3.8. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМИ РЕСУРСАМИ НА ПРИМЕРЕ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ АВТОБУСНОГО ПАРКА[1]

Мищенко А.В., д.э.н., профессор, кафедра Логистики;
Катюхина О.А., ассистент, кафедра Логистики

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ

В статье предлагаются дискретные и стохастические модели управления транспортными ресурсами, оптимизирующие работу городского автобусного парка. Цель статьи – проиллюстрировать применение данных моделей, исходя из критерия минимизации потерь времени на ожидание обслуживания пассажирами и количества пассажиров, ожидающих его больше допустимого времени. Авторы считают, что использование предложенных моделей на практике целесообразно, так как они позволяют повысить качество обслуживания пассажиров.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления транспортными ресурсами в условиях большого города в последние годы становится особенно острой. Это связано с ограниченной пропускной способностью городских магистралей и возрастающим потоком транспортных средств. Это в свою очередь приводит к нелинейному росту затрат при перевозке пассажиров и грузов в городе. В этих условиях приобретают особую актуальность методы организации перевозок, позволяющие наиболее рационально использовать имеющиеся транспортные ресурсы. С учетом этого в данной работе предлагаются модели управления городским пассажирским транспортом с учетом ограничений на существующие транспортные мощности и интенсивности пассажиропотоков.

Одна из таких моделей заключается в том, чтобы распределить ограниченный парк автобусов по конечному числу маршрутов, минимизируя при этом общие потери времени на транспортное обслуживание или минимизируя количество пассажиров, время на транспортное обслуживание которых превышает критическое. Ниже будут приведены математические постановки этих задач.

1. Постановка задачи

В статье рассматривается задача, связанная с наиболее рациональным распределением транспортных средств в количестве n единиц по конечному числу автобусных маршрутов. Будем далее считать, что число маршрутов m меньше, чем количество транспортных единиц n. Через $U^l_{ab}(t)$ обозначим интенсивность поступления пассажиров на остановку α, следующих до остановки β маршрута l ($l = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, 2, \ldots, m_l$; $\beta = 1, 2, \ldots, m_l$ $\beta \neq \alpha$). Здесь m_l – число остановок на автобусном маршруте l.

Обозначим через $q^l_\alpha(t)$ интенсивность обслуживания пассажиров на остановке α маршрута l в момент t. Под интенсивностью обслуживания пассажиров будем понимать интенсивность поступления пассажиров, находящихся на остановке непосредственно в автобус. Определяется $q^l_\alpha(t)$ следующим образом:

$$q^l_\alpha(t) = \begin{cases} 0, \text{если } t \in \left[t^{j1}_{al}; t^{j2}_{al}\right], \\ \dfrac{1}{t^{j2}_{al} - t^{j1}_{al}} \min\left\{V^l_\alpha\left(t^{j2}_{al}\right); B^l_\alpha\left(t^{j2}_{al}\right)\right\}, \\ \text{если } t \in \left[t^{j1}_{al}; t^{j2}_{al}\right], \\ j = 1, 2, \ldots, M. \end{cases} \quad (1)$$

где t^{j1}_{al} – момент прибытия автобуса j на остановку α маршрута l;

t^{j2}_{al} – момент отправления автобуса j с остановки α маршрута l;

M – число автобусов, проходящих через остановку α маршрута l на исследуемом временном интервале (0; T);

$V^l_\alpha\left(t^{j2}_{al}\right)$ – очередь пассажиров на остановке α маршрута l в момент времени t^{j2}_{al}.

Очередь пассажиров $V^l_\alpha(t)$ в любой момент времени $t \in (0; T)$ на остановке α маршрута l определяется путем решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dV^l_\alpha(t)}{dt} = U^l_\alpha(t) - q^l_\alpha(t),$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, m_l,\ l = 1, 2, \ldots, m, \quad (2)$$

где $U^l_\alpha(t)$ – интенсивность поступления пассажиров на остановку α маршрута l в момент t. $U^l_\alpha(t)$ определяется как:

$$U^l_\alpha(t) = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{m_l} U^l_{\alpha\beta}(t), \quad (3)$$

где $B^l_\alpha\left(t^j_{al}\right)$ – это количество свободных мест в автобусе j маршрута l, прибывшего на остановку α после выхода пассажиров на этой остановке. Оно вычисляется по следующей формуле:

$$B^l_\alpha\left(t^j_{al}\right) = W_{авт} - \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{V^{*l}\left(t^{j1}_{kl}\right)}{V^l_k\left(t^{j1}_{kl}\right)} \int_{t^{j1}_{kl}}^{t^{j2}_{kl}} q^l_k(t)\,dt, \quad (4)$$

где $V^{*l}\left(t^{j1}_{kl}\right)$ – объем очереди пассажиров на остановке k маршрута, маршрут которых заканчивается за остановкой α, в момент прибытия автобуса j на эту остановку;

$V^l_k\left(t^{j1}_{kl}\right)$ – объем пассажиров на остановке k маршрута l в момент прибытия автобуса j;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект №16-06-00143а.

$W_{авт}$ - вместимость автобуса; интервал $[t_{kl}^{j1}; t_{kl}^{j2}]$ – это время пребывания автобуса j на остановке k маршрута l. Будем далее считать, что очередь пассажиров на остановке в автобус обслуживается по дисциплине ***FIFO***, т.е. первый пришедший пассажир будет обслужен в первую очередь, последний – в последнюю. Обозначим время ожидания транспортного обслуживания для пассажира, поступившего на остановку α маршрута l через $T_\alpha^l(t)$. В условиях дисциплины ***FIFO*** это время ожидания определяется из следующего соотношения:

$$V_\alpha^l(t) = \int_t^{t+T_\alpha^l(t)} q(t')dt'. \qquad (5)$$

Рассмотрим примеры вычисления $T_\alpha^l(t)$ для различных интенсивностей поступления пассажиров на остановки $U_\alpha^l(t)$ и интенсивностях обслуживания пассажиров $q_\alpha^l(t)$. Пусть интенсивность поступления $U_\alpha^l(t)$ равна одному человеку в минуту. Автобус приходит на остановку α маршрута l через каждые 10 минут, длительность стоянки – 2 минуты, вместимость автобуса – 15 чел. Используя формулу (5), получим функцию $T_\alpha^l(t)$:

$$T_\alpha^l(t) = \begin{cases} 12 - t, если\, t \in [0;12), \\ 24 - t, если\, t \in [12;24), \\ \ldots \\ 12k - t, если\, t \in [12(k-1);12k), \\ k = 1,2,\ldots,K. \end{cases} \qquad (6)$$

График функции $T_\alpha^l(t)$ в этом случае имеет следующий вид (рис. 1).

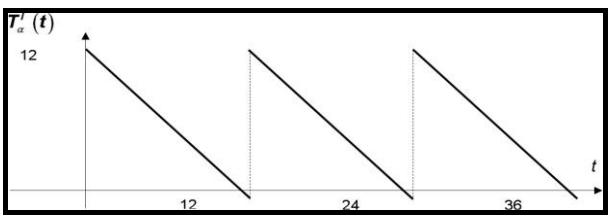

Рис. 1. График функции $T_\alpha^l(t)$ для ситуации, когда все пассажиры обслуживаются первым подошедшим автобусом

Рассмотрим функцию $T_\alpha^l(t)$ для ситуации, когда $U_\alpha^l(t) =$ 2 человека в минуту. В этом случае не все пассажиры будут обслужены первым подошедшим автобусом. График функции $T_\alpha^l(t)$ будет следующим (рис. 2). Функция $T_\alpha^l(t)$ на рассматриваемом отрезке времени $t \in [0;19,5)$ задается следующим образом:

$$T_\alpha^l(t) = \begin{cases} 12 - t, если\, t \in [0;7,5), \\ 24 - t, если\, t \in [7,5;15), \\ 36 - t, если\, t \in [15;22,5). \end{cases} \qquad (7)$$

Очевидно, что если на каком-то интервале времени (τ_1; τ_2) ((τ_1; τ_2) $\subseteq$ (0; T)) $U_\alpha^l(t) > q_\alpha^l(t) \forall t \in$ (τ_1; τ_2)), то возможен рост времени ожидания транспортного обслуживания $T_\alpha^l(t)$. Если же на достаточно длительном интервале (τ_2; T) будет выполняться $U_\alpha^l(t) \le q_\alpha^l(t) \forall t \in$ (τ_1; τ_2)), то характер изменения длительности ожидания транспортного обслуживания будет таким же, как на рис. 1.

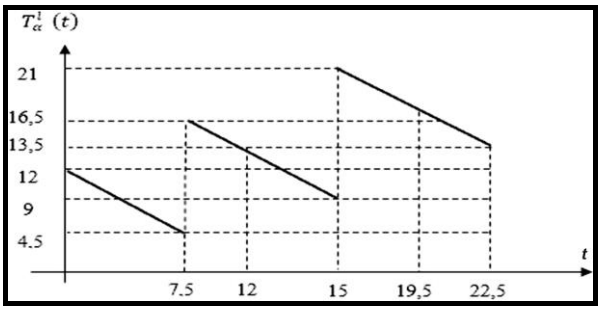

Рис. 2. График функции $T_\alpha^l(t)$ в ситуации интенсивности поступления пассажиров $U_\alpha^l(t) = 2$

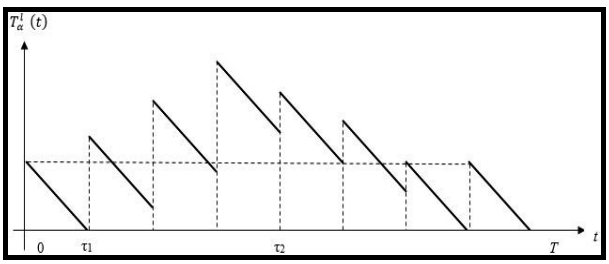

Рис. 3. График функции $T_\alpha^l(t)$ в ситуации, когда $U_\alpha^l(t) \le q_\alpha^l(t)$ (интервал времени (0; τ_1) и интервал (τ_1; τ_2)), и в ситуации, когда $U_\alpha^l(t) > q_\alpha^l(t)$ (интервал времени (τ_1; τ_2))

Проиллюстрировать эту ситуацию можно следующим графиком изменения $T_\alpha^l(t)$ (рис. 3).

Данную ситуацию можно проиллюстрировать с помощью следующего численного примера. Допустим, интенсивность поступления пассажиров на остановки $U_\alpha^l(t)$ сперва составляет 10 чел. за 10 минут, т. е. 1 чел./мин. При этом интервалы между прибытиями автобусов на остановку равен 10 минутам. Количество свободных мест в автобусе в момент прибытия его на остановку равно 10. В таком случае аналогично график обслуживания будет выглядеть идентично графику на рис. 1. Однако если интенсивность поступления пассажиров в какой-то момент времени τ_1 = 10 вырастет, к примеру, до 1,5 чел./мин. (т.е. на интервале длительностью в 10 минут поступит 15 пассажиров), то график функции $T_\alpha^l(t)$ примет вид, представленный на рис. 3. Стоит также отметить, что для того, чтобы график функции снова принял вид, аналогичный представленному на рис. 1, будет недостаточно возврата значе-

ния $U_\alpha^l(t)$ к исходному значению (10 чел./мин.). Для этого необходимо, чтобы в момент времени τ_2 = 40 интенсивность поступления пассажиров упала ниже изначального значения (т.е., например, до 0,5 чел./мин.). Тогда обслуживание будет производиться в штатном режиме сразу после того, как полностью завершится обслуживание пассажиров, составлявших сверхнормативную очередь на остановке (это наступит в момент времени t = 60). При этом максимальное время ожидания транспортного обслуживания равно 20 минут (столько времени обслуживания будут ожидать пассажиры, прибывшие на остановку в момент времени t = 30, поскольку очередь пассажиров на остановке в тот момент уже составит 15 человек). Иллюстрация данной ситуации приведена на рис. 4. Стоит подчеркнуть, что такая ситуация происходит при обслуживании пассажиров по дисциплине ***FIFO***.

Те ситуации, когда время ожидания пассажира зависит только от момента его поступления на остановку внутри временного интервала между приходом на остановку двух автобусов, будем называть устойчивым режимом обслуживания пассажиров, с учетом следующего:

$$\int_0^t U_\alpha^l(t')dt' \le \int_0^t q_\alpha^l(t')dt' \forall t m(0;\tau). \qquad (8)$$

График функции $T_\alpha^l(t)$ для устойчивого режима обслуживания пассажиров приведен на рисунке 4.

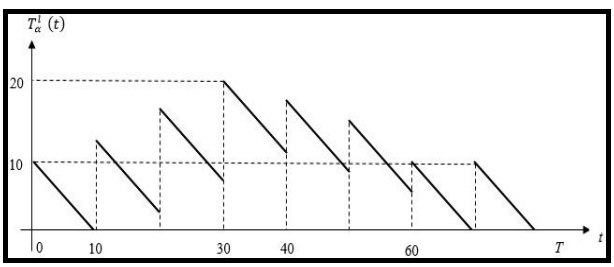

Рис. 4. График функции $T_\alpha^l(t)$ для численного примера, когда $U_\alpha^l(t)$ изменяется с 1 до 1,5 чел./мин. и до 0,5 чел./мин. (неустойчивый режим обслуживания наблюдается на интервале [10; 60])

Неустойчивый режим обслуживания пассажиров имеет место в ситуациях, когда, начиная с некоторого t^* выполняется неравенство:

$$\int_{t^*}^t U_\alpha^l(t')dt' > \int_{t^*}^t q_\alpha^l(t')dt' \forall t \in (t^*;T). \qquad (9)$$

В этом случае наблюдается рост времени ожидания транспортного обслуживания, если пассажиры поступают в момент времени $\tau > t^*$. Характер изменения функции $T_\alpha^l(t)$ изображен на рис. 2.

И, наконец, на рисунке 3 дан график функции $T_\alpha^l(t)$, когда имеет место как устойчивый, так и неустойчивый режим обслуживания пассажиров.

Как следует из формулы (7) неустойчивый режим обслуживания пассажиров характеризуется увеличением времени ожидания транспортного обслуживания. Так, например, если для устойчивого режима обслуживания пассажиров время ожидания транспортного обслуживания для всех пассажиров не более 12 минут (см. рис. 1.), то для неустойчивого режима (см. рис. 2 и формулу (7)) некоторые пассажиры, поступившие на интервале времени $t \in (7{,}5;\ T)$, будут ждать транспортного обслуживания более 12 минут. Графически эта ситуация может быть изображена следующим образом.

Рис. 5. Определение численности поступления пассажиров, время ожидания транспортного обслуживания которых превышает 12 минут

Из рис. 5 видно, что если пассажир потупил в момент $\tau > 7{,}5$, то для определения численности пассажиров, время ожидания обслуживания которых превышает 12 минут, надо решить следующее уравнение: $24 - t = 12$ на интервале времени (7,5; 15). Получим решение $t = 12$. Следовательно, все пассажиры, поступившие на интервале времени (7,5; 15), будут ожидать транспортного обслуживания более 12 минут.

В дальнейшем, начиная с момента времени $t > 15$, все пассажиры также будут ожидать обслуживания дольше 12 минут. Таким образом, если не изменится расписание движения автобусов и интенсивность поступления пассажиров, то пассажиры, поступившие на интервале времени (7,5; 12) и (15; T), будут ожидать обслуживания более 12 минут, если рассматривать функцию $T_\alpha^l(t)$ на интервале ($0;\ T$); $T > 15$.

Далее сформируем одну из оптимизационных задач распределения транспортных средств по маршрутам перевозки пассажиров с учетом введенных ранее обозначений.

$$\min_{a \in A} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_l} \int_0^T T_\alpha^l(a,t) U_\alpha^l(t)dt. \qquad (10)$$

При этом должны соблюдаться следующие ограничения:

$$\sum_{l=1}^{m} a_l = n;\ a_l \ge 1;\ l = 1,\ldots,m; \qquad (11)$$

$$\int_0^{T_1} q_\alpha^l(a,t)dt = \int_0^T U_\alpha^l(t)dt; \qquad (12)$$

$$T_1 \ge T;\ l = 1,2,\ldots,m;\ \alpha = 1,2,\ldots,m_l.$$

В оптимизационной модели (10-12) используются следующие обозначения:

$T_\alpha^l(a,t)$ – время ожидания пассажиром транспортного обслуживания, если пассажир поступил на остановку α маршрута l в момент времени t, при

условии, что распределение автобусов по маршрутам задано вектором $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m})$; $\boldsymbol{U_\alpha^l}(\boldsymbol{t})$ – интенсивность поступления пассажиров на остановку α маршрута $\boldsymbol{l}$ в момент времени $\boldsymbol{t}$.

Таким образом, целевая функция (10) в модели (10-12) задает суммарные потери времени пассажиров на ожидание транспортного обслуживания на всех остановках на интервале времени (***0; T***) при различных допустимых распределениях автобусов по маршрутам, заданным множеством ***A***. Ограничение (11) свидетельствует о том, что количество всех автобусов, распределенных по маршрутам, фиксировано и равно ***m***. Условие (12) означает, что все пассажиры, поступившие на конкретную остановку, должны быть перевезены.

Метод решения задачи (10-12), а также анализ устойчивости решений при изменении таких параметров, как интенсивности поступления пассажиров на остановки, предлагается в работе [1].

Еще один критерий оценки эффективности распределения автобусов по маршрутам – это минимизация количества пассажиров, время ожидания транспортного обслуживания которых превышает некоторое критическое время $\tau_{гр}$ (τ -граничное). На практике превышение $\tau_{гр}$ означает ухудшение качества обслуживания пассажиров, что может привести к выбору пассажиром альтернативного транспортного средства и / или альтернативного маршрута, что, в частности, влечет потерю репутации компании, а также потерю прибыли. Обозначим через $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})$ множество пассажиров, время ожидания которых более $\tau_{гр}$ при распределении автобусов по маршрутам, заданном вектором $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m})$. Соответственно через $|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})|$ обозначим число пассажиров во множестве $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})$. Таким образом, необходимо определить такое распределение автобусов по маршрутам $\boldsymbol{a^* \epsilon A}$, чтобы величина $|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})|$ была минимальной. Иными словами, необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\min_{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}} |\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})|, \qquad (13)$$

где ***A*** – множество всех допустимых распределений автобусов.

$$\sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{a_l} = \boldsymbol{n};\ \boldsymbol{a_l} \geq \boldsymbol{1};\ \boldsymbol{l} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{m}; \qquad (14)$$

$$\int_0^{T_1} \boldsymbol{q_\alpha^l}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = \int_0^{T} \boldsymbol{U_\alpha^l}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}; \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{T_1} \geq \boldsymbol{T};\ \boldsymbol{l} = \boldsymbol{1,2}, \ldots, \boldsymbol{m}; \alpha = \boldsymbol{1,2}, \ldots, \boldsymbol{m_l}.$$

Оптимизационная задача (13-15) является нелинейной целочисленной задачей. При выборе любого распределения $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ определяется интенсивность обслуживания пассажиров $\boldsymbol{q_\alpha^l}(\boldsymbol{t})$ на каждой остановке. Далее может быть сформирована функция $\boldsymbol{T_\alpha^l}(\boldsymbol{t})$ для конечного момента времени ***t*** поступления пассажиров на одну из остановок.

2. Метод решения поставленной задачи

Для решения задачи (13-15) необходимо определить $\boldsymbol{T_\alpha^l}(\boldsymbol{t})$ для каждого момента времени ***t***, связанного с поступлением пассажира на какую-либо остановку. Для этого может быть использована формула (5).

Учитывая трудоемкость полного перебора всех вариантов распределения автобусов по маршруту на множестве ***A***, предпочтительно решать задачу (13-15) с помощью так называемого метода ветвей и границ. Данный метод позволяет отбрасывать заранее неэффективные варианты перераспределения автобусов.

Для этого рассмотрим методы вычисления так называемой верхней, нижней и текущей оценки (параметров, необходимых для применения метода ветвей и границ) при анализе допустимых решений задачи (13-15). При вычислении нижней оценки $\boldsymbol{q_\alpha^l}(\boldsymbol{t})$ назначается исходя из того, что на каждый маршрут выделяется максимально возможное количество автобусов (т.е. ***n – (m – 1)***) и все пассажиры на остановке будут обслужены первым пришедшим на остановку автобусом (автобусы имеют очень большую вместимость). На этом гипотетическом решении определяется количество пассажиров, время ожидание обслуживания которых превышает $\tau_{гр}$. Обозначим эту величину через $|\boldsymbol{\Omega_н}|$. Очевидно, что для любого допустимого распределения ***a**** автобусов по маршрутам будет соблюдаться неравенство $|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a^*})| \geq |\boldsymbol{\Omega_н}|$.

Следовательно, $|\boldsymbol{\Omega_н}|$ будем считать нижней оценкой целевой функции (13) на оптимальном решении.

В качестве верхней оценки выберем значение целевой функции (13) на некотором допустимом решении. Обозначим значение верхней оценки как $|\boldsymbol{\Omega_д}|$. Если получим $|\boldsymbol{\Omega_н}| = |\boldsymbol{\Omega_д}|$, то оптимальное решение получено и оно соответствует решению, на котором число пассажиров, время ожидания которых превышает $\tau_{гр}$, равно $|\boldsymbol{\Omega_д}|$. Если $|\boldsymbol{\Omega_д}| > |\boldsymbol{\Omega_н}|$, то переходим к анализу следующего варианта распределения автобусов по маршрутам, при оценке эффективности которого вычисляются текущие нижние оценки.

Текущие нижние оценки вычисляются для каждого момента поступления пассажиров на остановку. Вычисления текущей нижней оценки для момента времени *t* определяется по следующей формуле:

$$|\boldsymbol{\Omega_н^{тек}}(\boldsymbol{t})| = |\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t})| + |\boldsymbol{\Omega_н}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{T})|, \qquad (16)$$

где $|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t})|$ – число пассажиров, поступивших на интервале $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t})$, у которых время ожидания более $\tau_{гр}$ для анализируемого варианта распределения автобусов по маршрутам; $|\boldsymbol{\Omega_н}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{T})|$ – нижняя оценка количества пассажиров, время ожидания которых

превышает $\tau_{гр}$. При вычислении $|\Omega_н(t,T)|$ предполагается, что все пассажиры на всех остановках на интервале времени (t,T) будут обслужены первым подошедшим автобусом (вместимость автобуса считается неограниченной). Если получим $|\Omega_н^{тек}(t)| \langle |\Omega_д|$, то продолжим анализ эффективности решения для следующего момента времени $t' > t$. Если $|\Omega_н^{тек}(t)| \geq |\Omega_д|$, то текущий вариант распределения отбраковывается, поскольку сформированное решение улучшит значение верхней оценки $|\Omega_д|$.

Анализируя подобным образом каждый вариант распределения автобусов по маршрутам, мы либо его отбраковываем, либо получаем решение, на котором $|\Omega_k| < |\Omega_д|$. В этом случае значение верхней оценки изменим на $|\Omega_k|$, т. е. $|\Omega_k| = |\Omega_д|$.

Если $|\Omega_д|$ стало равно $|\Omega_н|$, то оптимальное решение получено. Им будет решение, значение целевой функции которого равно $|\Omega_k|$. Если $|\Omega_д| > |\Omega_н|$, то продолжаем анализ вариантов распределения автобусов по маршрутам.

Алгоритм метода ветвей и границ заканчивается на этапе, когда либо $|\Omega_д|$ после очередной корректировки становится равным $|\Omega_н|$, либо после того, как проанализированы все варианты распределения автобусов по маршрутам. В последнем случае в качестве оптимального решения выбирается то, которое соответствует последнему значению $|\Omega_д|$.

В оптимизационных моделях (10-12), (13-15) предполагалось, что при обслуживании пассажиров использовалась дисциплина ***FIFO***. Время ожидания пассажиром транспортного обслуживания определялось в этом случае с использованием формулы (5). В том случае, если используется дисциплина обслуживания ***LIFO*** («последний пришел – первым обслужен»), то для расчета времени ожидания транспортного обслуживания пассажира, поступившего в момент t на остановку α маршрута l ($l = 1,2,\ldots,m; \alpha = 1,2,\ldots,m_l$) может быть использован следующий подход.

Пусть в момент времени t последний пассажир на интервале времени (τ_1; τ_2), где τ_1 – момент поступления предыдущего автобуса на остановку ($t > \tau_1$), τ_2 – момент поступления последнего автобуса на остановку ($t \leq \tau_2$). Тогда очевидно, что время ожидания пассажира, поступившего в момент t, будет равно:

$$\int_{t}^{t+T_\alpha^l(t)} q_\alpha^l(t')dt' = 1, \qquad (17)$$

где $T_\alpha^l(t)$ – время ожидания пассажира, поступившего в момент времени t на остановку. Время ожидания пассажира непосредственно предшествующего пассажиру, поступившему в момент t, будет равно:

$$\int_{t}^{t+T_\alpha^l(t^*)} q_\alpha^l(t')dt' = 2, \qquad (18)$$

где t^* – время поступления пассажира, предшествующего пассажиру, поступившему в момент t ($t^* < t$); $T_\alpha^l(t^*)$ – время ожидания обслуживания этого пассажира, в случае, если за время $(t;\ t+T_\alpha^l(t^*))$ на остановку не поступит очередной пассажир. Если же на данном интервале времени поступит еще один пассажир, то в первую очередь, согласно дисциплине ***LIFO***, обслужен будет именно он.

Рассмотрим пример использования формулы (17) при определении времени ожидания пассажиром транспортного обслуживания с использованием дисциплины ***LIFO***. Исходные данные и результаты расчетов времени ожидания транспортного обслуживания приведены в табл. 1.

Таблица 1

ДИНАМИКА ОЧЕРЕДИ ПАССАЖИРОВ, ОЖИДАЮЩИХ ТРАНСПОРТНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Значение	Показатель						
Время, мин.	10	20	30	40	50	60	70
Количество поступивших пассажиров	10	10	10	1	1	1	1
Количество обслуженных пассажиров	5	5	5	5	5	5	4
Количество пассажиров, ожидающих транспортного обслуживания	5	10	15	11	7	3	0

В табл. 1 отражена ситуация, когда средняя интенсивность поступления пассажиров составляет в первые 30 минут 1 чел. в минуту, и далее за последующие 40 минут падает до 1 чел. за 10 минут. Используя формулу (17), а также учитывая то, что количество пассажиров в очереди в момент t рассчитывается по формуле (19), получим, что все пассажиры, поступившие в течение первых 10 минут, будут обслужены в момент времени t = 70.

$$V(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(U(t') - q(t')\right)dt'. \qquad (19)$$

Следовательно, время ожидания пассажиров, поступивших в момент времени $t = 1$, составит 69 минут.

3. Стохастическое задание параметров модели

Рассмотрим ситуацию, когда интенсивность поступления пассажиров $U_\alpha^l(t)$ – это случайная функция с заданным дискретным распределением вероятностей, т. е.

$$U_\alpha^l(t) = \begin{cases} U_{\alpha 1}^l(t) - p_1 \\ U_{\alpha 2}^l(t) - p_2 \\ \ldots \\ U_{\alpha M}^l(t) - p_M; \end{cases} \qquad (20)$$

$$l = 1,2,\ldots,m; \alpha = 1,2,\ldots,m_l, p_j \geq 0, \sum_{j=1}^{M} p_j = 1.$$

В этом случае при решении задачи (13-15) можно использовать математическое ожидание интенсивности поступления пассажиров:

$$\overline{U_\alpha^l}(t) = \sum_{j=1}^{M} U_{\alpha j}^l(t) * p_j, \qquad (21)$$

где $\overline{U_\alpha^l}(t)$ – математическое ожидание интенсивности поступления пассажиров на остановку α маршрута l.

Можно оценить каждое распределение автобусов по маршрутам ($a \in A$) как с точки зрения математического ожидания функционала (13), так и с точки зрения значения функционала (13) для различных реализаций $U_\alpha^l(t)$ $(U_{\alpha 1}^l(t), \ldots, U_{\alpha M}^l(t))$. В последнем случае можно рассчитать значения функционала (13) для каждого распределения автобусов по маршрутам и каждого набора интенсивностей поступления пассажиров на остановки $U_{\alpha j}^l(t)$ $(l = 1,2,\ldots,m; \alpha = 1,2,\ldots,m_l, j = 1,2,\ldots,M)$. Обозначим соответствующие значения функционала (13) через $F_j(a)$. Тогда каждое распределение автобусов по маршрутам $a \in A$ можно охарактеризовать двумя параметрами.

1. Математическое ожидание функционала (13), которое рассчитывается по следующей формуле:

$$\bar{F}(a) = \sum_{j=1}^{M} F_j(a). \qquad (22)$$

2. Дисперсия значений функционала (13), которую можно принять за количественную оценку риска распределения автобусов по маршрутам. Она вычисляется по следующей формуле:

$$R(a) = \sum_{j=1}^{M} (\bar{F}(a) - F_j(a))^2 * p_j. \qquad (23)$$

Таким образом, задача (13) – (15) распределения транспортных ресурсов по автобусным маршрутам в ситуации, когда интенсивности поступления пассажиров заданы как случайные функции, может быть рассмотрена как двухкритериальная. При этом первым критерием является математическое ожидание числа пассажиров, время ожидания которых превысит критическое, а вторым – риск данного распределения автобусов по маршрутам, определяемый как дисперсия количества пассажиров, время ожидания которых превышает критическое ($\tau_{кр}$).

Выше была рассмотрена ситуация, когда интенсивность поступления пассажиров была задана как случайная функция. В то же время с учетом загруженности городских транспортных магистралей, в особенности, в часы пик, график движения автобусов по маршрутам не может быть выдержан точно. Следовательно, и интенсивность обслуживания пассажиров $q_\alpha^l(t)$ также носит стохастический характер. С учетом этого можно сказать, что в общем случае и интенсивность обслуживания, и интенсивность поступления пассажиров заданы как случайные процессы.

Далее будем считать, что $U_\alpha^l(t) = U_{\alpha 1}^l(t)$, $q_\alpha^l(t) = q_{\alpha 1}^l(t)$ с вероятностью p_1, $U_\alpha^l(t) = U_{\alpha 2}^l(t)$, $q_\alpha^l(t) = q_{\alpha 2}^l(t)$ с вероятностью p_2, …., $U_\alpha^l(t) = U_{\alpha M}^l(t)$, $q_\alpha^l(t) = q_{\alpha M}^l(t)$, с вероятностью p_M.

Как отмечалось выше, в этом случае интенсивность поступления пассажиров и интенсивность их обслуживания определяется как:

$$\overline{U_\alpha^l}(t) = \sum_{j=1}^{M} U_{\alpha j}^l(t) * p_j; \quad \overline{q_\alpha^l}(t) = \sum_{j=1}^{M} q_{\alpha j}^l(t) * p_j; \qquad (24)$$

$$l = 1,2,\ldots,m; \alpha = 1,2,\ldots,m_l.$$

Далее задачу (13-15) можно решать при условии, что интенсивности поступления пассажиров заданы как $\overline{U_\alpha^l}(t)$ и интенсивности обслуживания пассажиров – как $\overline{q_\alpha^l}(t)$, выбирая такое распределение автобусов по маршрутам, которое минимизировало бы функционал (13), соблюдая ограничения (14-15). Еще одним показателем выбранного распределения автобусов по маршрутам является волатильность значения функционала (13) при различных значениях $U_{\alpha j}^l(t)$ и $q_{\alpha j}^l(t)$. Этот показатель можно считать количественной оценкой риска для заданного распределения $a \in A$ по маршрутам городского пассажирского транспорта. Обозначим через $F_j(a)$ значение функционала (13) при интенсивностях обслуживания и поступления пассажиров $U_{\alpha j}^l(t)$ и $q_{\alpha j}^l(t)$. Получим количественную оценку риска для данного распределения автобусов по маршрутам как следующую величину:

$$\omega(a) = \sum_{j=1}^{M} (F_j(a) - \bar{F}(a))^2 * p_j, \qquad (25)$$

где $\omega(a)$ – количественная оценка риска распределения автобусов $a \in A$, $\bar{F}(a)$ – математическое ожидание функционала (13) для распределения $a \in A$ автобусов по маршрутам.

4. Анализ устойчивости решений

Выше был рассмотрен метод решения задачи (13-15) в ситуации, когда такие параметры модели, как интенсивность поступления пассажиров, интервалы времени между поступлениями автобусов на остановку, вместимость транспортных средств и другие заданы детерминированно. В то же время лицо, принимающее решения (ЛПР), нередко интересует, как повлияет на изменение значения функционала (13) изменение перечисленных параметров. Иными словами, важно знать, насколько устойчиво полученное решение к воздействиям изменения значений перечисленных параметров. Для анализа влияния таких отклонений введем понятие устойчивости решения.

Определение 1. Будем считать, что решение задачи (13-15) устойчиво по интенсивности поступления пассажиров на остановки, если существует такое $\xi > 0$, что при увеличении интенсивностей $U_\alpha^l(t)$ на величину ξ значение функционала (13) не изменится.

Определение 2. Задача (13-15) устойчива по количеству свободных мест в автобусе, если существует такое $\delta > 0$, что при уменьшении количества свободных мест при прибытии каждого автобуса на каждую остановку не более, чем на величину δ, оптимальное решение задачи (13-15) сохранится.

Определение 3. Задача (13-15) устойчива по длительности интервалов между поступлениями двух автобусов, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при увеличении всех интервалов между поступлениями автобусов на всех остановках не более, чем на величину ε, решение задачи (13-15) не изменится.

Сформулированные определения в некотором смысле характеризуют так называемый закон прочности предполагаемого решения, если ситуация изменится в худшую сторону.

Ниже будут сформулированы достаточные условия по каждому из трех параметров.

Задача (13-15) устойчива по интенсивности поступления пассажиров на остановки, если выполняется следующее условие:

$$W_{i\alpha}^{l} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} U_{\alpha}^{l}(t)dt > 0\ ; \qquad (26)$$

$$i = 1,2,\ldots,T, = 1,2,\ldots,m; \alpha = 1,2,\ldots,m_l\ .$$

Доказательство. Решим нижеприведенное уравнение относительно $\Delta_{i\alpha}^{l}$ для всех значений t_i. Выберем $\Delta = \min_{i=1,T} \min_{\alpha=1,m_l} \min_{l=1,m} \Delta_{i\alpha}^{l}$.

$$W_{i\alpha}^{l} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (U_{\alpha}^{l}(t) + \Delta_{i\alpha}^{l})dt = 0\ . \qquad (27)$$

Так как $\Delta > 0$, отсюда следует устойчивость решения.

Задача (13-15) устойчива по количеству свободных мест в автобусе, если выполняется условие (26).

Доказательство. Выберем в качестве δ величину, определяемую по следующей формулировке:

$$\delta = \min_{i=1,T} \min_{\alpha=1,m_l} \min_{l=1,m} \{W_{i\alpha}^{l} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} U_{\alpha}^{l}(t)dt\}\ . \qquad (28)$$

С учетом соотношения (26) $\delta > 0$, откуда следует устойчивость решения.

Задача (13) – (15) устойчива по длительности интервалов между поступлениями двух автобусов, если выполняется условие (26) и $t_{i+1} - t_i < \tau_{гр}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, T$.

Доказательство. Выберем ε по правилу $\bar{\varepsilon} = \min_{i=1,T}\{\tau_{гр} - (t_{i+1} - t_i)\}$. Выберем $\varepsilon = \min\{\bar{\varepsilon}, \delta, \Delta\}$.

Очевидно, что если $\varepsilon > 0$, то из вышенаписанного следует устойчивость решения задачи распределения автобусов по маршрутам (13-15).

5. Примеры использования динамических моделей управления транспортом

В данном разделе статьи рассматриваются численные примеры использования описанных в предыдущих разделах моделей. Приводятся примеры моделей (10-12), (13-15) и стохастическая модель управления транспортными ресурсами при различных сценариях развития событий. Расчеты производятся с помощью программного обеспечения MS Excel.

В качестве маршрутов, по которым распределяются автобусы, будут рассматриваться маршруты №7, 46, 59, 83, 131, находящиеся в ведении 2-го автобусного парка (ниже им будут присвоены номера 1-5 соответственно), обслуживающие население города Москвы в Восточном административном округе (ВАО). Данные маршруты проходят через такие районы, как Соколиная Гора, Перово и Измайлово. Характерной особенностью транспортной инфраструктуры этого региона является большое количество так называемых узких мест, затрудняющих движение наземного транспорта, а также неравномерная плотность транспортной сети, обусловленная расположением в ВАО крупного лесопарка и неравномерной концентрацией населения на территории вышеперечисленных районов.

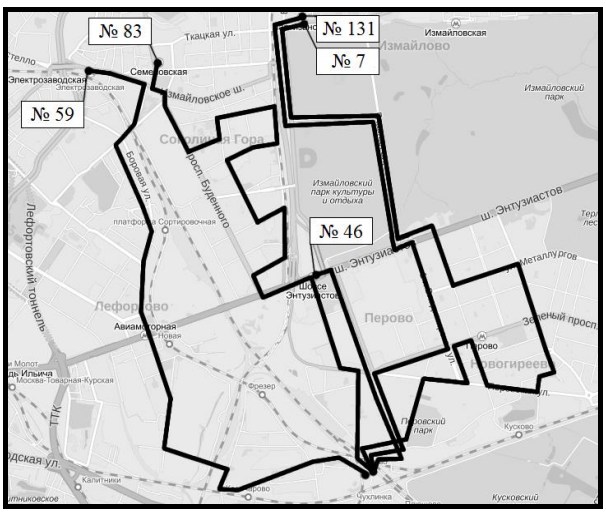

Рис. 6. Карта автобусных маршрутов в рассматриваемых районах ВАО (номера маршрутов приведены в выносках) [2-6]

Главной веткой метро, обслуживающей рассматриваемую часть ВАО, является Арбатско-Покровская линия Московского метрополитена, а также, помимо нее, часть населения обслуживает Калининская линия. Ввиду их протяженности с запада на восток возникает необходимость обеспечить доступ к ним с помощью наземного транспорта. Огромную роль в этом играют автобусные маршруты, используемые в данной статье в качестве примера. Часть пассажиров при этом может быть обслужена еще и электричками, но их роль несущественна в рассматриваемом регионе.

Рассматриваемые в статье автобусные маршруты обслуживаются примерно 100 автобусами в сутки в совокупности. На этих маршрутах обслуживается в сутки в среднем 20% населения округа, т. е. 253 040 чел. (с учетом поездок в обратную сторону). Карты маршрутов и параметры пассажиропотоков на некоторых маршрутах по остановкам в штатной ситуации представлены на рис. 6 и в табл. 2-4 соответственно

(таблицы составлены на основании источников [2] - [6], ввиду их громоздкости и однообразия в статье приведены не все использованные при расчетах данные). Допустим, что необходимо распределить 100 автобусов по данным маршрутам так, чтобы количество пассажиров, время ожидания обслуживания которых превышает $\tau_{гр}$, было минимальным.

Следовательно, стоит рассмотреть приведенные в статье модели по очереди и решить задачу в рамках этих моделей. В данном случае соблюдено условие, что число маршрутов меньше, чем число транспортных средств (***n > l***). Также стоит обратить внимание на то, что виду специфики транспортной инфраструктуры района значительная доля пассажиров не имеет возможности изменить маршрут следования, не прибегая к услугам такси, так как поблизости ко многим остановкам не расположено станций метро и нет маршрутов других видов наземного городского транспорта), а это значит, что в случае задержки автобуса очереди на остановках будут существенно расти. Перечисленные выше автобусные маршруты являются соединительными транспортными артериями рассматриваемых районов.

Таблица 2

ИНТЕНСИВНОСТИ ПОСТУПЛЕНИЯ ПАССАЖИРОВ НА ОСТАНОВКИ МАРШРУТА №46 ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЦЕНАРИЕВ РАЗВИТИЯ СОБЫТИЙ

№	Название остановки	Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (наиболее вероятный сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (пессимистический сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (оптимистический сценарий) и направление	
		прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное
1	Станция «Перово»	2,8	0,0	3,5	0,0	2,1	0,0
2	Кусковская ул.	2,2	2,0	2,7	2,5	1,6	1,5
3	Ул. Плеханова, 22	2,6	2,9	3,3	3,7	2,0	2,2
4	Перовская ул.	2,0	2,0	2,5	2,5	1,5	1,5
5	Вентиляторный завод	2,4	2,4	3,0	3,0	1,8	1,8
6	Ж/д переезд	2,8	2,2	3,5	2,8	2,1	1,7
7	Завод ЖБИ №11	1,8	1,6	2,2	2,0	1,3	1,2
8	Ж/д переезд	2,0	2,4	2,5	3,0	1,5	1,8
9	Метро «Шоссе Энтузиастов»	0,0	2,0	0,0	2,5	0,0	1,5

Таблица 3

ИНТЕНСИВНОСТИ ПОСТУПЛЕНИЯ ПАССАЖИРОВ НА ОСТАНОВКИ МАРШРУТА №7 ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЦЕНАРИЕВ РАЗВИТИЯ СОБЫТИЙ

№	Название остановки	Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (наиболее вероятный сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (пессимистический сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (оптимистический сценарий) и направление	
		прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное
1	Метро «Партизанская»	2,2	0,0	2,8	0,0	1,7	0,0
2	Мост Окружной ж/д	2,0	1,8	2,6	2,3	1,5	1,4
3	1-я ул. Измайловского Зверинца	1,9	2,0	2,4	2,5	1,4	1,5
4	Измайловский парк	2,0	2,0	2,5	2,6	1,5	1,5
5	Детский городок	2,0	1,9	2,5	2,4	1,5	1,4
6	Главная аллея	1,2	1,2	1,5	1,5	0,9	0,9
7	Кинотеатр «Слава»	2,0	1,8	2,5	2,2	1,5	1,3
8	Гомеопатический центр	2,1	2,1	2,7	2,7	1,6	1,6
9	Ул. Металлургов	1,6	1,6	2,1	2,0	1,2	1,2
10	3-я Владимирская ул.	2,4	2,4	3,0	3,0	1,8	1,8
11	Новогиреевская ул.	2,0	2,0	2,6	2,6	1,5	1,5
12	Федеративный пр-т	2,4	1,6	3,0	2,0	1,8	1,2
13	Детский универмаг	2,0	2,2	2,6	2,7	1,5	1,6
14	Кинотеатр «Берёзка»	3,5	1,8	4,4	2,3	2,6	1,4
15	Полимерная ул.	2,4	2,2	3,0	2,8	1,8	1,7
16	Ул. Новотетёрки	2,2	2,8	2,7	3,6	1,6	2,1
17	Перовская ул., 60	0,4	2,2	0,5	2,7	0,3	1,6
18	2-я Владимирская ул.	3,2	3,4	4,0	4,2	2,4	2,5
19	Метро «Перово»	2,2	2,7	2,8	3,4	1,7	2,0
20	Зелёный пр-т	2,0	2,2	2,5	2,7	1,5	1,6
21	Аптека	0,4	1,8	0,5	2,3	0,3	1,4

№	Название остановки	Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (наиболее вероятный сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (пессимистический сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (оптимистический сценарий) и направление	
		прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное
22	Перовский универсам	2,0	2,5	2,6	3,1	1,5	1,9
23	Кинотеатр «Владивосток»	2,0	1,9	2,5	2,4	1,5	1,5
24	Ул. Лазо	1,8	1,7	2,3	2,1	1,4	1,2
25	Станция «Перово»	0,0	2,0	0,0	2,5	0,0	1,5

Здесь приведена интенсивность поступления пассажиров (табл. 3), структура которой соответствует поставленной в статье задаче. Поскольку автобусы движутся в двух направлениях, вводятся две графы для обозначения прямого и обратного направления. Заранее введены три двойных столбца для обозначения различных сценариев развития событий (это будет использовано при расчетах для стохастической модели управления транспортными ресурсами). Для моделей (10-12) и (13-15) будут использоваться данные из столбца с пометкой «Наиболее вероятный сценарий» в заголовке.

Таблица 4

ИНТЕНСИВНОСТИ ПОСТУПЛЕНИЯ ПАССАЖИРОВ НА ОСТАНОВКИ МАРШРУТА №131 ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЦЕНАРИЕВ РАЗВИТИЯ СОБЫТИЙ

№	Название остановки	Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (наиболее вероятный сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (пессимистический сценарий) и направление		Интенсивность поступления пассажиров на остановку, чел./мин. (оптимистический сценарий) и направление	
		прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное
1	Станция метро «Партизанская»	3,1	0,0	3,8	0,0	2,3	0,0
2	Мост Окружной ж/д	2,4	2,2	3,0	2,8	1,8	1,7
3	1-я ул. Измайловского Зверинца	2,9	3,2	3,6	4,0	2,2	2,4
4	Измайловский парк	2,2	2,2	2,8	2,8	1,7	1,7
5	Детский городок	2,6	2,6	3,3	3,3	2,0	2,0
6	Главная аллея	3,1	2,4	3,9	3,0	2,3	1,8
7	Кинотеатр «Слава»	1,9	1,8	2,4	2,2	1,5	1,3
8	Спортклуб «Луч»	2,2	2,6	2,8	3,3	1,7	2,0
9	Ул. Металлургов	3,5	3,9	4,4	4,8	2,6	2,9
10	Дворец творчества молодёжи	2,6	2,6	3,3	3,3	2,0	2,0
11	Зелёный проспект	3,2	3,2	4,0	4,0	2,4	2,4
12	1-й пр-д Перова Поля	3,7	2,9	4,6	3,6	2,8	2,2
13	Ул. Плеханова	2,3	2,1	2,9	2,6	1,7	1,6
14	Перовская ул.	2,6	3,2	3,3	4,0	2,0	2,4
15	Ул. Плеханова, 22	2,1	2,5	2,6	3,2	1,6	1,9
16	Кусковская ул.	1,7	2,0	2,1	2,5	1,3	1,5
17	Станция «Перово»	0,0	1,6	0,0	2,0	0,0	1,2

Далее следует перейти к разбору условий и ограничений для численных примеров.

Даны следующие условия задачи:

$$n = 100;\ l = 1,2,\ldots,5;$$

$$m_1 = 25, m_2 = 9, m_3 = 30, m_4 = 25, m_5 = 17.$$

Интервал времени $t \in (0;T)$ определяется как трехчасовой промежуток времени с 07:30 до 10:31 (утренний час пик). Обслуживание пассажиров производится с помощью автобусов марки ЛиАЗ-5292, пассажировместимость которых $(W_{авт})$ будем считать равной 92 чел., что предполагается на основе данных из источника [7]. $U^{l}_{\alpha\beta}(t)$ приведены в соответствующих табл. 2-4. Интервал движения автобусов на всех маршрутах примем за 20 минут. Тогда под моментом времени t, когда автобусы будут прибывать на остановки, будут подразумеваться следующие моменты: 07:30, 07:50, 08:10, 08:30, 08:50, 09:10, 09:30, 09:50, 10:10, 10:30. В дальнейшем для простоты момент времени 07:30 будет принят за 0, а исчисление времени по временной оси будет производиться в минутах. Время стоянки автобуса на остановке равна одной минуте. Один автобус, выехав на маршрут, успевает за указанный промежуток времени доехать до конечной остановки. Будем считать, что остановки в обоих направлениях имеют одинаковые названия и что количество остановок на обоих направлениях у каждого маршрута одинаковое. Также для упрощения задачи примем, что на обоих направлениях интенсивности поступления пассажиров на одну и ту же остановку одинаковые. В условиях применения предлагаемого в статье метода на практике диспетчерский центр будет использовать собранные в режиме реального времени данные о пассажиропотоках рассматриваемых маршрутов, что ввиду использования машинной об-

работки данных, будет не столь трудоемко, в отличие от данной статьи.

Очевидно, что $q_\alpha^l(t)=0$ на всем интервале времени от 07:30 до 10:31, кроме входящих в него интервалов [07:30, 07:31], [07:50, 07:51], …, [10:30, 10:31]. На каждом из этих десяти интервалов $q_\alpha^l(t)$ определяется как $min\left\{V_\alpha^l\left(t_{al}^{j2}\right);B_\alpha^l\left(t_{al}^{j2}\right)\right\}$ (так как время стоянки автобуса = 1 минута). Имеется в виду, что обслуживаются либо все имеющиеся на остановке пассажиры, либо только такое количество пассажиров, для которого хватит места в автобусе, в случае, если свободных мест в нем меньше, чем пассажиров в очереди на остановке. В часы пик чаще всего складывается именно последняя ситуация. В результате этого очередь пассажиров на остановках маршрутов начинает возрастать. При этом необходимо так или иначе обслужить всех поступивших на остановки пассажиров. В MS Excel данная формула реализуется посредством построения функции «ЕСЛИ».

Стоит также обратить внимание на связь между географическим расположением маршрута и интенсивностями поступления пассажиров $U_\alpha^l(t)$. Так, например, маршрут №7 менее загружен, чем маршрут №83, так как маршрут №7 проходят через малонаселенную часть рассматриваемого округа. Также загруженность маршрута зависит от его протяженности. Так, например, загруженность маршрута №131 выше, чем у маршрута №7, несмотря на то, что они расположены в одном и том же регионе (причина – различная протяженность этих маршрутов).

Для облегчения решения задачи с помощью метода ветвей и границ во всех трех моделях необходимо эвристически сократить количество заранее проигрышных ветвей дерева решений (вариантов распределения автобусов по маршрутам), чтобы избежать необходимости рассматривать их при использовании алгоритма метода ветвей и границ. Подобные упрощения рекомендуется применять и при организации работы диспетчерского центра: они позволяют существенно уменьшить количество выполняемой диспетчерами и компьютерами вычислительной работы. Для этого необходимо наложить следующие дополнительные ограничения на модель.

1. Не имеет смысла рассматривать варианты распределения, когда остаются неиспользованными некоторые автобусы (необходимо распределить именно все 100 автобусов). Поскольку резерв автобусов на случай сбойных ситуаций не входит в распределяемое в штатной ситуации множество автобусов, не имеет смысла оставлять в парке ни одного автобуса из 100 распределяемых.
2. Заранее невыгодны распределения, где на каком-либо из маршрутов работает менее 10 автобусов на обоих направлениях (тогда интервалы между поступлениями автобусов на остановку превысят 20 минут, что недопустимо исходя из нецелесообразности ожидания автобусов в штатной ситуации в течение большего периода времени (т.е. когда интенсивности поступления пассажиров на остановки не превышают интенсивности обслуживания пассажиров автобусами).

Таким образом, задача распределения 100 автобусов сводится к распределению 50 автобусов по пяти маршрутам, на каждом из которых уже циркулирует по 10 автобусов. Поставленная задача предполагает выбор конкретной ветви дерева решений, представляющего из себя полный перебор вариантов распределения данного количества автобусов по маршрутам. Очевидно, что из данного множества распределений нельзя взять любое произвольное, поскольку тогда возможно увеличение потерь времени на ожидание транспортного обслуживания на одном или нескольких маршрутах, а эвристически или интуитивно на данном подмножестве распределений автобусов определить наиболее приемлемое уже не представляется возможным. Из этого следует, что для нахождения оптимального решения нужно воспользоваться методом ветвей и границ.

Далее рассмотрим на численных примерах описанные в статье модели управления транспортными ресурсами. Будем считать, что в рамках примеров пассажиры обслуживаются по дисциплине ***FIFO***.

Пример использования модели (10-12)

В данном случае рассматривается задача минимизации суммарных потерь времени на ожидание транспортного обслуживания пассажирами. С учетом приведенных выше условий численного примера можно составить следующую схему (пусть интенсивность поступления пассажиров на конкретную остановку = 1 чел./мин.):

$$T_\alpha^l(t)=\begin{cases} 21-t, \text{если } t\in[0;21), \\ 42-t, \text{если } t\in[21;42), \\ \dots \\ 21k-t, \text{если } t\in[21(k-1);21k), \\ k=1,2,\dots,10. \end{cases} \qquad (29)$$

Из этой схемы можно вычислить время ожидания транспортного обслуживания одного пассажира.

В случае увеличения интенсивности поступления пассажиров интервалы, на которых определяются кусочки данной линейной функции, изменятся в зависимости от соотношения интенсивности поступления пассажиров и интенсивности их обслуживания.

Рассчитать значения суммарных потерь времени на ожидание транспортного обслуживания в штатной ситуации можно, перемножив интенсивности поступления пассажиров на каждой остановке и сумму чисел от 1 до 20, и сложив получившиеся значения по всем остановкам и маршрутам. Если же вместимость автобуса меньше, чем очередь пассажиров на остановке, то их время ожидания увеличится в лучшем случае на 20 минут, что можно также формализовать в MS Excel при помощи функции «ЕСЛИ».

График функции $T_\alpha^l(t)$ имеет следующий вид (в штатной ситуации, $U_\alpha^l(t)=1$):

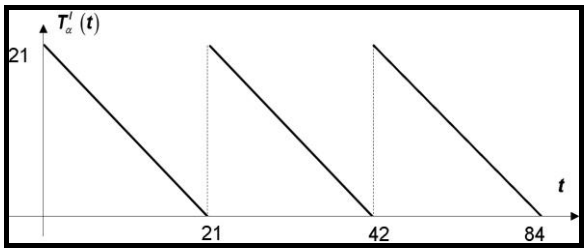

Рис. 7. График функции $T_\alpha^I(t)$ для ситуации, когда все пассажиры обслуживаются первым подошедшим автобусом (вместимость автобуса не меньше очереди пассажиров на остановке)

Перейдем к детальному рассмотрению численного примера в рамках модели (10-12).

Этап 1. За произвольно взятое распределение 50 автобусов по пяти маршрутам сверх 50 поровну распределенных, возьмем распределение *a* = (10; 10; 10; 10; 10) для получения так называемого рекорда (значения потерь времени на ожидание транспортного обслуживания, превышать которые оптимальное решение не может). Любая ветвь дерева решений, приводящая к потерям большим, нежели этот вариант, уже не может быть оптимальной. Для данного распределения получаем значение целевого функционала (10), равное 3 929 064 минуты (по всем остановкам всех маршрутов в обоих направлениях суммарно пассажиры будут ожидать именно столько минут). Очевидно, что данное решение не является оптимальным, так как оно не учитывает различий в загруженности и протяженности маршрутов, а это означает, что на части маршрутов будут скапливаться очереди на остановках, пока на остальных маршрутах будут циркулировать автобусы, заполненные не полностью. Необходимо перебрать оставшиеся ветви дерева решений, чтобы найти ответ к поставленной задаче. Это будет производиться путем пересчета текущих оценок в разные моменты времени ***t*** при помощи программного обеспечения MS Excel. Ввиду громоздкости и однообразности производимых вычислений, они выносятся за пределы статьи. Подобнее с механизмом вычисления текущей оценки можно ознакомиться в работе [1].

Этап 2. Вычисление текущей оценки. Ее вычисление производится по принципу суммирования накопленных к рассматриваемому моменту времени ***t*** потерь на ожидание обслуживания с наименьшими возможными потерями, которые могут накопиться в будущем на интервале времени (***t; 210***]. Для расчета этих потерь будут использоваться данные об интенсивностях поступления пассажиров на остановки по оптимистическому сценарию и математический аппарат, представленный в работе [1]. При превышении текущей оценкой рекорда вся ветвь будет отбрасываться. Так, например, отброшена ветвь, заданная вектором ($\boldsymbol{15;15;a_3;a_4;a_5}$) (т.е. все распределения, где на первых двух маршрутах по 15 автобусов, невыгодны, потому что на трех оставшихся маршрутах будет распределено слишком маленькое количество автобусов, и значение текущей оценки для этой ветви дерева решений превышает, пусть и не существенно, рекорд уже на моменте времени ***t = 63***. В дальнейшем разница между ними будет только расти, поэтому ветвь далее не рассматривается. Аналогично отбрасываются ввиду этого и все ветви, где суммарное количество автобусов на любых двух маршрутах превышает 30.

В результате повторения этой процедуры для оставшихся ветвей дерева было получено следующее решение: ***a = (7; 13; 7; 10; 13)***, т.е. на маршрутах 1-5 циркулирует следующее количество автобусов: 17, 23, 17, 20, 23 соответственно (с учетом десяти обязательно присутствующих). Значение целевого функционала (10) в данном случае равно 3 274 220 минут. При расчетах имела место неоднократная корректировка рекорда, поскольку находились варианты распределения, суммарные потери времени которых были ниже, чем у изначально выбранного распределения. Теперь следует получить оптимальное решение с помощью других моделей и сопоставить полученные результаты.

Стоит также сказать об устойчивости данного решения. В случае изменения интенсивностей поступления пассажиров на маршрутах 1 и 3 (№7 и №59), например, в полтора раза, данное решение утратит свою оптимальность, и тогда придется повторно произвести процедуру расчетов, где метод отбросит ветвь, содержащую данное решение, но не отбросит заранее ветви, где количество автобусах на этих маршрутах превышает семь. В результате расчетов для данной ситуации оптимальным было выбрано решение ***a = (11; 10; 11; 8; 10)***, что означает, что на маршрутах 1-5 циркулирует 21, 20, 21, 18, 20 автобусов соответственно. Значение целевого функционала (10) в данном случае равно 3 536 158. Это говорит о том, что в случае роста интенсивностей поступления пассажиров на каком-либо из маршрутов возрастет общее время ожидания пассажиров, увеличится очередь пассажиров на остановке, что объясняется тем, что пассажировместимость автобусов будет использоваться максимально, и часть пассажиров не будет обслужена первым подошедшим автобусом, т.е. в час пик будет иметь место неустойчивый режим обслуживания пассажиров.

Пример использования модели (13-15)

Рассмотрим численный пример использования модели (13-15). В качестве критического времени ожидания транспортного обслуживания $\tau_{гр}$, дольше которого пассажиры не должны ожидать автобуса, примем 35 минут. Нужно найти такой вариант распределения автобусов по перечисленным маршрутам, чтобы количество пассажиров, время ожидания транспортного обслуживания которых превышает 35 минут (обозначается как $|\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{a})|$), было минимальным. Стоит заранее сказать, что от выбранного $\tau_{гр}$ зависит то, к какому решению придет метод. Очевидно, что оно не должно превышать такой величины, когда метод не отбрасывает на начальных этапах расчета совершенно невыгодные ветви, и не

должно быть меньше нормативного интервала движения автобусов в рассматриваемом регионе, иначе найти оптимальное решение будет невозможно. Таким образом, $\tau_{гр}$ должно в данном случае находиться на интервале (20; 210] (больше 210 оно не может быть по определению), и желательно, чтобы $\tau_{гр}$ не превышало приемлемый для пассажира период ожидания автобуса, что с учетом расположения метро в ВАО не превышает 50 минут максимум (в большинстве случаев до метро можно дойти пешком за это время из любой точки района). С учетом возможности воспользоваться услугами такси, стоит сократить это время до вышеупомянутых 35 минут (так как с учетом относительно небольшого расстояния до метро, стоимость услуг такси для пассажиров автобуса будет приемлемой в сравнении с риском опоздания на работу / учебу).

В случае, если $\tau_{гр}$ будет таковым, что оптимальное решение будет достижимо только при условии, когда суммарные потери времени на ожидание транспортного обслуживания пассажирами будут минимально возможными, то будет иметь место полное совпадение решений задач в рамках моделей (10-12) и (13-15). Иначе метод в модели (13-15) будет считать допустимым не только распределение, оптимальное в рамках задачи (10-12), но и ряд других распределений, суммарные потери времени на ожидание обслуживания которых будут не минимально возможными, но при этом время ожидания большинства пассажиров будет приемлемым. Из этого следует, что модель (13-15) может быстрее найти приемлемое решение, но при этом оно может незначительно отличаться от наилучшего возможного.

Внедряются следующее ограничение на модель:

$$\sum_{l=1}^{5} a_5 = 100;\ a_l \geq 10;\ l = 1,\ldots,5\,. \qquad (30)$$

Этап 1. Для вычисления нижней оценки $|\Omega_н|$ примем, что автобусы имеют очень большую вместимость и на каждый маршрут выделяется максимально возможное число автобусов. Тогда ожидание пассажиров на остановке превысит $\tau_{гр}$ только из-за того, что автобусы приходят на остановки в разное время (т.е. из-за того, что на остановки, расположенные во второй половине маршрута, если считать, начиная с его начальной остановки, автобусы приходят позже, чем на начальные остановки). Получим $|\Omega_н|$ = 5 640, учитывая все приведенные в теоретической части статьи условия ее расчета. Исходя из них также очевидно, что величина $|\Omega_н|$.зависит от численности автобусного парка ***n*** и числа маршрутов ***m***.

Этап 2. Аналогично возьмем за произвольно выбранное распределение вариант ***a*** = (10; 10; 10; 10; 10). Оптимальность этого варианта подвергнута сомнению и в данном случае. Из-за того, что рассматриваемые в примере маршруты имеют различную длину (см. рис. 6), возникнет дополнительное количество пассажиров, время ожидания транспортного обслуживания которых превышает $\tau_{гр}$. Необходимо обеспечить равномерное обслуживание пассажиров на маршрутах с учетом их загруженности. Рассчитаем $|\Omega_д|$ для выбранного допустимого распределения. Количество пассажиров, время ожидания обслуживания которых превысило $\tau_{гр}$, равно в данном случае 15 633 чел., что существенно больше, чем $|\Omega_н|$. Следовательно, нужно перейти к анализу следующего допустимого решения, вычисляя уже текущие оценки, как этого требует алгоритм метода ветвей и границ.

Этап 3. Суммируя уже накопленное к моменту времени ***t*** количество пассажиров, ожидающих обслуживания дольше критического времени, с минимально возможным количеством таких пассажиров для интервала времени от ***t*** до 210, будем получать текущие нижние оценки $|\Omega_н^{тек}(t)|$ для каждого из упомянутых выше моментов времени. Повторяя эту процедуру и корректируя при необходимости значение $|\Omega_д|$, получим $|\Omega_д| = |\Omega_н|$, для распределения автобусов по маршрутам, заданным вектором ***a = (9; 10; 8; 12; 11)***, т. е. на пяти маршрутах должно циркулировать следующее число автобусов: ***(19; 20; 18; 22; 21)*** . Видно, что найденное решение отличается от решения, к которому пришла предыдущая оптимизационная модель (10-12), что объясняется тем, что у этих моделей различные критерии оптимизации. Для нахождения оптимального решения пришлось перебрать все оставшиеся ветви дерева решений, придя к конечному этапу алгоритма метода ветвей и границ уже на данной подветви. Несмотря на кажущуюся громоздкость вычислений, их осуществление при помощи специализированного программного обеспечения и с использованием эвристических ограничений на модель позволяет относительно быстро прийти к оптимальному решению данной задачи.

Пример использования стохастической модели управления транспортными ресурсами

Предполагается, что возможны три сценария развития событий (оптимистический, наиболее вероятный и пессимистический). Их вероятности равны 0,2, 0,5 и 0,3 соответственно. Оптимистический сценарий – это такой сценарий, при котором количество поступающих пассажиров соответствует вместимости автобуса, и очередей не образуется. Он возможен, если по каким-то причинам часть населения не планирует пользоваться общественным транспортом в целом или автобусом в частности в рассматриваемый период времени. Пессимистический сценарий – это сценарий, при котором интенсивности поступления пассажиров на остановки максимально возможные с учетом численности населения округа. Он возможен, если часть населения переключается с метрополитена и / или частных автомобилей на автобусный транспорт. Одной из причин такого развития событий являются сбои в работе городского метрополитена. Данная проблема является темой для отдельного исследования и может расцениваться как перспективное направле-

ние для дальнейших исследований в области управления транспортными ресурсами.

Наиболее вероятный сценарий соответствует ежедневному потоку пассажиров на вышеперечисленных остановках. Интенсивности поступления пассажиров для всех трех сценариев для маршрутов 7, 46 и 131 приведены в табл. 2-4 в соответствующих столбцах.

Рассчитаем математическое ожидание интенсивностей поступления пассажиров на остановки по всем маршрутам, используя данные из табл. 2-4. Получим следующую таблицу значений математических ожиданий интенсивностей (см. табл. 5, составлена авторами). Прочерками в таблице обозначены ячейки, не содержащие информации о параметрах пассажиропотока на остановках ввиду того, что количество остановок на маршрутах различается).

Таблица 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ПОСТУПЛЕНИЯ ПАССАЖИРОВ НА ОСТАНОВКИ

№ остановки	Номера маршрутов и направления									
	7		46		59		83		131	
	прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное	прямое	обратное
1	2,3	0,0	2,9	0,0	2,9	0,0	3,2	0,0	3,1	0,0
2	2,1	1,8	2,2	2,1	2,1	2,1	2,9	3,0	2,4	2,3
3	2,0	2,1	2,7	3,0	2,7	2,4	2,9	2,6	3,0	3,3
4	2,1	2,1	2,1	2,1	2,6	2,7	2,8	2,9	2,3	2,3
5	2,1	1,9	2,5	2,5	2,7	2,7	2,9	2,9	2,7	2,7
6	1,2	1,2	2,9	2,3	2,7	2,5	2,9	2,7	3,2	2,5
7	2,1	1,8	1,8	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	2,0	1,8
8	2,2	2,2	2,1	2,5	2,7	2,3	2,9	2,5	2,3	2,7
9	1,7	1,6	0,0	2,1	2,8	2,8	3,0	3,0	3,6	4,0
10	2,5	2,5	-	-	2,2	2,1	2,4	2,3	2,7	2,7
11	2,1	2,1	-	-	3,2	3,2	3,4	3,4	3,2	3,2
12	2,5	1,7	-	-	2,7	2,7	2,9	2,9	3,8	3,0
13	2,1	2,2	-	-	3,2	2,2	3,4	2,3	2,4	2,2
14	3,6	1,9	-	-	2,7	2,9	2,9	3,1	2,7	3,2
15	2,5	2,3	-	-	4,7	2,4	5,1	2,6	2,2	2,6
16	2,2	2,9	-	-	3,2	2,9	3,5	3,2	1,7	2,1
17	0,4	2,2	-	-	2,9	3,8	3,1	4,1	0,0	1,6
18	3,3	3,4	-	-	0,5	2,9	0,6	3,1	-	-
19	2,3	2,7	-	-	3,3	3,3	4,6	4,8	-	-
20	2,0	2,2	-	-	2,9	3,6	3,2	3,8	-	-
21	0,4	1,9	-	-	2,6	2,9	2,8	3,1	-	-
22	2,1	2,5	-	-	0,5	2,4	0,6	2,6	-	-
23	2,1	2,0	-	-	2,7	3,3	2,9	3,6	-	-
24	1,8	1,7	-	-	2,7	2,6	2,9	2,8	-	-
25	0,0	2,1	-	-	2,9	2,8	0,0	2,6	-	-
26	-	-	-	-	2,4	3,0	-	-	-	-
27	-	-	-	-	2,4	2,3	-	-	-	-
28	-	-	-	-	2,6	2,6	-	-	-	-
29	-	-	-	-	1,8	1,9	-	-	-	-
30	-	-	-	-	0,0	2,9	-	-	-	-

Аналогично можно задать интенсивности обслуживания пассажиров, если речь идет о штатной ситуации.

Можно рассчитать значения функционала (13) для каждого распределения автобусов по маршрутам и каждого набора интенсивностей поступления пассажиров на остановки $U^{l}_{\alpha j}(t)$ $(l = 1,2,\ldots,5)$; $(\alpha = 1,2,\ldots,m_l)$, $(j = 1,2,3)$. Тогда получим математическое ожидание значения самого функционала (13).

$$\bar{F}(a) = \sum_{j=1}^{M} F_j(a) = 3990667 .$$

Далее возможно оценить риск любого варианта распределения, используя формулу (23). Формула (23) будет использована в статье для оценки риска распределения, которое метод ветвей и границ выбрал в качестве оптимального. В качестве такового метод выбрал распределение, соответствующее количеству автобусов (***25; 22; 25; 10; 18***), циркулирующих по пяти рассматриваемым маршрутам. Видно, что этот вариант не соответствует решениям, к которым пришел метод при рассмотрении предыдущих моделей, поскольку здесь появились дополнительные параметры (вероятности сценариев и различные варианты интенсивностей поступления пассажиров), которые не могли быть учтены в моделях (10-12) и (13-15). Согласно формуле (23), получим следующее значение оценки риска оптимального решения:

$$R(a) = 0,2*(3990667 - 3072814)^2 +$$
$$+0,3*(3990667 - 5147960)^2 +$$
$$+0,5*(3990667 - 3750567)^2 .$$

Таким образом, ***R (a) = 599 112 957 276,5***. Извлекая корень из этого значения, получим 774 023,9 (это желательно сделать для того, чтобы появилась возможность производить дальнейшие действия над этим значением, предполагаемые теорией вероятностей). Например, данное значение можно сопоставлять с аналогичными значениями для других распределений, определяя, у какого из вариантов перераспределения автобусов по маршрутам больше степень риска.

Возможно проводить анализ устойчивости решений по всем трем моделям, опираясь на приведенный в предыдущих разделах математический аппарат. При этом перед ЛПР встает задача определения величин ε, δ и Δ, что делается с учетом того, насколько диспетчерский центр считает допустимым отклонение уровня качества оказываемых населению города услуг от нормативного значения.

В случае, когда есть возможность допустить незначительное отступление от оптимального решения, для всех трех моделей допустимо применять так называемый усеченный метод ветвей и границ. Суть данной модификации метода состоит в том, что работа его алгоритма прекращается не когда текущая оценка совпала с верхней / нижней оценкой целевого функционала (при решении разных задач достигается совпадение либо с верхней, либо с нижней оценкой), а когда разница между этой оценкой и текущей не превышает некоего значения Δ, которое ЛПР определяет самостоятельно исходя из специфики рассматриваемой им ситуации. Например, когда допускается превышение числа пассажиров, время ожидания которых превышает критическое, еще на 500 чел. В некоторое время суток необходимость максимально быстрого обслужива-

ния пассажиров может отсутствовать, либо же в определенных ситуациях (чаще внештатных, например, сбой в работе метрополитена) приходится идти на понижение качества транспортного обслуживания пассажиров наземного транспорта ради создания компенсационных маршрутов при сбойной линии метро. Применение усеченного метода ветвей и границ также позволяет сократить количество вычислительной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрены различные модели управления транспортными ресурсами, назначением которых является распределение конечного числа транспортных единиц по нескольким маршрутам наземного городского транспорта. Было предложено решение поставленной в рамках статьи задачи с помощью метода ветвей и границ. Различные модификации оптимизационной задачи были проиллюстрированы с помощью численных примеров, описывающих работу автобусного транспорта в Восточном административном округе г. Москвы в час пик (моделировалась работа 2-го автобусного парка).

Поскольку повышение уровня качества транспортного обслуживания пассажиров сегодня является приоритетной задачей в управлении городским общественным транспортом, за оптимизационные критерии при поиске решения были приняты величины, отражающие своевременность оказываемых населению транспортных услуг. Так, например, были рассмотрены модели, когда требовалось минимизировать суммарные потери времени на ожидание транспортного обслуживания, а также число пассажиров, время ожидания которых превышает некую критическую величину. Помимо этого, была рассмотрена стохастическая модель управления транспортными ресурсами, когда учитывались различные сценарии развития событий (разные интенсивности поступления пассажиров на остановки). Были предложены способы оценки устойчивости решений, полученных с помощью метода ветвей и границ.

В результате авторы пришли к следующему выводу: ввиду того, что в последние годы возросла необходимость поддержания уровня качества транспортного обслуживания на высоком уровне, и в условиях большого города требуется обеспечить бесперебойность обслуживания горожан всеми видами транспорта, диспетчерские центры транспортных парков уже не могут решать задачу распределения транспортных средств эвристическими методами. Рекомендуется использовать на практике предложенную в статье модификацию метода ветвей и границ, поскольку она позволяет с относительно небольшими усилиями найти оптимальное решение задачи управления транспортными ресурсами, что может привести к существенной экономии общественного времени (а это является одной из ключевых целей организации работы транспорта в целом).

Дальнейшие исследования по поднятой в статье проблеме могут проводиться, например, в рамках разработки стохастической модели создания компенсационных автобусных маршрутов при сбоях в работе метрополитена или городского трамвая. В подобных ситуациях возможно использование усеченного метода ветвей и границ. Также есть возможность моделирования работы транспортного парка с помощью программы имитационного моделирования «Anylogic», позволяющая более полно проиллюстрировать в динамике рассмотренную в статье ситуацию и сымитировать реализацию выбранного методом ветвей и границ решения, а также проанализировать моделируемую систему на наличие «узких мест» и убедиться в надежности предложенного в статье метода.

Литература

1. Мищенко А.В. Компенсационное перераспределение транспортных средств при сбоях в работе городского трамвая [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Катюхина // Логистика сегодня. – №1. – 2015. – С. 20-36.
2. Маршрут автобуса №7 [Электронный ресурс]. URL: http://wikiroutes.info/msk?routes=1135.
3. Маршрут автобуса №46 [Электронный ресурс]. URL: http://wikiroutes.info/msk?routes=1135.
4. Маршрут автобуса №59 [Электронный ресурс]. URL: http://wikiroutes.info/msk?routes=1059.
5. Маршрут автобуса №83 [Электронный ресурс]. URL: http://wikiroutes.info/msk?routes=779.
6. Маршрут автобуса №131 [Электронный ресурс]. URL: http://wikiroutes.info/msk?routes=1136.
7. Модель автобуса ЛиАЗ-529. [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ЛиАЗ-5292.
8. Расписание маршрутов наземного городского транспорта [Электронный ресурс]. URL: http://www.-mosgortrans.ru/routes/routes/.
9. ТАСС : информационное агентство [Электронный ресурс] : официальный сайт. Режим доступа: http://-tass.ru/ekonomika/2303240

Ключевые слова

Городской транспорт; метод ветвей и границ; оптимизационные модели; управление транспортными ресурсами; автобусный парк; маршруты; дискретные модели; стохастические модели; качество обслуживания; диспетчерские центры.

Мищенко Александр Владимирович

Катюхина Ольга Алексеевна

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность проблемы. В современной экономике достаточно широко применяются математические методы в управлении транспортными ресурсами, в логистике. Использование метода ветвей и границ является перспективным направлением совершенствования работы диспетчерской службы.

Применение приведенных в статье методов позволяет повысить надежность и эффективность обслуживания пассажиров городского транспорта, снизить затраты на организацию работы транспортного парка.

Актуальность работы определяется тем, что в настоящее время использование методов управления транспортными ресурсами, подобных предложенным авторами, не является повсеместным, следовательно, необходимо привлекать внимание к этой проблеме менеджеров соответствующего хозяйства.

Научная новизна и практическая значимость. В статье предложены дискретные и стохастические модели управления транспортными ресурсами и приведены примеры их применения, в частности, осуществлено моделирование работы автобусного парка.

Заключение: рецензируемая статья представляет научный и практический интерес. Рекомендую ее к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Бендиков М.А., д.э.н., в.н.с., Центральный экономико-математический институт Российской Академии наук, г. Москва.

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ