6.3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОГО РОСТА В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИЙ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, с.н.с., ИнноЦентр, Высшая школа им. Е.А. Лурье, г. Тверь;
Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент, кафедра математической статистики и системного анализа, Тверской государственный университет, г. Тверь;
Каримов С.Д., бакалавр факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ

В работе предлагается динамическая нестационарная модель для оптимизации финансирования инвестиций в основные средства предприятия с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Эта модель представляет собой обобщение классической производственной задачи на динамический случай и позволяет сформулировать достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и дать оценки темпов роста. Для квадратичной функции дохода предложен алгоритм проверки достаточных условий, использующий на каждом шаге не более одного значения функции доходности, которое может быть найдено методом субградиентов в двойственной форме задачи.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается модель роста инвестиционной стоимости собственного капитала компании. Эта стоимость может в простейшем случае быть получена методом прямой капитализации прибыли, что позволяет исследовать зависимость стоимости компании от заемных средств. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости в зависимости от располагаемых кредитных ресурсов. Каждому этапу нестационарного прогнозного периода соответствует адекватная динамическая модель связи инвестиционной, операционной и финансовой деятельности компании. К сожалению, обычно она лишь декларируется [6], но реально остается как бы за рамками исследования, поскольку предполагается, что она носит специфический для каждой компании характер и может быть выявлена только на основе представленного бизнес-плана. Поэтому актуальной является задача построения адекватного класса динамических моделей, позволяющих дать специалистам по бизнес-планированию необходимый аналитический аппарат, имеющий единую методическую основу.

В общетеоретическом плане концепция инвестиционной стоимости лежит в основе современной теории оценки бизнеса в рамках доходно подхода (см. Дамодаран А. [7]). Дисконтированная стоимость денежного потока на собственный капитал компании представляет собой универсальный агрегированный критерий, который позволяет решать все вопросы, связанные со структурой и стоимостью капитала в зависимости от предполагаемых капитальных вложений согласно методологии компании Deloitte&Touche [9]. Оценке инвестиционной стоимости бизнеса посвящена большая литература (см. [12] под редакцией В.М. Рутгайзера). Однако до сих пор фундаментальный вопрос о связи инвестиций с операционной деятельностью компании остается открытым. Считается, что такая связь может быть установлена только специалистами компании в рамках подготовки бизнес-плана, а задача оценщиков скорректировать этот бизнес-план с учетом сопутствующих рисков. Поэтому важной представляется работа А.В. Мищенко [10] со своей ученицей, в которой предложены различные модели управления заемным капиталом, связывающие доход компании с тем, какую продукцию и в каком объеме оно будет выпускать и каким образом будут использованы ограниченные инвестиционные ресурсы, привлекаемые как для пополнения оборотного капитала, так и для расширения и модернизации производственной базы предприятия. Эти задачи формально являются производными от классической производственной задачи (см., например, [1]) и представляют суть задачи управления ресурсами в зависимости от предполагаемого объема инвестиций в основные и оборотные средства предприятия. Следует подчеркнуть, что эти задачи ставятся и решаются авторами как экстремальные статические задачи, т.е. рассчитанные на один период, оптимизационные задачи.

Суть нашего подхода состоит в том, что задача управления ресурсами рассматривается как неявная функция связывающая доход предприятия в данном периоде с объемом произведенных до этого периода инвестиций в основные и возможно оборотные активы. В работах [15, 14, 18] было показано, что неявная функция дохода представляет собой вогнутую функцию, вычислен ее субдифференциал. Предложена его аппроксимация на базе метода наискорейшего спуска, позволяющая сколь угодно точно аппроксимировать функцию дохода. Это позволяет ставить задачи оптимизации финансирования инвестиционного проекта как задачи дискретного оптимального управления, что и сделано в настоящей работе. Показано, что оптимальное решение задачи в практически значимых случаях может быть получено с помощью рекуррентного уравнения для остатков по кредитной линии. Оказалось (см. [14]), что без дополнительных ограничений на текущий левередж, которые предполагается рассмотреть в настоящей работе, оптимальное решение задачи на этапе собственно инвестиций тривиально и упирается в потолок кредитной линии. Нетривиальное решение получается на этапе восстановления финансовой устойчивости предприятия после осуществления всех предполагаемых инвестиций [18]. Это позволяет исследовать устойчивость инвестиционной стоимости компании от стоимости денег на финансовом рынке по модели, предложенной нами в работах [2, 3] и получить достаточные условия устойчивого роста компании.

В работе П.А. Назарова [11] приводится обзор западных источников в связи с предложенной непрерывной моделью оптимального управления объясняющая механизм влияния структуры собственности компании на структуру капитала. Оптимизация структуры капитала рассматривается как задача, производная от задачи максимизации дисконтированной стоимости компании в соответствии с общепринятой концепцией, изложенной в [7]. В работе [31] Ф. Модильяни и М. Миллер доказали, что денежный поток компании в большей степени увеличивается за счет заемного капитала, чем собственного. Согласно теории компромисса, компании выгодно увеличивать долю заемных средств до достижения равенства предельной выгоды от налогового щита предельным издержкам по займу. J. Graham [25] показал это по крайней мере для крупных компаний. В работе [36] O. Williamson исследует положительное влияние перемещаемости активов на финансовый левередж. J. Sott [34] отмечает что в регулируемых отраслях компании имеют структуру капитала с более высоким уровнем левериджа. R. Masulis и H. DeAngelo [28] исследовали компании с небольшими или отрицательными прибылями до налогообложения и уплаты процентов которые не могут воспользоваться преимуществами налогового щита. В работе S. Titman [35] исследуется связь между уникальностью отрасли и финансовым левериджем. M. Bredley, G. Jarrell, H. Kim [23] учитывают влияние агентских издержек на структуру капитала. L. Lang, E. Ofec [27] отмечают, что долговую нагрузку выгодно увеличивать только компаниям, денежные потоки которых существенно превосходят возможности роста. Одни эмпирические исследования подтверждают связь между структурой собственности и левериджем (см. [27]), а другие отвергают (см. Chen X. [24]).

Учет теории Модильяни-Миллера (см. [29, 30]) в стоимости собственного капитала компании, использующей заемный капитал, делает поставленную задачу оптимизации финансирования инвестиций не линейной. В этом случае вопрос о монотонности критерия и справедливости полученного нами рекуррентного уравнение для оптимальных остатков по кредитной линии остается пока открытым и следует применять общие методы теории оптимального управления. Первым исследователем, обратившим внимание на то, что расчеты стоимости собственного капитала для конечного периода будут отличаться от бесконечного, принятого в теории Модильяни-Миллера, был S. Myers [32], рассмотревшего одногодичные проекты. В общем случае для конечного периода соответствующие формулы получены П.Н. Брусовым с учениками. К сожалению, эти работы содержат методическую ошибку, состоящую в том, что доля заемного капитала в инвестируемом и его абсолютная величина считаются постоянными, хотя стоимость собственного капитала компании убывает до нуля в прогнозном периоде. В работе [17] теория Модильяни-Миллера распространяется на нерегулярный денежный поток. R. Hamada [26] скомбинировал модель стоимости капитальных активов (***CAPM*** [6]) и модель Модильяни-Миллера с учетом налогообложения, которая представляет собой как бы проекцию теории на модель ***CAPM***.

В работе В.А. Царькова (см. [20, 21]) обоснованы детерминированные аналоги постоянного роста продажной стоимости бизнеса. Предложена дискретная модель инвестиционного роста с заемным капиталом, позволяющая разделить валовой доход по проекту на доход инвестора и процентный расход на привлечение капитала. Исследуются инвариантные свойства показателей в базовой динамической модели инвестиций. Ранее этим же автором (см. [19]), была предложена теория воспроизводства капитала на основе методов теории автоматического регулирования. К сожалению, дисконтирование доходов в модели производится по средней стоимости, заемного капитала, с чем трудно согласиться. Квадратичная функция дохода была нами изучена в работах [8, 13]. Нестационарная модель прогнозировании продажной цены бизнеса на базе броуновского процесса была предложена нами в работе [33].

1. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ СРЕДСТВА КОМПАНИИ

Как и динамическая модель В. Леонтьева [1], предлагаемая модель есть производная от классической производственной задачи:

$$\begin{aligned} &\langle s, x\rangle - C_0 \to max, \\ &Ax \le b, x \ge 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь C_0 – постоянные расходы компании, $s \in E^n$ – вектор цен p, уменьшенных на удельные переменные расходы c, который в простейшем случае считается постоянным, скорректированный вместе с C_0 – на ставку налога l на прибыль (например, $s = (1 - l)s'$, где s' – исходный удельный маржинальный доход). Предполагается, что разность $\langle s, x\rangle - C_0$ неотрицательна для любого решения задачи (1), где $x \in E^n$ – план выпуска продукции, $A_{m\times n}$ – матрица удельных затрат, $b \in E^m$ – вектор ресурсов, под которыми понимаются основные средства, используемые в производстве, в штуках или других подходящих единицах. Прибыль корректируются на ставку налога на прибыль в соответствии с определением денежного потока на инвестированный капитал в [9], который в общем случае получается суммированием прибыли до налогообложения и уплаты процентов, скорректированную на ставку налога на прибыль, плюс амортизация и другие неденежные расходы минус капитальные вложения и увеличение оборотного капитала. В случае, когда капитальные вложения производятся на уровне амортизации и оборотный капитал не увеличивается, получаем, что денежный поток представляет собой просто прибыль до налогообложения и уплаты процентов, скорректированную на ставку налога на прибыль (см. [3]).

Модель динамического межотраслевого баланса В. Леонтьева получается из (1) при $C_0 = 0$ путем соединения выхода на вход [1]:

$$\begin{aligned} &\langle s, x^T\rangle \to max, \\ &Ax^{t+1} \le x^t, x^t \ge 0, \\ &t = 0,1,...,T-1, x^0 = b. \end{aligned}$$

Это возможно только тогда, когда $m = n$ и множества видов продукции и ресурсов совпадают, то есть на макроуровне. Наша же цель – микроуровень, поэтому рассмотрим другое обобщение производственной задачи на динамический случай (1):

$$\begin{aligned} &X_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\langle s, x^t\rangle - C_0 - gz^{t-1}}{(1+i)^t} + \\ &+ \frac{X_T}{(1+i)^T} \to max_{x_t, y_t, z_t}; \\ &Ax^t \le b + y^t; x^t, y^t, z^t \ge 0; \langle e, y^t\rangle \le z^t; \\ &t = 1,...,T; z^t \uparrow; z^0 = 0, z^T = v. \end{aligned} \qquad (2)$$

Переменными задачи (2) являются наборы x_t, y_t, z_t. Дополнительно предполагается, что чистая прибыль в (2) в числителе под знаком суммы неотрицательна и разница Δy^{t+1} между значениями y^{t+1} и y^t покомпонентно может быть погашена путем покупки недостающих активов и продажи лишних, как новых за счет накопленной амортизации, которая может быть учтена дополнительно (см. замечание 2). С учетом очередного транша $\Delta z^t = z^{t+1} - z^t \ge 0$ по кредитной линии это можно сделать всегда. Если при переходе от y^{t+1} к y^t продавать лишние основные средства запрещено, а можно только докупать отсутствующие, что эквивалентно дополнительному ограничению $y^{t+1} \ge y^t$, то множество допустимых решений задачи (2) сузится и максимальное значение критерия уменьшится. Таким образом, сделанное предположение соответствует оптимистическому сценарию оценки потенциальных возможностей роста стоимости компании (СК) в результате инвестиций, что отвечает целям, поставленным в настоящей работе.

В (2) $X_t \in E^1$ – стоимость собственного капитала компании на конец t – го года (в частности, терминальное значение X_T задано); $z^t \in E^1$ – остаток задолженности по кредитной линии на конец t – го года; v – предполагаемый объем кредитной линии, g – стоимость заемного капитала, скорректированная на ставку налога l на прибыль ($g = (1-l)g'$, где g' – исходная ставка процента); i – предполагаемая доходность на собственный капитал; $y^t \in E^m$ – вектор добавленных ресурсов за счет инвестиций в основные средства (ОС) компании, $e \in E^m$ – вектор цен на ресурсы.

Финансирование инвестиций в ОС предполагается в форме кредитной линии, т.е. соглашения, по которому заемщик может брать новые кредиты, не погасив еще предыдущих, но так, чтобы остаток долга на конец каждого года был не менее нуля и не более оговоренного объема v кредитной линии. Суммарные платежи p_t по кредитной линии, включающие проценты и части основного долга, можно представить в виде [2]:

$$p_t = z^{t-1}g(1-l) - z^t + z^{t-1} = \\ = z^{t-1}(1+g') - z^t, t = 1,2,...,T.$$

Это позволяет выбрать остатки z_t по кредитной линии как независимые переменные. В частности, величина $\Delta z^t = z^t - z^{t-1} > 0$ представляет собой новый кредит, увеличивающий общую задолженность. Предполагается, что вся величина $\Delta z^t = z^t - z^{t-1} > 0$ идет в инвестиции в ОС. Поэтому в чистой прибыли в (2) в числителе под знаком суммы учитываются только проценты за пользование остатком z^{t-1} в течении года t. Погашать увеличивающуюся таким образом задолженность от нуля до величины $v > 0$ предполагается в постпрогнозный период, что должно находить отражение в определении терминального значения стоимости собственного капитала X_T (см. далее, например, формулу (7)).

Замечание 1. Связь периодов в модели (2) осуществляется не путем их замыкания выхода на вход, что невозможно на микроскопическом уровне в силу различия множества видов продукции и ресурсов, а при помощи нежесткой связи вектора ресурсов y^t с текущим объемом финансирования z^t в основные средства компании. Как будет показано далее, задача (2) эквивалентна некоторой задаче дискретного оптимального управления с фазовыми ограничениями, где связь между периодами фигурирует явно, но уже в (2) можно заменить неравенство $\langle e, y_t \rangle \le z^t$ на равенство $\langle e, y_t \rangle = z^t$, что делает микроэкономическую модель (2) более близкой к макроэкономической модели Леонтьева.

Предполагается, что все приращение задолженности $\Delta z^t = z^t - z^{t-1}$, неотрицательное в силу условия монотонного неубывания последовательности $\{z^t\}$ в (2), идет на инвестиции в основные средства компании.

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ

Введем функцию дохода:

$$q(v) = max_{x,y} \langle s, x \rangle - C_0; \\ Ax \le b + y; x, y \ge 0; \langle e, y \rangle \le v. \quad (3)$$

Переменными задачи (3) являются x, y. Можно было бы и вектор цен $c = c^t$ в (3) считать переменным, например растущими в соответствии с прогнозом инфляции. В этом случае функция $q(v) = q_t(v)$ в (3) будет зависеть уже от номера периода t. Такие статические модели изучались в [10].

Переходя к задаче двойственной к (3) с учетом результатов [1], убеждаемся, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Функция маржинального дохода (3) будет вогнутой, неубывающей и кусочно-линейной функцией V и может быть представлена как минимум из конечного числа линейных функций:

$$q(v) = \min_{j=1,2,...,m} \left(Q_j^0 + k_j v \right).$$

Например, в модельном примере в [15] была построена функция:

$$q(v) = \begin{cases} -30 + 0,875v; 0 \le v \le 80; \\ 23 + 0,207v; 80 \le v \le 1820; \\ 36 + 0,200v; v \ge 1820. \end{cases}$$

Заметим, что при $v = 0$ функция дохода была отрицательна, что означает убыточность компании при отсутствии инвестиций.

С учетом введенного обозначения задачу (2) можно записать в виде:

$$X_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{q(z^t) - gz^{t-1}}{(1+i)^t} + \frac{X_T}{(1+i)^T} \to max_{\{z^t\}}; \\ z^t \ge 0; t = 1,...,T; z^t \uparrow; z^0 = 0, z^T = v. \quad (4)$$

Переменными задачи (4) являются наборы z_t.

Замечание 2. В более общем случае, рассмотренном в [11], функция годового дохода $q(v)$ в (4) заменяется на функцию $Q(v) = (1-l)(q(v) - C_0 - A(v))$, представляющую собой величину чистой прибыли компании до уплаты процентов по займам, скорректированная на ставку l налога на прибыль, $A(v) = A_0 + av$ – амортизация основных средств (ОС) компании, a – средняя норма амортизации ОС, $A_0 = a\langle e, b \rangle$ – амортизация старых ОС до новых капитальных вложений. При этом вектор цен c в (3) не корректируется на ставку налога на прибыль. Предполагается, что в результате капитальных вложений норма амортизации a не изменятся. Все дальнейшие результаты можно перенести и на этот случай, однако чтобы не загромождать дальнейшее изложение, в этой статье мы предпочитаем просто изначально скорректировать цены c на ставку налога на прибыль.

Лемма 2. Для неубывания критерия по $z^t; t = 1,2,...,T-1;$ достаточно выполнения неравенства:

$$q(v) \geq \frac{g}{1+i}, v \geq 0. \tag{5}$$

Доказательство следует из эквивалентности критерия задачи (4) критерию:

$$x_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{q(z^t) - gz^t/(1+i)}{(1+i)^t} + \frac{q(v)+X_T}{(1+i)^T}, \tag{6}$$

и того обстоятельства, что при сделанных предположениях функция в числителе (6) под знаком суммы будет в силу леммы 1 вогнутой и неотрицательной, то есть не убывающей функцией.

Граничную стоимость бизнеса X_T в (4) можно в простейшем случае определить по формуле $X_T = (q(v) - gv)/i$ методом прямой капитализации остаточного дохода, но лучше определить как отложенную продажу [18]:

$$X_T = \frac{X_n}{(1+i)^{n-T}}. \tag{7}$$

Здесь $\Delta T = n - T$ – наискорейшее время погашения займа, которое определяется по формуле [18]:

$$\Delta T = n - T = \frac{\ln\left(1 + \frac{V - Z_n^0}{\bar{q}(V)} g'\right)}{\ln(1+g')},$$

где обозначено для краткости: $\bar{q}(V) = (1-c)(Q(V) - -C_0 - A_0 - (a+g)V)$.

Это минимальное время, необходимое для полного погашения задолженности по кредитной линии за счет достигнутого на конец $(T+1)$-го периода денежного потока величины:

$$d(v) = q(v) - gv, \tag{8}$$

который предполагается положительным для любых $v \geq 0$, что гарантирует выполнение условия (5) монотонности критерия в задаче (4). С учетом монотонности последовательности z^t это условие гарантирует не отрицательность денежного потока на собственный капитал в (4):

$$d_t = q(z^t) - gz^{t-1} \geq q(z^t) - gz^t \geq 0; t = 1,2,...,T.$$

С учетом этого обстоятельства задача (4) имеет тривиальное решение

$$z^t = v, t = 1,...,T-1.$$

Это означает, что инвестиции осуществляются моментально до начала первого периода, что делает ненужным наличие всех введенных периодов $t = 1,...,T$, необходимых для собственно инвестирования. Таким образом, чтобы задача (4) инвестирования была нетривиальна, необходимо дополнительное условие. Одно из таких условий предложено в следующем пункте.

Продажную стоимость X_n в (7) можно найти методом прямой капитализации дохода:

$$X_n = \frac{q(v)}{i}. \tag{9}$$

3. ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЕМ ПО ЛЕВЕРИДЖУ

Имеется в виду финансовый леверидж (рычаг) компании, который измеряется отношением стоимости заемного и собственного капитала в каждый момент дискретного времени. Значение критерия в задаче (4) можно определить при помощи рекуррентного уравнения:

$$X_{t-1} = \frac{q(z^t) - gz^{t-1} + X_t}{1+i}; t = T,...,1; \tag{10}$$

с граничным условием (7), (9).

С помощью уравнения (10) можно выразить дополнительное условие на предельный леверидж:

$$L_{t-1} = \frac{z^{t-1}}{X_{t-1}} \leq L, t = T,...,1, \tag{11}$$

которое гарантирует, что структура инвестированного капитала компании не выйдет за пределы, обеспечивающие ее финансовую устойчивость.

Условие (11) равносильно неравенству:

$$z^{t-1} \leq LX^{t-1} = L(q(z^t) - gz^{t-1} + X_t)/(1+i),$$

что эквивалентно условию:

$$(1+i+Lg)z^{t-1} \leq L(q(z^t) + X_t).$$

Таким образом, условие (11) равносильно неравенству:

$$z^{t-1} \leq L\frac{q(z^t) + X_t}{1+i+Lg}, t = T,...,1. \tag{12}$$

Для решения задачи (4) с дополнительным ограничением (12) на предельный леверидж компании рассмотрим рекуррентное уравнение:

$$z^{t-1} = \min\left(z^t, L\frac{q(z^t) + X_t}{1+i+Lg}\right); t = T,...,2; z^T = v, \tag{13}$$

которое нужно решать совместно с уравнением (10). Таким образом, фактически решается система рекуррентных уравнений (10), (13) и возникает вопрос о мажоритарности полученного решения по отношению к любому допустимому решению задачи.

Этот вопрос решается сравнением X_t с x_t, которое вводится по аналогии с (6), и связано соотношением:

$$X_t = -\frac{gz^t}{1+i} + x_t, t = T-1,...,0.$$

Здесь x_t – решение рекуррентного уравнения:

$$x_{t-1} = \frac{q(z^t) - gz^t/(1+i) + x_t}{1+i},$$
$$t = T-1,...,1, x_{T-1} = \frac{q(v) + X_T}{1+i}. \tag{14}$$

В частности, x_0 – полученный ранее эквивалентный критерий.

Теперь ограничения задачи можно записать в виде:

$$0 \le z^{T-1} \le \min\left\{v, L\frac{q(v)+X_T}{1+i+Lg}\right\};$$

$$0 \le z^{t-1} \le$$

$$\le \min\left\{v, z_t, L\frac{q(z^t)-gz^t/(1+i)+x_t}{1+i+Lg}\right\}, \qquad (15)$$

$$t = T-1,...,2,$$

где x_t – решение рекуррентного уравнения (14). Поскольку при сделанных предположениях справа в (14), (15) стоят монотонно неубывающие функции от z_t, то индукцией по $t = T-1,...,1$ устанавливается, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Решение $\bar{z}^t$ задачи, полученное из уравнения (13), мажорирует сверху любое допустимое решение z_t в том смысле, что $z^t \le \bar{z}^t, t = T-1,...,1.$

С учетом леммы 2 отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. В условиях (8) рекуррентное уравнение (13) дает оптимальное решение задачи (4) с дополнительным ограничением (12).

4. УЧЕТ ТЕОРИИ МОДИЛЬЯНИ-МИЛЛЕРА В НОРМЕ ДОХОДНОСТИ

В предположениях теории Модильяни-Миллера [16] и модели стоимости капитальных активов (***CAPM***) [22] стоимость собственного капитала компании использующей заемные средства можно представить в виде:

$$i_t = i(z^t, X_t) = r_f + \beta(1+(1-l)\frac{z_t}{X_t})\Delta r_f\,. \qquad (16)$$

где r_f – безрисковая ставка;

$\Delta r_f = r_m - r_f > 0$ – премия за рыночный риск;

r_m – доходность рыночного портфеля;

$\beta > 0$ – бета-фактор компании, не использующей заемный капитал;

l – предельная ставка налога на прибыль.

Соответственно можно считать, что норма дохода на собственный капитал компании, не использующей заемный капитал равна:

$$i = r_f + \beta\Delta r_f < i_t\,. \qquad (17)$$

Учет теории Модильяни-Миллера в норме дохода компании (16) делает задачу (4) с дополнительным ограничением (12) нелинейной. Вопрос о справедливости леммы 3 о мажоритарности решения $\bar{z}^t$ задачи, полученного из уравнения (13) в нелинейном случае (16) остается пока открытым. В любом случае можно свести нелинейную задачу к дискретной задаче оптимального управления:

$$J([u_t]) = \Phi(X_0, z^0) = X_0 \to \min, \qquad (18)$$

где $[u_t] = (u_T,...,u_1)$ – управление, удовлетворяющее условиям:

$$0 \le u_t \le$$

$$\le \min\left\{v, z_t, L\frac{q(z^t)-gz^t/(1+i)+x_t}{1+i(z^t,X_t)+Lg}\right\} = \qquad (19)$$

$$= U(X_t, z^t), t = T,...,2,$$

а $\{X_t, z^t\}$ – соответствующая фазовая траектория управляемой системы:

$$X_{t-1} = \frac{q(z^t)-gu_t+X_t}{1+i(z^t,X_t)};$$

$$z^{t-1} = u_t;\ t = T,...,1; \qquad (20)$$

с конечными условиями (7), (9).

Совместные ограничения (19) можно снять методом штрафных функций [14], но легче с ними справляется метод динамического программирования. Обозначим через $B_t(X_t, z^t), t = T,...,0,$ соответствующую функцию Беллмана, удовлетворяющую рекуррентному уравнению:

$$B_t(X_t, z^t) =$$

$$= \max_{0 \le u_t \le U(X_t, z^t)} B_{t-1}\left(\frac{q(z^t)-gu_t-X_t}{1+i(X_t,z^t)}, u_t\right); \qquad (21)$$

$$t = 1,...,T;\ B_0(X_0, z^0) = X_0.$$

Заметим, что в силу неравенства (17) справедлива оценка:

$$0 \le u_t \le$$

$$\le \min\left\{v, z_t, L\frac{q(z^t)-gz^t/(1+i)+x_t}{1+i+Lg}\right\} = \qquad (22)$$

$$= \bar{U}(X_t, z^t), t = T,...,2.$$

При этом

$$X_{t-1} < \frac{q(z^t)-gu_t+X_t}{1+i};\ t = T,...,1.$$

Поэтому функцию Беллмана $B_t(X_t, z^t)$ в уравнении (21) достаточно найти при всех X_t, z^t, удовлетворяющих условиям:

$$0 \le z^t \le \bar{z}^t;\ 0 \le X_t \le x_t \le \bar{x}_t;\ t = 1,...,T;$$

где $\bar{z}^t$ – решение задачи, полученное из уравнения (13), а $\bar{x}_t$ – ответствующее ему решение уравнения (14).

5. РЕЖИМ УСТОЙЧИВОГО РОСТА

Исследуем, когда можно опустить z^t в правой части уравнения (13). Подставляя (13) в (10), получаем рекуррентное уравнение для стоимости:

$$X_{t-1} = \frac{q(LX_t)+X_t}{1+i+Lg}, t = T,...,1, \qquad (23)$$

с конечным условием (7), (9).

В частности на последнем участке линейности функции маржинального дохода $q(LX_t) = Q_m^0 + Lk_m X_t$ будет липшицевой с константой $k = k_m$ и функция $F_t(X_t) = F(X_t)$ в правой части (17) является липшицевой с константой:

$$r = \frac{Lk + 1}{1 + i + Lg}. \tag{24}$$

Замечание 2. При условии $k < i / L$ для любого $g \ge 0$ выполнено неравенство $0 < r < 1$ и отображение $F(X)$ является сжимающим.

Таким образом, в условиях замечания 2 отображение $F(X)$ имеет неподвижную точку $X^* = F(X^*)$, к которой сходится процесс (23), представляющий собой арифмо-геометрическую прогрессию со знаменателем меньше единицы. По формуле для ее t -го члена имеем для последнего участка линейности функции маржинального дохода:

$$X_{T-t} = (X_T - X^*)r^t + X^*, \tag{25}$$

что означает, что разность $X_{T-t} - X^*$ убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $r < 1$. В прямом времени получаем соответственно рост с темпом $1 / r - 1 > 0$. При переходе от одного участка линейности темп будет расти в обратном времени, т.е. убывать в прямом времени. Из формулы (25) вытекает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Предположим, что точка LX^* принадлежит последнему участку линейности функции дохода. Тогда для существования режима роста в процессе (23) на последнем участке линейности достаточно, чтобы $X_T > (1+\varepsilon)X^* > 0$, где $\varepsilon > 0$ – параметр. И процесс можно закончить для последнего t_0, при котором $X_{T-t_0} > (1+\varepsilon)X^*$ в этом случае темп роста процесса в прямом времени будет удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{1 + 1/\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - 1\right) \le \frac{X_{T-(t-1)}}{X_t} - 1 \le \frac{1}{r} - 1. \tag{26}$$

Таким образом, если величина LX^*, вычисленная для последнего участка линейности функции дохода, не выйдет за его пределы, то и процесс (23) не покинет этот участок. В противном случае все нужно повторить для следующего участка линейности, отправляясь от достигнутого значения стоимости, как от нового конечного условия.

Замечание 3. Нижняя оценка в (26) справедлива для произвольной неубывающей вогнутой функции дохода, если считать, что $r < 1$ общая константа Липшица функции $q(.)$. Это следует из сжимаемости указанного отображения:

$$0 \le X_{T-t} - X^* = \left|X_{Tt-t} - X^*\right| =$$
$$= \left|\frac{q(LX_{T-(t-1)}) + X_{T-(t-1)} - q(LX^*) - X^*}{1 + i + Lg}\right| \le,$$
$$\le r\left|X_{T-(t-1)} - X^*\right| = r(X_{T-(t-1)} - X^*)$$

откуда следует неравенство:

$$\Delta X_{T-t} = X_{T-(t-1)} - X_{T-t} = (X_{T-(t-1)} - X^*) -$$
$$-(X_{T-t} - X^*) \ge \left(\frac{1}{r} - 1\right)(X_{T-t} - X^*).$$

Отсюда следует искомая оценка:

$$\frac{\Delta X_{T-t}}{X_{T-t}} = \frac{\Delta X_{T-t}}{(X_{T-t} - X^*) + X^*} \ge$$
$$\ge \left(\frac{1}{r} - 1\right) * \frac{1}{1 + \frac{1}{X_{T-t} / X^* - 1}} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - 1\right).$$

Последнее неравенство следует из условия $X_{T-t_0} > (1+\varepsilon)X^*$.

Заметим, что предыдущее неравенство для ΔX_{T-t} выполняется как равенство в случае (25) откуда и получается верхняя (26) оценка леммы 4:

$$\frac{\Delta X_{T-t}}{X_{T-t}} = \frac{\Delta X_{T-t}}{(X_{T-t} - X^*) + X^*} =$$
$$= \left(\frac{1}{r} - 1\right) * \frac{X_{T-t} - X^*}{(X_{T-t} - X^*) + X^*} \le \frac{1}{r} - 1.$$

6. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДОХОДА

Предположим, что фирма обладает монопольной силой. Потребители на этом рынке предполагаются мелкими. Их поведение характеризуется суммарной линейной функцией спроса:

$$D(p) = D - Gp, \tag{27}$$

показывающей, какой объем каждого товара будет куплен при данном векторе цен. Фирма-монополист устанавливает цены на товары p и объемы производства товаров x. Здесь $p = (p_1, p_2, ..., p_n)'$ – вектор-столбец цен $p_j \ge 0$, $D = (D_1, D_2, ..., D_n)'$ – вектор-столбец предельных объемов спроса $D_j > 0$, $G = diag(d)$ – диагональная $n \times n$ -матрица, на диагонали которой стоят коэффициенты $d_j > 0$, $d' = (d_1, d_2, ..., d_n)$ – вектор строка коэффициентов $d_j > 0$.

Предположим, что матрица A имеет хотя бы один ненулевой элемент в каждой строке и столбце, что означает, что каждый товар использует хотя бы один вид ресурсов, и каждый ресурс используется для производства хотя бы одного товара. Тогда множество X допустимых решений задачи (1) будет не пусто и ограниченно. Таким образом, стратегией монополии является пара (p, x). Добавим ограничения, связывающие предельные объемы спроса $D_j > 0, j = 1, 2, ..., n,$ и цены:

$$c_j \le p_j \le P_j = D_j / d_j,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Предположим, что $D > Gc$. Это неравенство эквивалентно условию $c < P$, т.е. не вырожденности задачи с точки зрения фирмы-монополиста.

Поскольку увеличение вектора p или x не уменьшает значения критерия дохода (1), то среди допустимых решений задачи можно выделить множество недоминируемых по Парето решений (p, x) задачи (1). Недоминируемым по Парето называется такое решение (p, x) задачи (1), что не существует другого допустимого решения.

Включение $D(p) \in X$ эквивалентно в силу (1) системе:

$$A(D - Gp) \le b, p \le P. \quad (28)$$

Обозначим через $P = D^{-1}(X)$ множество векторов p, удовлетворяющих условиям (28).

Теорема 2 [21]. Предположим, что $D(c) = D - Gc > 0$. Тогда задача нахождения недоминируемых решений задачи (3) сводится к решению задачи квадратического программирования со связанными переменными:

$$F^* = \max_{p \in P, p \ge c} \langle p - c, D(p) \rangle - C_0. \quad (29)$$

Подобно (3) введем функцию дохода компании $q = q(v)$ после исключения цен из равенства $p = G^{-1}(D - x) = P - G^{-1}x$, положив в (29):

$$q(v) = \max_{x,y} \langle -G^{-1}x + P - c, x \rangle - C_0, \quad (30)$$

где максимум берется при ограничениях:

$$\begin{cases} Ax \le b + y;\ y \ge 0; \\ 0 \le x \le D(c);\ \langle y, e \rangle \le v \end{cases}. \quad (31)$$

В работе [22] было установлено, что функция дохода вогнута и не убывает. При этом начиная с некоторого значения $v = v_1$ она не увеличивается. Это значение можно получить [13] по формуле:

$$v_1 = \sum_{i=1}^{m} e_i (A_i (D - G\frac{c+P}{2}) - b_i)_+$$

где обозначено для краткости:

$$(A_i(D - G\frac{c+P}{2}) - b_i)_+ =$$
$$= \max(A_i(D - G\frac{c+P}{2}) - b_i; 0), i = 1,2,...,m.$$

Пример 1. В модельном примере в [13] в котором были приняты следующие значения экзогенных параметров: $i = 0,186 = 18,6\%$, $g = 0,12 = 12\%$, $L = 0,5$, $v_1 = 230$, была фактически построена кусочно-квадратичная функция дохода:

$$q(v) = -C_0 + \begin{cases} -13,33(1 - 0,01v)^2 + 653,75; \\ v \le v_0 = 44,63; \\ -0,66(1 - 0,0043v)^2 - \\ -5,59(1 - 0,0046v)^2 + \\ +653,75;\ v_0 \le v \le v_1; \\ 653,75;\ v \ge v_1 = 230. \end{cases} \quad (32)$$

где $C_0 = 600$ – постоянные расходы компании.

Предположим, что конечное условие к рекуррентному уравнению инвестиции (23) определяется по формуле Гордона [12]:

$$X_T = (q(v) - gv)(1 + \tau) / (i - \tau) \quad (33)$$

Это предполагает рост дохода в постпрогнозный период с постоянным темпом τ на уровне долгосрочного прогноза инфляции при сохранении достигнутого уровня левериджа L, т.е. постоянной структуры капитала компании.

Для запуска процесса (23) нужно определить объем инвестиций $v = LX_T$ из условия:

$$X_T = (q(v) - gLX_T)(1 + \tau) / (i - \tau),$$

которое приводит к уравнению для X_T:

$$X_T(\frac{i - \tau}{1 + \tau} + gL) = q(LX_T). \quad (34)$$

Лемма 1. Предположим, что $q(0) > 0$, тогда уравнение (34) имеет и притом единственное решение X_T^*.

Действительно, в силу ограниченности функции q величиной $q(v_1)$ при любом X_T, удовлетворяющем условию:

$$X_T > \max(v_1 / L, q(v_1) / (1 + i + Lg)),$$

справедливо неравенство:

$$X_T(\frac{i - \tau}{1 + \tau} + gL) > q(LX_T).$$

Последнее вместе с условием леммы означает, что существует решение X_T^* уравнения (34) удовлетворяющее неравенству:

$$0 < X_T^* < \max(v_1 / L, q(v_1) / (1 + i + Lg)) = \hat{X}_T^*. \quad (35)$$

Единственность решения следует из неубывания функции q и строгого возрастания функции в левой части условия (34).

При этом процесс (23) может нарушать условие $LX_T \le v_1$. В последнем случае уравнение (23) должно иметь вид:

$$X_{t-1} = \frac{q(LX_t) + (1 + L)X_t}{1 + i + L(1 + g)}, t = T,...,1, \quad (36)$$

Это устанавливается, как уравнение (23), но в этом случае положительная разница $z^t - z^{t-1}$ идет на увеличение денежного потока на собственный капитал предприятия. При этом платеж по кредитной линии равен $p_t = z^{t-1}(1 + g) - z^t$. Если ввести функцию

$$L(X_t) = \begin{cases} L, LX_t \ge v_i \\ 0, LX_t < v_1 \end{cases} = L\theta(v_i / L),$$

где $\theta(a)$ – индикаторная функция множества $x \ge a$, то уравнения (23), (36) можно записать единообразно:

$$X_{t-1} = \frac{q(LX_t) + (1 + L(X_t))X_t}{1 + i + L(X_t) + Lg}, t = T,...,1. \quad (37)$$

При этом неподвижная точка X^* у процессов (23), (36) одна и та же и находится из уравнения:

$$X(i + gL) = q(LX). \quad (38)$$

Лемма 2. Предположим, что $q(0) > 0$, тогда уравнение (38) имеет и притом единственное решение X^*, удовлетворяющее неравенству:

$$0 < X^* < X_T^*. \quad (39)$$

Утверждение леммы следует из неравенства:

$$0 < X^*(\frac{i-\tau}{1+\tau}+Lg) < X^*(i+Lg) = q(LX^*),$$

аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 1.

Из уравнений (38), (35) в силу неубывания функции q следует оценка для максимальной величины ε в лемме 4:

$$\varepsilon^* = \frac{X_T^*}{X^*} - 1 = \frac{q(LX_T^*)}{q(LX^*)} \cdot \frac{i+Lg}{\frac{i-\tau}{1+\tau}+Lg} - \qquad (40)$$

$$-1 \geq \frac{1+i}{i+Lg-(1-Lg)\tau}\tau \geq \frac{1+i}{i+Lg}\tau$$

Величина ε^* показывает, на какую долю может быть потенциально увеличена стоимость собственного капитала в результате реализации инвестиционного проекта. В условиях примера 1 получаем, например, что $\varepsilon^* \geq 4,82\tau$, т.е. почти в пять раз больше долгосрочного прогноза инфляции.

Пример 2. Найдем параметры режима роста в условиях примера 1.

Для функции (32) $q(0) = 40,42 > 0$ и условие леммы 1 выполнено. Решая численно уравнения (34), (38) находим $X^* \approx 211,7;$ $X_T^* \approx 263,3;$ $v = LX_T^* \approx 131,8;$ $\varepsilon^* \approx 0,24 = 24\%$. В следующей таблице приведено изменение стоимости собственного капитала компании в режиме устойчивого роста для $t = 0,1,...,9$ в обратном времени. При этом рост за 9 лет в прямом времени составил $19,8\%$, что дает в среднем $2,2\%$ в год.

Таблица 1

РЕЖИМ РОСТА В УСЛОВИЯХ ПРИМЕРА 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_{T-t}	263,30	253,66	245,83	239,47	234,30	230,09	226,67	223,89	221,63	219,79
LX_{T-t}	131,65	126,83	122,91	119,73	117,15	115,05	113,34	111,95	110,81	109,89
$q(LX_{T-t})$	52,76	52,64	52,55	52,47	52,40	52,34	52,30	52,26	52,23	52,20

Для решения уравнений (34), (38) можно воспользоваться методом деления пополам отрезка $[0,\hat{X}_T^*]$, где $\hat{X}_T^*$ была определена в (35). При этом значение функции $q(X_TL)$ на каждом шаге находится при помощи решения задачи (30), (31). Задачу (30), (31) можно решить методом проекции субградиентов, однако этому мешает сложность проектирования на множество допустимых решений задачи. Переходя к двойственной задачи квадратичного программирования в задаче (30), (31) можно получить задачу с более простыми ограничениями чем (31) (см. [13]), для решения которой можно использовать метод сопряженных градиентов. Аналогично определяются значение функции $q(X_TL)$ при решении рекуррентного уравнения (37).

Литература

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику [Текст] / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1984.
2. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №2. – С. 242-247.
3. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №3. – С. 76-84.
4. Брусов П.Н. и др. Стоимость и структура капитала в компании в post Модильяни-Миллеровскую эпоху [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2011. – №37. – С. 2-12.
5. Брусов П.Н. и др. Стоимость и структура капитала в компании в post Модильяни-Миллеровскую эпоху [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2011. – №38. – С. 9-18.
6. Виленский П.Л. и др. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика [Текст] : учеб. пособие / П.Л. Виленский, В.Н. Лифшиц, С.А. Смоляк. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Дело, 2004. – 888 с.
7. Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и методы оценки любых активов [Текст] / А. Дамодаран ; пер. с англ. – 6-е изд. – М. : Альпина Паблишерз, 2010. – 1338 с.
8. Лесик И.А. Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии [Текст] / И.А. Лесик, А.Г. Перевозчиков // Экономика и математические методы. – 2016. – Т. 52 ; №1. – С. 132-140.
9. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] / Deloitte&Touche. – 2005.
10. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. – №42. – С. 2-13.
11. Назаров П.А. Моделирование структуры капитала компании с учетом структуры собственности [Текст] / П.А. Назаров // Финансовая аналитика. – 2014. – №24. – С. 57-65.
12. Оценка бизнеса [Текст] : учеб / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
13. Перевозчиков А.Г. и др. Дифференциальные свойства функции маржинального дохода в линейной модели многопродуктовой монополии [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик, С.Д. Каримов // Аудит и финансовый анализ. – 2016. – №1. – С. 117-121.
14. Перевозчиков А.Г. Нестационарная модель инвестиций в основные средства производства [Текст] / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик // Прикладная математика и информатика : тр. факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова ; под ред. В.И. Дмитриева. – 2014. – №46. – С. 76-88.

15. Перевозчиков А.Г. Простейшая модель инвестиций в основные средства предприятия [Текст] / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – №2. – С. 233-240.
16. Перевозчиков А.Г. Об одном обобщении теории Модильяни-Миллера для нерегулярной модели роста компании [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2013. – №6. – С. 166-169.
17. Перевозчиков А.Г. Об одном обобщении формулы Модильяни-Миллера для стоимости капитала левериджной компании [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2014. – №3. – С. 131-133.
18. Перевозчиков А.Г. Простейшая нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – №3. – С. 291-294.
19. Царьков В.А. Математическая модель инвестиционного проекта с заемным капиталом [Текст] / В.А. Царьков // Финансовая аналитика. – 2014. – №32. – С. 39-45.
20. Царьков В.А. Теория и модели инвестиций [Текст] / В.А. Царьков // Финансовая аналитика. – 2014. – №43. – С. 49-60.
21. Царьков В.А. Теория и модели инвестиций [Текст] / В.А. Царьков // Финансовая аналитика. – 2014. – №44. – С. 12-25.
22. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] : пер. с англ. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли Дж. – М. : ИНФРА-М, 1998. – XII, 1028 с.
23. Bredley M. et al. On the existence of an optimal capital structure [Text] / M. Bredley, G. Jarrell, H. Kim // J. of finance. – 1984.
24. Chen X. Capital structure and ownership structure: two mechanisms of control [Text] / X. Chen // J. of law and economics. – 2007. – 50 p.
25. Gracham J. How big are tax benefits of debt [Text] / J. Gracham // J. of finance. – 2000. – 192 p.
26. Hamada R. Portfolio analysis, market equilibrium and corporate finance [Text] / R. Hamada // J. of finance. – 1969.
27. Lang L. Leverage, investment and firm growth [Text] / L. Lang, E. Ofec // J. of financial economics. – 1996. – No. 1. – 65 p.
28. Masulis R. Optimal capital structure under corporate and personal taxation [Text] / R. Masulis, H. DeAngelo // J. of financial economics. – 1980. – 49 c.
29. Miller M. Dividend policy, grows anl the valuation of shares [Text] / M. Miller, F. Modigliani // J. of business. – No. 34. – 1961.
30. Modigliani F. The cost of capital, corporate finance, end the theory of investment [Text] / F. Modigliani, M. Miller // American economics review. – 1958. – Vol. 48 ; no. 4.
31. Modigliani F. Corporate income taxes and the cost of capital: a correction [Text] / F. Modigliani, M. Miller // American economics review. – 1963. – Vol. 53 ; no. 3.
32. Myers S. Capital structure [Text] / S. Myers // J. economics perspectives. – 2001. – Vol. 15 ; no. 2.
33. Perevozchikov A.G. et al. Business value change forecasting within the mixed discrete-continuous model of jumps based on brown and poisson processes [Text] / A.G. Perevozchikov, A.A. Maltseva, Y.M. Basangov // Actual problems of economy. – 2015. – No. 3. – Pp. 453-466.
34. Sott J. Corporate structure and market structure [Text] / J. Sott // Harvard university press. – 1980. – 350 p.
35. Titman S. The effects of capital structure on the firms liquidation decision [Text] / S. Titman // J. of financial economics. – 1984. – 151 p.
36. Williamson O. Corporate finance and governance structure [Text] / O. Williamson // J. of financial. – 1988. – 56 p.

Ключевые слова

Динамическая модель инвестиций; объемы производства; цены реализации; общие ограничения на ресурсы; оптимальная стратегия; достаточные условия режима устойчивого роста.

Перевозчиков Александр Геннадьевич

Лесик Александра Ильинична

Каримов Саид Джамалудинович

РЕЦЕНЗИЯ

В работе предлагается динамическая нестационарная модель для оптимизации финансирования инвестиций в основные средства предприятия с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Эта модель представляет собой обобщение классической производственной задачи на динамический случай и позволяет сформулировать достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и дать оценки темпов роста. Для квадратичной функции дохода предложен алгоритм проверки достаточных условий, использующий на каждом шаге не более одного значения функции доходности, которое может быть найдено методом субградиентов в двойственной форме задачи.

В предыдущих работах авторов на эту тему было введено понятие линии финансового менеджера, представляющую график зависимости стоимости собственного капитала компании от объема инвестиций в основные средства и получена формула для ее субдифференциала в линейном и квадратичном случае. В настоящей работе субградиенты предлагается использовать для построения итерационной процедуры вычисления функции дохода в предложенном алгоритме проверки существования режима устойчивого роста в динамической модели инвестиций.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, А.И. Лесик и С.Д. Каримова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н., профессор, проректор по научной работе кафедра Бухгалтерского учета, анализа и финансов, Тверская государственная сельскохозяйственная академия, г. Тверь.

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ