3.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Мальцева А.А., к.э.н., доцент, директор, Научно-методический центр по инновационной деятельности им. Е.А. Лурье Высшей школы (ИнноЦентр), г. Тверь;
Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент, кафедра математической статистики и системного анализа, Тверской государственный университет, г. Тверь;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, с.н.с., отдел проектирования, «РусБИТех», г. Тверь

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ

Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ

В работе предлагается динамическая модель для оптимизации финансирования инвестиций в научные исследования компании с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Эта модель представляет собой обобщение классической производственной задачи на динамический случай. Данная статья основывается на работе А.В. Мищенко, О.А. Артеменко [6]. В отличие от инвестиций в основные и оборотные средства компании, изученной в работе [6], инвестиции в научные исследования приводят к изменению не вектора ресурсов, а технологической матрицы компании по нелинейной зависимости, предложенной в работе [4]. Это приводит в общем случае к нелинейной задаче оптимизации инвестиций, решение которой может быть найдено при помощи рекуррентного уравнения, аналогичного предложенного нами в работе [7] для инвестиций в основные средства компании.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается задача определения оптимальных остатков по кредитной линии в линейной динамической модели инвестиций, определенной и изученной в работе [7]. Отличие состоит в том, что инвестиции производятся не в основные или оборотные средства, а в научные исследования компании. Горизонт планирования составляет прогнозный период, который покрывает все предполагаемые инвестиции компании и достаточен для стабилизации ее денежного потока. Связь между доходом компании и текущими инвестициями в каждом периоде устанавливается через производственную задачу. Объем реализации выбирается из условия не превосходства его спросу и общих ограничений на производственные ресурсы. В работе предлагается алгоритм определения остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала.

Данная статья основывается на работе А.В. Мищенко, О.А. Артеменко [6] в части использования классической производственной задаче для связи между доходом компании и текущими инвестициями в каждом периоде. В отличие от модели Мищенко–Артеменко, где исследован случай инвестиций в основные и оборотные средства компании на один период, изучается динамическая модель инвестиций в научные исследования компании.

Данное предположение потребовало доказательства дополнительных свойств модели. В отличие от инвестиций в основные и оборотные средства компании, изученной в работе [6], инвестиции в научные исследования приводят к изменению не вектора ресурсов, а технологической матрицы компании по нелинейной зависимости, предложенной в работе [4].

Это приводит в общем случае к нелинейной задаче оптимизации инвестиций, решение которой может быть найдено при помощи рекуррентного уравнения, аналогичного предложенного нами в работе [7] для инвестиций в основные средства компании.

В общетеоретическом плане концепция инвестиционной стоимости лежит в основе современной теории оценки бизнеса в рамках доходно подхода (см. [1]). Дисконтированная стоимость денежного потока на собственный капитал компании представляет собой универсальный агрегированный критерий, который позволяет решать все вопросы, связанные со структурой и стоимостью капитала в зависимости от предполагаемых капитальных вложений, согласно методологии компании Deloitte&Touche (см. [5]). Оценке инвестиционной стоимости бизнеса посвящены многие работы (см. [2]), однако до сих пор фундаментальный вопрос о связи инвестиций с операционной деятельностью компании остается открытым.

Кроме того, как правило, одни специалисты занимаются дисконтированием, а другие – прогнозированием и оптимизацией денежного потока. Поэтому актуальной является задача объединения дисконтирования, прогнозирования и оптимизации денежного потока инвестиций в одной динамической модели (см. [4], с. 64).

Основной результат работы состоит в выводе рекуррентного уравнения для оптимальных остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала компании.

Освобождаясь от минимума в правой части на основе принципа сжимающих отображений и вытекающих из него условий монотонности остатков, можно получить достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и оценки темпов роста, что и сделано в настоящей работе.

1. Функция маржинального дохода компании

Рассмотрим задачу определения неявной функции маржинального дохода компании $Q = Q(V)$ без учета постоянных расходов C_0:

$$\begin{aligned} & Q(V) = \max_{x,y} \langle \Delta c, x \rangle, \\ & A(y)x \le b, x \ge 0, \\ & \sum_{i,j} y_{ij} \le V, y \ge 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $A(y) = (a_{ij}(y_{ij}))$ – технологическая $m \times n$ матрица производственной задачи (ПЗ);

$\Delta C = p - c - n$ – вектор столбец цен p на продукцию предприятия, уменьшенных на удельные переменные расходы c;

b – m – вектор столбец производственных ресурсов, выраженных в соответствующих единицах измерения;

e – m – вектор столбец цен производственных ресурсов;

x – n – вектор столбец выпуска продукции;

$y = (y_{ij})$ – $m \times n$ – матрица инвестиций в НИС за счет предполагаемого объема V финансирования инвестиционного проекта.

Зависимость элементов технологической матрицы компании от произведенных инвестиций в НИС по правилу треугольника может иметь вид [4]:

$$a_{ij}(y_{ij}) = \frac{a_{ij}(1+\chi)}{1+\psi s(y_{ij})};$$
$$s(v) = \sqrt{\frac{2}{1+v}} \times \frac{v-1}{3} \approx \frac{1}{2}\sqrt{3v}, v \to \infty, \quad (2)$$

где χ – коэффициент износа оборудования на предприятии;

$s = s(v)$ – коэффициент ресурсосбережения;

v – средства, направляемые на НИС, влияющие на изменение расходного коэффициента a_{ij} технологической матрицы с учетом износа оборудования и ресурсосбережения;

ψ – коэффициент влияния ресурсосбережения, который определяется как отношение величины ресурсосбережения к величине удельных затрат.

Из вспомогательных технических результатов, приведенных в первой главе книги [11], следует, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Функция маржинального дохода (1) будет непрерывной и неубывающей функцией V .

2. Постпрогнозная стоимость собственного капитала компании

Стоимость собственного капитала компании в постпрогнозный период может быть в простейшем случае получена методом прямой капитализации по формуле Гордона (см. [5]):

$$X = X(V) = \frac{q(V)(1+\tau)}{i-\tau} = = q(V)\left(\frac{1+\tau}{1+i} + \left(\frac{1+\tau}{1+i}\right)^2 + ...\right), \quad (3)$$

где τ – постпрогнозный темп роста на уровне долгосрочного прогноза инфляции;

i – предполагаемая (инвестором) доходность на собственный капитал (стоимость собственного капитала);

$$q(V) = (1-l)(Q(V) - C_0 - A(V)) \quad (4)$$

Где *(4)* – величина чистой прибыли компании до уплаты процентов по займам, скорректированная на ставку l налога на прибыль;

$A(V) = A_0 + aV$ – амортизация;

a – средняя норма амортизации основных средств компании;

$A_0 = a\langle e, b\rangle$ – амортизация старых основных средств (ОС) до новых капитальных вложений.

Предполагается, что структура ОС не изменится и в результате капитальных вложений объемом V и среднее значение нормы амортизации a останется на прежнем уровне.

Формула (3) метода прямой капитализации предполагает бесконечный период получения дохода и получается суммированием соответствующей геометрической прогрессии. Она применяется для стационарного периода, наступающего после завершения всех предполагаемых инвестиций в ОС и возврата основной суммы займа. Поэтому проценты по займам не учитываются. Формула (3) показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

Интересно сравнить эту потенциальную стоимость с текущей стоимостью компании. Для этого построим модель нестационарного изменения дохода компании в прогнозном периоде, охватывающем по времени все предполагаемые инвестиции и стабилизацию структуры капитала.

3. Общая модель финансирования инвестиционного проекта

Финансирование инвестиций в ОС предполагается в форме кредитной линии, т.е. соглашения, по которому заемщик может брать новые кредиты, не погасив еще предыдущих, но так, чтобы остаток долга на конец каждого года был не менее нуля и не более оговоренного объема V потолка кредитной линии. Суммарные платежи p_t по кредитной линии, включающие проценты и части основного долга, можно представить в виде (см. [5]):

$$p_t = Z_{t-1}g - Z_t + Z_{t-1} = Z_{t-1}g - \Delta Z_t, t = 0,1,...,n, \quad (5)$$

где g – средняя стоимость заемных средств.

Остаток долга должен находится в пределах:

$$0 \le Z_t \le V, t = 1,...,n-1. \quad (6)$$

Мы предполагаем в простейшем случае нулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (5):

$$Z_0 = 0, Z_n = 0. \quad (7)$$

Это позволяет считать остатки $Z_t, t = 1,2,...,n-1,$ по кредитной линии независимыми переменными. В частности, величина $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} > 0$ представляет собой новый кредит, увеличивающий общую задолженность, а величина $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} < 0$ – часть основного дога с обратным знаком, погашенного в t -м периоде. Поэтому значения $Z_t, t = 1,2,...,n-1$ не связаны друг с другом и могут быть выбраны независимо из условий (6). Предполагается, что вся величина $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} > 0$ идет в инвестиции в ОС.

Пусть d_t – прогноз денежного потока на инвестированный капитал на конец t -го года, который получается по формуле [5]:

$$d_t = q_t - K_t - \Delta O_t, \quad (8)$$

где $q_t = q(z_t)$ – величина чистой прибыли компании до уплаты процентов по займам, скорректированная на ставку l налога на прибыль, определяемая по формуле (4);

z_t – задолженность по кредитной линии нарастающим итогом, определяемая из рекуррентного уравнения:

$$z_t = z_{t-1} + max(Z_t - Z_{t-1}; 0), t = 1,...,n; z_0 = 0;$$

$K_t = \Delta z_t$ – предполагаемые капитальные вложения в t -м году; $\Delta O_t = v\Delta Q_t$ – увеличение оборотного капитала O_t компании, привязанное к изменению

$\Delta Q_t = \Delta Q(z_t)$ маржинального дохода; ν – соответствующий параметр линейной регрессии, построенный по ретроспективным данным по рекомендации компании Deloitte&Touche, приведенной в методике Deloitte&Touche (см. [5]).

Предполагается, что амортизация $A(V) = A_0 + aV$, остающаяся фактически в распоряжении предприятия после уплаты налога на прибыль идет по своему назначению, т.е. на ремонт и замещение выбывающих основных средств.

4. Простейшая динамическая модель инвестиций в прогнозный период

Предположим, что все инвестиции осуществляются до момента $T < n$ и по смыслу изучаемого периода $t = 1,2,...,T$ справедливо равенство $Z_T = V$ и дополнительно выполнено условие:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} \ge 0, t = 1,2,...,T. \tag{9}$$

Тогда $z_t = Z_t, \Delta z_t = \Delta Z_t$ и критерий текущей стоимости X_t собственного капитала компании на начало инвестиционного проекта принимает вид [10]:

$$X_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\tilde{q}(Z_t) - (g' + a')Z_{t-1} - \nu\Delta Q(Z_t)}{(1+i)^t} + \frac{X_T}{(1+i)^T} \to max_{\{Z_t\}}, \tag{10}$$

где обозначено для краткости:

$$\tilde{q}(V) = (1-l)(Q(V) - C_0 - A_0),$$
$$g' = (1-l)g, a' = (1-l)a.$$

Таким образом, предполагается, что последовательность $\{Z_t\}$ монотонно не убывает, и выполняется конечное условие:

$$Z_T = V. \tag{11}$$

Постпрогнозную стоимость собственного капитала компании X_T в (10) с учетом возможного ненулевого остатка по займу и равенства $Z_T = V$ можно найти в простейшем случае по формуле прямой капитализации прибыли после уплаты налога на прибыль и процентов по займам, которые уменьшают базу налога на прибыль:

$$X_T = X(z_T) = \{q(V) - g'V\}(1+\tau)/(i-\tau), \tag{12}$$

которая предполагается положительным для любых $V \ge 0$. Это означает, что функция $q(V)$ прибыли растет не медленней процентов по займам. Предполагается, что уровень левериджа L будет сохраняться на достигнутом уровне, т.е. сохраняться постоянная структура капитала компании.

Более точно постпрогнозную стоимость собственного капитала компании X_T в (10) можно определить как отложенную продажу [8]:

$$X_T = \frac{X_n}{(1+i)^{n-T}}. \tag{13}$$

где $X_n = q(V)(1+\tau)/(i-\tau)$ определяется по формуле Гордона (3) метода прямой капитализации; $\Delta T = n - T$ – наискорейшее время погашения займа, которое определяется по формуле:

$$\Delta T = n - T = \frac{ln\dfrac{q(V)}{q(V) - g'V}}{ln(1+g')}. \tag{14}$$

Это минимальное время, необходимое для полного погашения задолженности по кредитной линии за счет достигнутого на конец $(T+1)$-го периода денежного потока величины $d(V) = q(V) - g'V$. Подставляя (14) в (13), приходим к формуле:

$$X_T = \frac{q(V)(1+\tau)}{i-\tau}\left(1 - \frac{g'V}{q(V)}\right)^{log_{1+g'}(1+i)}. \tag{15}$$

Заметим, что при условии положительности выражения в правой части (12) и неравенства $i > g$ терминальное значение X_T по формуле (15) будет меньше чем по формуле (12). Это плата за восстановление финансовой устойчивости компании путем погашения возникшей задолженности V по кредитной линии.

Уравнение (10) равносильно рекуррентному уравнению:

$$X_{t-1} = \frac{\tilde{q}(Z_t) - (g' + a')Z_{t-1}}{1+i} - \frac{\nu\Delta Q(Z_t) + X_t}{1+i}, t = T,...,1 \tag{16}$$

с конечным условием (12).

Перегруппировкой членов разностей $\nu\Delta Q(Z_t) = \nu Q(Z_t) - \nu Q(Z_{t-1})$ в (10) можно получить эквивалентное выражение:

$$X_0 = \frac{\nu Q(0)}{1+i} + \sum_{t=1}^{T} \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(Z_t)}{(1+i)^t} - \frac{C_0' - A_0' - (g' + a')Z_{t-1}}{(1+i)^t} + \frac{X_T - \nu Q(V)/(1+i)}{(1+i)^T}, \tag{17}$$

где для краткости обозначено: $C_0' = (1-l)C_0$, $A_0' = (1-l)A_0$.

Введем величины $\tilde{X}_t = X_t - \nu Q(Z_t)/(1+i), t = 0,1,...,T$. Тогда уравнение (17) равносильно рекуррентному уравнению:

$$\tilde{X}_{t-1} = \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))q(Z_t)}{1+i} - \frac{C_0' - A_0' - (g' + a')Z_{t-1} + \tilde{X}_t}{1+i}, t = T,...,1 \tag{18}$$

с конечным условием:

$$\tilde{X}_T = X_T - \nu Q(V)/(1+i). \tag{19}$$

Поскольку $O_t = \nu Q(Z_t)$ – оборотный капитал на конец t-го периода, то величины $\tilde{X}_t$ представляют собой стоимость собственного капитала компании, скорректированные на стоимость оборотного капитала, дисконтированного к началу t-го периода.

Скорректированный собственный капитал естественно назвать внеоборотным капиталом по аналогии с оборотным. Действительно, если ввести внеоборотный капитал как разницу внеоборотных активов и долгосрочных займов, то собственный капитал будет балансировать сумму внеоборотного и оборотного капитала. То, что оборотный капитал при этом дисконтируется на начало периода и выражает особенность его влияния на денежный поток в принятой нами дискретной модели динамики инвестиционного процесса.

Лемма 2. Пусть $1 - l - \nu i/(1+i) > 0$. Тогда для неубывания критерия (17) по $Z_t; t = 1,2,...,T-1;$ достаточно выполнения неравенства:

$$Q(Z) \geq \frac{C_0' + A_0' + (g' + a')Z/(1+i)}{1 - l - \nu i/(1+i)} \tag{20}$$

для любых $Z \geq 0$.

Доказательство следует из эквивалентности критерия (17) критерию:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(Z_t)}{(1+i)^t} - \\ &- \frac{C_0' - A_0' - (g' + a')Z_t/(1+i)}{(1+i)^t} + \\ &+ \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(V) - C_0' - A_0' + \tilde{X}_T}{(1+i)^T} \end{aligned} \tag{21}$$

и того обстоятельства, что при сделанных предположениях функция в числителе (21) под знаком суммы будет в силу леммы 1 вогнутой и неотрицательной, т.е. не убывающей функцией от $Z_t; t = 1,2,...,T-1$.

Условие (20) означает, что функция $Q(V)$ маржинального дохода растет не медленней некоторой аффинной функции от объема инвестиций V .

5. Задача с ограничением по левериджу

С помощью уравнения (13) можно выразить дополнительное условие на предельный финансовый леверидж:

$$L_{t-1} = \frac{Z_{t-1}}{\tilde{X}_{t-1}} \leq L, t = T,...,1 . \tag{22}$$

Условие (22) эквивалентно неравенству: $Z_{t-1} \leq$ $\leq L\tilde{X}_{t-1}, t = T,...,1$, которое равносильно условию:

$$\begin{aligned} Z_{t-1} &\leq \left(\begin{aligned} &L\frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(z^t)}{1 + i + L(g' + a')} - \\ &- \frac{C_0' - A_0' + \tilde{X}_t}{1 + i + L(g' + a')} \end{aligned} \right); \\ t &= T,...,2; Z_T = V. \end{aligned} \tag{23}$$

Для решения задачи максимизации критерия (17) при ограничениях (6), (9) с дополнительным ограничением (23) на предельный леверидж компании рассмотрим рекуррентное уравнение:

$$\begin{aligned} Z_{t-1} &= \min \left(\begin{aligned} &Z_t; L\frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(z^t)}{1 + i + L(g' + a')} - \\ &- \frac{C_0' - A_0' + \tilde{X}_t}{1 + i + L(g' + a')} \end{aligned} \right); \\ t &= T,...,2; Z_T = V, \end{aligned} \tag{24}$$

которое нужно решать совместно с уравнением (18) и которое гарантирует, в частности, выполнение условий (6), (9).

Лемма 3. Предположим, что выполнено условие рентабельности (20). Тогда решение $\tilde{Z}_t, t = 1,2,...,$ $T-1$ задачи, полученное из уравнения (24), мажорирует сверху любое допустимое решение $Z_t, t = 1,2,...,T-1$, удовлетворяющее условию (23), в том смысле, что $Z_t \leq \tilde{Z}_t, t = 1,2,...,T-1.$

Доказательство получается из сравнения $\tilde{X}_t$ с $\hat{X}_t$, которое определяется как решение рекуррентного уравнения:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t-1} &= \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))q(Z_t)}{1+i} - \\ &\frac{C_0' - A_0' - (g' + a')Z_t/(1+i) + \hat{X}_t}{1+i}, \\ t &= T,...,1 \end{aligned} \tag{24}$$

с конечным условием:

$$\begin{aligned} \hat{X}_T &= q(V) + \tilde{X}_T = q(V) + \\ &+ X_T - \nu Q(V)/(1+i). \end{aligned} \tag{25}$$

Из сравнения (18) и (24) получим, что $\tilde{X}_t$ с $\hat{X}_t$ связано с соотношением:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= -\frac{(a' + g')Z_t}{1+i} + \\ &+ \hat{X}_t, t = T-1,...,0. \end{aligned}$$

В частности, $\hat{X}_0$ совпадает с полученным ранее эквивалентным критерием $\tilde{X}_0$, поскольку $Z_0 = 0$ в силу условия (7).

Теперь ограничения (9), (23) задачи можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &0 \leq Z_{T-1} \leq \\ &\leq \min \left\{ \begin{aligned} &V, L\frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(V)}{1 + i + L(a' + g')} - \\ &- \frac{C_0' - A_0' + \hat{X}_T}{1 + i + L(a' + g')} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &0 \leq Z_{t-1} \leq \\ &\leq \min \left\{ \begin{aligned} &Z_t, L\frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(Z_t)}{1 + i + L(a' + g')} - \\ &- \frac{C_0' - A_0' - (a' + g')Z_t/(1+i) + \hat{X}_t}{1 + i + L(a' + g')} \end{aligned} \right\}, \\ &\textbf{при } t = T-1,...,2, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\hat{X}_t$ – решение рекуррентного уравнения (24) с конечным условием (25), монотонно неубывающее покомпонентно по Z_t .

Это доказывается также как лемма 2 с использованием условия (20).

Из (20) следует также, что справа в (26) стоят монотонно неубывающие функции от Z_t , то индукцией по $t = T-1,...,1$ устанавливается, что справедливо утверждение леммы.

С учетом леммы 2 отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. В условиях рентабельности (20) рекуррентное уравнение (24) с конечным условием (25) дает оптимальное решение задачи максимизации критерия (17) при ограничениях (6), (9) с дополнительным ограничением (23) на предельный левередж компании.

6. Режим постоянного роста

Исследуем, когда можно опустить Z_t в правой части уравнения (24). Подставляя полученное выражение в (18), приходим к следующему рекуррентному уравнению для стоимости скорректированного внеоборотного капитала:

$$\tilde{X}_{t-1} = \frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(L\tilde{X}_t)}{1+i+L(g'+a')} - \frac{C_0' - A_0' + \tilde{X}_t}{1+i+L(g'+a')}, t = T,...,1 \quad (27)$$

с конечным условием (19).

Пусть k – общая константа Липшица функции Q, а r – соответствующая константа Липшица функции $F(\tilde{X})$ в правой части (27), определяемая по формуле:

$$r = \frac{(1-l-\nu i/(1+i))Lk+1}{1+i+L(g'+a')}. \quad (28)$$

Замечание 1. При условии $k < (i+L(a'+g'))/(L(1-l-\nu i/(1+i))$ выполнено неравенство $0<r<1$ и отображение $F(\tilde{X})$ является сжимающим и, следовательно, имеет неподвижную точку $\tilde{X}^*$.

Лемма 4. Для запуска процесса (27) в условиях замечания 1 достаточно, чтобы $\tilde{X}_T > (1+\varepsilon)\tilde{X}^*$, $V = L\tilde{X}_T$, где $\varepsilon > 0$ – параметр, показывающий потенциал относительного роста компании. Тогда процесс можно закончить для любого t_0, при котором $\tilde{X}_{T-t_0} > (1+\varepsilon)\tilde{X}^*$, в этом случае темп роста процесса в прямом времени будет удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{1+1/\varepsilon}(\frac{1}{r}-1) \le \frac{\tilde{X}_{T-(t-1)}}{\tilde{X}_t} - 1. \quad (29)$$

Доказательство следует из сжимаемости отображения $F(\tilde{X})$:

$$0 \le \tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^* = = \left|\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*\right| = \left|F(\tilde{X}_{T-(t-1)}) - F(\tilde{X}^*)\right| \le r\left|\tilde{X}_{T-(t-1)}) - , -\tilde{X}^*\right| = r(\tilde{X}_{T-(t-1)} - \tilde{X}^*),$$

откуда следует неравенство:

$$\Delta\tilde{X}_{T-t} = \tilde{X}_{T-(t-1)} - \tilde{X}_{T-t} = (\tilde{X}_{T-(t-1)} - \tilde{X}^*) - -(\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*) \ge (\frac{1}{r}-1)(\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*). \quad (30)$$

Из (30) следует искомая оценка:

$$\frac{\Delta\tilde{X}_{T-t}}{\tilde{X}_{T-t}} = \frac{\Delta\tilde{X}_{T-t}}{(\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*) + \tilde{X}^*} \ge \ge (\frac{1}{r}-1) \times \frac{1}{1+\frac{1}{\tilde{X}_{T-t}/\tilde{X}^*-1}} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}(\frac{1}{r}-1).$$

Последнее неравенство следует из условия $\tilde{X}_{T-t_0} > (1+\varepsilon)\tilde{X}^*$.

7. Задача с ограничения по спросу

Подобно [12], потребители на рынке предполагаются мелкими. Их поведение характеризуется суммарной линейной функцией спроса:

$$D(p) = D - Gp, \quad (31)$$

показывающей, какой объем каждого товара будет куплен при данном векторе цен, которые считаются известными. Здесь $p = (p_1, p_2, ..., p_n)'$ – вектор столбец цен $p_j \ge 0$; $D = (D_1, D_2, ..., D_n)'$ – вектор столбец предельных объемов спроса $D_j > 0$; $G = diag(d)$ – диагональная $n \times n$-матрица, на диагонали которой стоят коэффициенты $d_j > 0$; $d' = (d_1, d_2, ..., d_n)$ – вектор строка коэффициентов $d_j > 0$.

Предположим, что технологическая матрица A имеет хотя бы один ненулевой элемент в каждой строке и столбце, что означает, что каждый товар использует хотя бы один вид ресурсов, и каждый ресурс используется для производства хотя бы одного товара. Тогда множество X допустимых решений задачи (1) будет не пусто и ограниченно. Добавим ограничения на параметры, связывающие предельные объемы спроса $D_j > 0, j = 1,2,...,n$ и цены: $c_j \le p_j \le P_j = D_j / d_j, j = 1,2,...,n.$ Предположим, что $D > Gc$. Это неравенство эквивалентно условию $c < P$, т.е. не вырожденности задачи.

Подобно (1) введем функцию дохода компании $Q = Q(Z)$, положив (ср. с [12]):

$$Q(Z) = max_{x,y}\langle p-c, x\rangle - C_0, \quad (32)$$

где максимум берется при ограничениях:

$$\begin{cases} A(y)x \le b; y \ge 0; \\ 0 \le x \le D(p); \sum_{i,j} y_{ij} \le Z. \end{cases} \quad (33)$$

При этом, начиная с некоторого значения $Z = v_1$, функция дохода компании $Q = Q(Z)$ не увеличивается.

Предположим, что конечное условие к рекуррентному уравнению инвестиции (27) определяется по формулам (12), (19):

$$\tilde{X}_T = X_T - \nu Q(V)/(1+i) = (q(V) - -g'V)(1+\tau)/(i-\tau) - \nu Q(V)/(1+i). \quad (34)$$

Для запуска процесса (27), (34) нужно определить объем инвестиций $V = L\tilde{X}_T$ из условия:

$$\tilde{X}_T = (q(L\tilde{X}_T) - g'V)(1+\tau)/ /(i-\tau) - \nu Q(L\tilde{X}_T)/(1+i),$$

которое приводит к уравнению для $\tilde{X}_T$:

$$\tilde{X}_T(\frac{i-\tau}{1+\tau}+g'L)=q(L\tilde{X}_T)-\frac{\nu Q(L\tilde{X}_T)(i-\tau)}{(1+i)(1+\tau)}. \quad (35)$$

С учетом формулы (4) $q(L\tilde{X}_T)=(1-l)Q(L\tilde{X}_T)-$ $-C_0'-A_0'-a'L\tilde{X}_T$, откуда уравнение (35) принимает вид:

$$\tilde{X}_T(\frac{i-\tau}{1+\tau}+(a'+g')L)=$$
$$=(1-l-\frac{\nu}{1+i}\times\frac{i-\tau}{1+\tau})Q(L\tilde{X}_T)-C_0'-A_0'. \quad (36)$$

Лемма 5. В условиях (20) уравнение (36) имеет и притом единственное решение $\tilde{X}_T^*$.

Действительно, в силу (20) имеем неравенство:

$$Q(0)\geq\frac{C_0'+A_0'}{1-l-\nu i/(1+i)}\geq$$
$$\geq\frac{C_0'+A_0'}{1-l-\nu(i-\tau)/[(1+\tau)(1+i)]},$$

т.е. правая часть неравенства (36) при $\tilde{X}_T=0$ больше левой. Но в силу ограниченности функции Q величиной $Q(V_1)$ при любом X_T, удовлетворяющем условию:

$$X_T>max(v_1/L;[(1-l-\frac{\nu(i-\tau)}{(1+i)(1+\tau)})Q(V_1)-$$
$$-C_0'-A_0']/(\frac{i-\tau}{1+\tau}+L(a'+g'))=\hat{X}_T^*.$$

Правая часть неравенства (36) меньше левой. Последнее вместе с условием леммы означает, что существует решение X_T^* уравнения (36) удовлетворяющее неравенству:

$$0<\tilde{X}_T^*<\hat{X}_T^*. \quad (37)$$

Единственность решения следует из неубывания функции Q и строгого возрастания функции в левой части условия (36).

При этом процесс (27), (36) может нарушать условие $L\tilde{X}_T\leq V_1$. В последнем случае уравнение (27) должно иметь вид:

$$\tilde{X}_{t-1}=\frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(L\tilde{X}_t)}{1+i+L(1+g'+a')}-$$
$$-\frac{C_0'-A_0'+(1+L)\tilde{X}_t}{1+i+L(1+g'+a')},t=T,...,1. \quad (38)$$

Это устанавливается как уравнение (27), но в этом случае положительная разница Z_t-Z_{t-1} идет на увеличение денежного потока на собственный капитал предприятия. При этом платеж по кредитной линии равен $p_t=Z_{t-1}(1+g')-Z_t$. Если ввести функцию

$$L(\tilde{X}_t)=\begin{cases}L,L\tilde{X}_t\geq V_1\\0,L\tilde{X}_t<V_1\end{cases}=L\theta(V_1/L),$$

(где $\theta(a)$ – индикаторная функция множества $x\geq a$), то уравнения (27), (38) можно записать единообразно:

$$\tilde{X}_{t-1}=\frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(L\tilde{X}_t)}{1+i+L(\tilde{X}_t)+L(g'+a')}-$$
$$-\frac{C_0'-A_0'+(1+L(\tilde{X}_t))\tilde{X}_t}{1+i+L(\tilde{X}_t)+L(g'+a')},t=T,...,1. \quad (39)$$

При этом неподвижная точка X^* у процессов (27), (38) одна и та же и находится из уравнения:

$$\tilde{X}(i+(a'+g')L)=$$
$$=(1-l-\frac{\nu i}{1+i})Q(L\tilde{X})-C_0'-A_0'. \quad (40)$$

Лемма 6. В условиях (20) уравнение (40) имеет и притом единственное решение $\tilde{X}^*$, удовлетворяющее неравенству:

$$0<\tilde{X}^*<\tilde{X}_T^*. \quad (41)$$

Утверждение леммы следует из неравенства:

$$0<\tilde{X}^*(\frac{i-\tau}{1+\tau}+L(a'+g'))<\tilde{X}^*(i+L(a'+g'))=$$
$$=(1-l-\frac{\nu i}{1+i})Q(L\tilde{X}^*)-C_0'-A_0'<$$
$$<(1-l-\frac{\nu i}{1+i}\times\frac{i-\tau}{1+\tau})Q(L\tilde{X}^*),$$

аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 5.

Для решения уравнений (36), (40) можно воспользоваться методом деления пополам отрезка $[0,\hat{X}_T^*]$, где $\hat{X}_T^*$ была определена в (35). При этом значение функции $q(X_TL)$ на каждом шаге находится при помощи решения задачи линейного программирования (32), (33).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в настоящей работе предложена практически значимая методика согласований параметров инвестиций в научные исследования, обеспечивающих устойчивый рост собственного капитала компании, и получены оценки роста, позволяющие оценить темп роста и общий потенциал относительного роста компании. Для решения уравнений (36), (40), определяющих базовые параметры режима роста, было предложено воспользоваться методом деления пополам отрезка $[0,\hat{X}_T^*]$, где величина $\hat{X}_T^*$ была определена в (35). При этом значение функции $q(X_TL)$ на каждом шаге находится при помощи решения задачи линейного программирования (32), (33) большой размерности. Задача (32), (33) допускает декомпозицию:

$$R(y)=max_x\langle p-c,x\rangle-C_0\rightarrow$$
$$\rightarrow max_y,\sum_{i,j}y_{ij}\leq Z,y\geq 0, \quad (42)$$

где внутренний максимум по x берется при ограничениях:

$$\begin{cases}A(y)x\leq b;\\0\leq x\leq D(p).\end{cases} \quad (43)$$

Переходя к двойственной задаче во внутренней задаче максимизации, можно свести задачу (42), (43) к максиминной задаче со связанными переменными, которую можно решить методом проекции обобщенных квазиградиентов (см. [4]), однако этому мешает сложность проектирования на множество допустимых решений y внешней задачи максимизации. Такие задачи с ограничениями неравенствами лучше решать комбинированным методом Поляка (см. [10], с. 259).

Литература

1. Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и методы оценки любых активов [Текст] : пер. с англ. / А. Дамодаран. – 6-е изд. –- М. : Альпина Паблишерз, 2010.
2. Виленский П.Л. и др. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика [Текст] / П.Л. Виленский, В.Н. Лифшиц, С.А. Смоляк. – М. : Дело, 2004.
3. Завриев С.К. Метод стохастического обобщенного градиента для решения минимаксных задач со связанными переменными [Текст] / С.К. Завриев, А.Г. Перевозчиков // Ж.-л вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 29 ; №4. – С. 491-500.
4. Мезоэкономика [Текст] : мезоэкономика развития [Текст] / под ред. Г.Б. Клейнера. – М. : Наука, 2011.
5. Методология (2003-2005) [Текст] : методология и руководство по проведению оценки бизнеса и /или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» / Deloitte&Touche. – декабрь 2003 – март 2005.
6. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. – №42.
7. Перевозчиков А.Г. Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия [Текст] / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик // Прикладная математика и информатика: тр. фак-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова / под ред. В.И. Дмитриева. – М. : МАКС Пресс, 2014. – №46. – С. 76-88.
8. Перевозчиков А.Г. Простейшая нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – №3. – С. 291-294.
9. Перевозчиков А.Г. Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // Экономика и математические методы. – 2016. – Т. 52 ; №1. – С. 140-148.
10. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию [Текст] / Б.Т. Поляк. – М. : Наука, 1983.
11. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979.

Ключевые слова

Инвестиции в научные исследования; динамическая модель инвестиций; объемы производства; цены реализации; общие ограничения на ресурсы; оптимальная стратегия; достаточные условия режима устойчивого роста.

Мальцева Анна Андреевна

Лесик Александра Ильинична

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

В работе предлагается динамическая модель для оптимизации финансирования инвестиций в научные исследования компании с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Эта модель представляет собой обобщение классической производственной задачи на динамический случай. В отличие от инвестиций в основные и оборотные средства компании, инвестиции в научные исследования приводят к изменению не вектора ресурсов, а технологической матрицы компании. Это приводит в общем случае к нелинейной задаче оптимизации инвестиций, решение которой может быть найдено при помощи полученного рекуррентного уравнения.

Данная статья основывается на работе (Мищенко, Артеменко, 2012) в части использования классической производственной задаче для связи между доходом компании и текущими инвестициями в каждом периоде. В отличие от модели Мищенко–Артеменко, где исследован случай инвестиций в основные и оборотные средства компании на один период, изучается динамическая модель инвестиций в научные исследования компании. Данное предположение потребовало доказательство дополнительных свойств модели. Основной результат работы состоит в выводе рекуррентного уравнения для оптимальных остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала компании. Освобождаясь от минимума в правой части на основе принципа сжимающих отображений и вытекающих из него условий монотонности остатков, можно получить достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и оценки темпов роста, что и сделано в настоящей работе.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.А. Мальцевой, А.И. Лесик, А.Г. Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н., профессор кафедры бухгалтерского учета, анализа и финансов, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии, г. Тверь.

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ