрока – спроса	*B1*	*B2*
	категория продуктов	холодная погода	теплая погода
A1	1. Хлебобулочные и кондитерские изделия	0,296	0,313
A2	2. Мясные и молочные продукты	0,360	0,290
A3	3. Фрукты-овощи	0,632	0,638
A4	4. Алкогольная продукция	0,699	0,634

Платежная матрица игры имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,296 & 0,313 \\ 0,360 & 0,290 \\ 0,632 & 0,638 \\ 0,699 & 0,634 \end{pmatrix}.$$

Определим верхнюю и нижнюю цены игры β и α (минимакс и максимин) (табл. 3).

Таблица 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ЦЕНЫ ИГРЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ 1

-	*B1*	*B2*	*α*
A1	0,296	0,313	0,296
A2	0,360	0,290	0,290
A3	0,632	0,638	0,632
A4	0,699	0,634	0,634
β	0,699	0,638	*α*=0,634 *β*=0,638

Нижняя и верхняя цены игры не равны, значит оптимальное решение игры следует искать среди смешанных стратегий. Обозначим наборы вероятностей чистых стратегий игроков:

$S_A=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ и

$S_B=(q_1,q_2)$.

Сведем игру относительно объективных обстоятельств, а точнее второго игрока – спроса к задаче линейного программирования:

$Y=(y_1,y_2)$;

где $y_j = {q_j}/{v}$;

$j=1,2$,

v – цена игры или средняя прибыль на вложенный рубль в случае первого игрока – магазина.

Задача линейного программирования в нормированных на цену игры переменных выглядит следующим образом [2]:

$$F(y)=\sum_{j=1}^{2} y_j \to max,$$

$$\begin{cases} 0,296y_1+0,313y_2 \le 1 \\ 0,360y_1+0,290y_2 \le 1 \\ 0,632y_1+0,638y_2 \le 1\ . \\ 0,699y_1+0,634y_2 \le 1 \\ y_j \ge 0,\ j=1,2 \end{cases} \qquad (1)$$

Так как задача (1) имеет только две неизвестных, т.е. является плоской, можно решить ее симплекс-ным методом, а можно и графически:

$$y_1=0,636;\ y_2=0,937;$$

$$F_{max}=0,636+0,937=1.573\ .$$

Цена игры $\nu=1/F_{max}=0,636.$

Вероятности состояний спроса:

$$q_1=y_1\times\nu=0,636\times0,636=0,404\ ;$$

$$q_2=y_2\times\nu=0,937\times0,636=0,596\ .$$

Задача для первого игрока – магазина будет двойственной по отношению к задаче (1) [2]:

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i \to min;$$

$$\begin{cases} 0,296x_1+0,360x_2+ \\ +0,632x_3+0,699x_4 \ge 1 \\ 0,313x_1+0,290x_2+\quad ; \\ +0,638x_3+0,634x_4 \ge 1 \\ x_i \ge 0,\ i=\overline{1,4} \end{cases} \qquad (2)$$

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4);$$

$$x_i=p_i/\nu,\ i=\overline{1,4}\ .$$

Решение задачи (2) находится по теоремам двой-ственности:

$$x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=0,160;\ x_4=1,413;$$

$$Z_{min}=0,160+1,413=1,573\ .$$

Цена игры или прибыль на вложенный рубль:

$$\nu={}^{1}\!/_{Z_{min}}=0,636.$$

Вероятности применения первым игроком – мага-зином его чистых стратегий, они же оптимальные для получения прибыли пропорции завоза товаров:

$$p_1=p_2=0\ ;$$

$$p_3=x_3\times\nu=0,160\times0,636=0,102\ ;$$

$$p_4=x_4\times\nu=1,413\times0,636=0,898\ .$$

Вероятности состояний спроса найдены, но количества товаров первого и второго типа получились равными нулю, в реальной ситуации это невозможно, так как магазин должен удовлетворять спрос покупателей. Поэтому, чтобы рассчитать спрос и оптимальные пропорции поставок продуктов в магазин классическую задачу игры с природой предлагается разделить на две. В каждую из задач войдут сопоставимые по выигрышу (по прибыли на вложенный рубль) стратегии (категории товаров).

Задача 2. Применим классическую модель игры с природой только к двум первым категориям товаров, так как они сопоставимы по размеру прибыли на вложенный рубль (выигрышу).

Таблица 4

ПРИБЫЛЬ НА ВЛОЖЕННЫЙ РУБЛЬ ДЛЯ ДВУХ ПЕРВЫХ КАТЕГОРИЙ ПРОДУКТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТОЯНИЯ СПРОСА В МАГАЗИНЕ «ПЯТЕРОЧКА»

Стратегии первого игрока – магазина	Стратегии второго игрока – спроса	*B1*	*B2*
	категория продуктов	холодная погода	теплая погода
A1	1. Хлебобулочные и кондитерские изделия	0,296	0,313
A2	2. Мясные и молочные продукты	0,360	0,290

Платежная матрица упрощенной игры имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0,296 & 0,313 \\ 0,360 & 0,290 \end{pmatrix}.$$

Определим верхнюю и нижнюю цены игры β и α (минимакс и максимин) (табл. 5):

Таблица 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ЦЕНЫ ИГРЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ 2.

-	*B1*	*B2*	*α*
A1	0,296	0,313	0,296
A2	0,360	0,290	0,290
β	0,360	0,313	*α* = 0,296 *β* = 0,313

Нижняя и верхняя цены игры не равны, значит оптимальное решение игры следует искать среди смешанных стратегий. Обозначим наборы вероятностей чистых стратегий игроков $S_A=(p_1,p_2)$ и $S_B=(q_1,q_2)$.

Сведем игру относительно объективных обстоятельств, а точнее второго игрока – спроса к задаче линейного программирования:

$$Y=(y_1,y_2),$$

где $y_j=q_j/\nu$, $j=1,2$,

v – цена игры или средняя прибыль на вложенный рубль в случае первого игрока -магазина.

Задача линейного программирования в нормированных на цену игры переменных выглядит следующим образом [1]:

$$F(y)=\sum_{j=1}^{2} y_j \to max\ ;$$

$$\begin{cases} 0,296y_1+0,313y_2 \le 1 \\ 0,360y_1+0,290y_2 \le 1\ . \\ y_j \ge 0,\ j=1,2 \end{cases} \qquad (3)$$

Так как задача (3) имеет только две неизвестных, т.е. является плоской, можно решить ее симплексным методом, а можно и графически.

$$y_1 = 0,889; y_2 = 2,348;$$

$$F_{max} = 0,889 + 2,348 = 3,237 .$$

Цена игры $\nu = 1/F_{max} = 0,309.$

Вероятности состояний спроса:

$$q_1 = y_1 \times \nu = 0,889 \times 0,309 = 0,275 ;$$

$$q_2 = y_2 \times \nu = 2,348 \times 0,309 = 0,725.$$

Вероятности состояний спроса получились другими, чем в задаче (1), что не удивительно, так как в задаче (1) спрос определяется исключительно через продажу товаров третьего и четвертого типов, как приносящих большую прибыль.

Задача для первого игрока – магазина будет двойственной по отношению к задаче (3):

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i \to min ;$$

$$\begin{cases} 0,296x_1 + 0,360x_2 \ge 1 \\ 0,313x_1 + 0,290x_2 \ge 1 ; \\ x_i \ge 0, i = 1,2 \end{cases} \qquad (4)$$

$$X = (x_1, x_2);$$

$$x_i = p_i/\nu , \; i = 1,2.$$

Решение задачи (4) находится по теоремам двойственности:

$$x_1 = 2,606; x_2 = 0,630;$$

$$Z_{min} = 2,606 + 0,630 = 3,236.$$

Цена игры или прибыль на вложенный рубль:

$$\nu 1/Z_{min} = 0,309.$$

Вероятности применения первым игроком – магазином его чистых стратегий, они же оптимальные для получения прибыли пропорции завоза товаров:

$$p_1 = x_1 \times \nu = 2,606 \times 0,309 = 0,805 ;$$

$$p_2 = x_2 \times \nu = 0,630 \times 0,309 = 0,195 .$$

Таким образом, если нужно получить максимальную прибыль, пропорции завоза товаров с более низкой прибылью на вложенный рубль должны быть следующие: хлебобулочные и кондитерские изделия – 80,5% , мясные и молочные продукты – 19,5% от общего стоимостного объема этих товаров.

Задача 3. Применим модель игры с природой ко вторым двум категориям товаров, которые дают большую прибыль на вложенный рубль (выигрыш).

Таблица 6

ПРИБЫЛЬ НА ВЛОЖЕННЫЙ РУБЛЬ ДЛЯ КАТЕГОРИЙ ПРОДУКТОВ, ДАЮЩИХ БОЛЬШУЮ ПРИБЫЛЬ НА ВЛОЖЕННЫЙ РУБЛЬ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТОЯНИЯ СПРОСА В МАГАЗИНЕ «ПЯТЕРОЧКА»

Стратегии первого игрока -- магазина	Стратегии второго игрока – спроса категория продуктов	B1 холодная погода	B2 теплая погода
A3	1. Фрукты-овощи	0,632	0,638
A4	2. Алкогольная продукция	0,699	0,634

Платежная матрица упрощенной игры имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,632 & 0,638 \\ 0,699 & 0,634 \end{pmatrix}.$$

Определим верхнюю и нижнюю цены игры β и α (минимакс и максимин) (табл. 7).

Таблица 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ЦЕНЫ ИГРЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ 3

–	B1	B2	α
A3	0,632	0,638	0,632
A4	0,693	0,634	0,634
β	0,699	0,638	α=0,634 β=0,638

Нижняя и верхняя цены игры снова не равны, значит оптимальное решение игры следует снова искать среди смешанных стратегий. Обозначим наборы вероятностей чистых стратегий игроков $S_A = (p_3, p_4)$ и $S_B = (q_1, q_2)$.

Опять сведем игру относительно объективных обстоятельств, а точнее второго игрока – спроса к задаче линейного программирования:

$$Y = (y_1, y_2),$$

где $y_j = q_j/\nu$;

$j = 1,2$;

v – цена игры или средняя прибыль на вложенный рубль в случае первого игрока магазина.

Задача линейного программирования в нормированных на цену игры переменных выглядит следующим образом:

$$F(y) = \sum_{j=1}^{2} y_j \to max ;$$

$$\begin{cases} 0,632y_1 + 0,638y_2 \le 1 \\ 0,699y_1 + 0,634y_2 \le 1 ; \\ y_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_1 = 0,636; y_2 = 0,937;$$

$$F_{max} = 0,636 + 0,937 = 1,573.$$

Цена игры $\nu = 1/F_{max} = 0,636.$

Вероятности состояний спроса:

$$q_1 = y_1 \times \nu = 0,636 \times 0,636 = 0,404;$$

$$q_2 = y_2 \times \nu = 0,937 \times 0,636 = 0,596.$$

Вероятности состояний спроса получились естественно те же, что и в задаче (1), так как состояния спроса определялись по данным продаж именно этих категорий товаров.

Задача для первого игрока – магазина опять же будет двойственной по отношению к задаче (5):

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i \to min ;$$

$$\begin{cases} 0,632x_1 + 0,699x_2 \geq 1 \\ 0,638x_1 + 0,634x_2 \geq 1; \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases} \quad (6)$$

$$X = (x_1, x_2);$$

$$x_1 = p_3/\nu,\ x_2 = p_4/\nu;$$

$$x_1 = 1,426;\ x_2 = 0,147;$$

$$Z_{min} = 0,147 + 1,426 = 1,573.$$

Цена игры или прибыль на вложенный рубль:

$$\nu\ 1/Z_{min} = 0,636.$$

Оптимальные для получения прибыли пропорции завоза товаров:

$$p_3 = x_1 \times \nu = 1,426 \times 0,636 = 0,907;$$

$$p_4 = x_2 \times \nu = 0,147 \times 0,636 = 0,093.$$

Если нужно получить максимальную прибыль, пропорции завоза товаров с более высокой прибылью на вложенный рубль должны быть следующие: фрукты-овощи – 90,7%, алкогольная продукция – 9,3% от общего стоимостного объема этих товаров.

Задача 4. Остается выяснить, какую часть своих оборотных средств должен потратить магазин на товары первого и второго типов для получения максимальной прибыли за три месяца. За три месяца магазин тратит на приобретение товаров 15 750 000 руб. Составим задачу максимизации прибыли [5]. Пусть z_1 и z_2 – оборотные средства, которые магазин затрачивает на приобретение товаров первого и второго типов, $L(\overline{Z})$ – функция прибыли магазина. Известно, что даже в самом лучшем случае за данный трехмесячный период продукции первого типа магазин закупал не более чем на сумму 12 365 000, продукции второго типа – на сумму не более 9 621 000. В итоге получается следующая задача линейного программирования:

$$L(\overline{Z}) = 0,309z_1 + 0,636z_2 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \leq 15750000 \\ z_1 \leq 12365000 \\ z_2 \leq 9621000 \\ z_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}. \quad (7)$$

Данную задачу также можно решать симплексным методом или графически.

В итоге получается, что для получения максимальной прибыли на приобретение продуктов первого типа магазин должен потратить приблизительно 39% оборотных средств, на приобретение продуктов второго типа – 61% оборотных средств. Задача (5) имела практическое применение [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На хлебобулочные и кондитерские изделия, а также мясные и молочные продукты магазин должен потратить 39% оборотных средств, причем закупить их в соотношении 80,5% и 19,5%.

На фрукты-овощи и алкогольную продукцию магазин должен потратить 61% от оборотных средств, причем закупить их в соотношении 90,7% и 9,3%.

В этом случае будет удовлетворен спрос покупателей и сам магазин получит максимально возможную прибыль.

Литература

1. Воронина А.С. и др. Инновационное развитие российской экономики: проблемы и ближайшие перспективы [Текст] / А.С. Воронина, Ю.Н. Пыхтеев, А.М. Самочадин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – №8. – С. 708-712.
2. Подчищаева О.В. и др. Расчет оптимальной стратегии торговой фирмы на рынке [Текст] / О.В. Подчищаева, Н.Н. Никулина // Государственная служба и кадры. – 2016. – №4. – С. 114-118.
3. Дорожкин А.В. и др. Пути повышения инвестиционной привлекательности в Нижегородской области [Текст] / А.В. Дорожкин, О.В. Подчищаева // Экономика и предпринимательство. – 2016. – №10-2. – С. 212-217.
4. Подчищаева О.В и др. Модель оптимизации принятия последовательных управленческих решений в условиях неопределенности при помощи «дерева» решений [Текст] / О.В. Подчищаева, Н.Н. Никулина // Вестн. Московского ун-та МВД России. – 2015. – №10. – С. 315-318.
5. Подчищаева О.В. и др. Компромиссная задача линейного программирования оптимизации выпуска продукции [Текст] / О.В. Подчищаева, Н.Н. Никулина // Вестн. Московского ун-та МВД России. – 2016. – №1. – С. 243-245.
6. Подчищаева О.В и др. Некоторые модели управления запасами [Текст] / О.В. Подчищаева, Н.Н. Никулина // Вестн. Московского ун-та МВД России. – 2014. – №12. – С. 277-282.

Ключевые слова

Спрос; прибыль на вложенный рубль; игра; минимакс; максимин; цена игры; решение игры; стратегия; задача линейного программирования; товар.

Подчищаева Ольга Вячеславовна

РЕЦЕНЗИЯ

Автором выбрана актуальная тема исследования в свете решения проблем стабилизации, развития и изучения процессов рыночной экономики. Автор статьи четко выразил свою позицию о необходимости моделирования и оптимизации процесса взаимодействия продавец – покупатель на продуктовом рынке.

С помощью математического аппарата, в частности при помощи теории игр и линейного программирования показаны механизмы выбора оптимальных действии магазина при данном состоянии спроса и, что самое главное, – приведена математическая модель процесса прихода продавца и покупателя к взаимовыгодному взаимодействию.

Изложены основные принципы, лежащие в основе выбора оптимальных стратегий продавца (магазина) – принципы максимизации прибыли и максимального удовлетворения спроса покупателя, применение математической теории продемонстрировано на практическом примере.

Таким образом, поднятые вопросы к рассмотрению в данной статье актуальны, по ним автор предлагает свою математическую модель с соответствующим обоснованием и примерами. Рекомендую редакционной коллегии журнала «Аудит и финансовый анализ» статью О.В. Подчищаевой «Экономико-математическая модель оптимального функционирования продуктового магазина» к рассмотрению и публикации.

Овчаров А.О., д.э.н., профессор кафедры информационных систем в финансово-кредитной сфере Национального исследова-

тельского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ