9.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ТОРГОВЫХ РОБОТОВ НА ДЕРИВАТИВАХ

Недосекин А.О., д.э.н., к.т.н., координатор ИКС IFEL Rus, академик МАНЭБ, профессор, кафедра экономики, учета и финансов, Санкт-Петербургский национальный минерально-сырьевой университет «Горный»;
Абдулаева З.И., к.э.н., доцент, кафедра медицинской информатики и физики, Северо-Западный государственный медицинский университет им. И.И. Мечникова

Рассматривается математическая модель оптимизации портфеля торговых роботов, оперирующих с деривативами. В основе модели лежат нечетко-множественные описания, в которые имплантирована модель корреляционной матрицы активов. Предложен приближенный метод учета взаимной корреляции активов при построении результирующего нечеткого числа доходности портфеля. В ходе оптимизации портфеля использовался применявшийся ранее и хорошо себя зарекомендовавший приближенный метод градиентной оптимизации. Вновь предлагаемый метод оптимизации рассмотрен на расчетном примере.

ВВЕДЕНИЕ

Торговля деривативами – это специфический сегмент фондового рынка, отвечающий запросам агрессивного инвестора, обладающего высокой степенью терпимости к рискам потери капитала. Современное состояние рынка таково, что более чем на 90% он торгуется не человеком, а машинами – торговыми роботами. Рынок деривативов – это рынок алготрейдинга, где торговля даже одним инструментом, из рук одного инвестора, может совершаться одновременно в нескольких разных стилях, на основе различных алгоритмов, имплементированных на нескольких не связанных между собой торговых терминалах. Поэтому законно говорить о портфелях торговых роботов. И, как в классических теориях портфельной оптимизации, ставится и решается задача определения оптимального соотношения весов в инвестированном капитале портфеля, которое бы оптимизировало бы доход трейдера при ограничениях на риск и на размер весов роботов в портфеле. То есть научного обоснования требует выбор торговых лимитов в отношении каждого применяемого робота.

В ходе постановки задачи подобной оптимизации возникают три существенных затруднения, которые не позволяют применять классический подход Марковица [5]:

- доходности базовых активов, как и фьючерсов на их основе, не обладают нормальным распределением. Это связано со следующими факторами:
  - проблемой «толстых хвостов» [10], когда вероятности глубоких «ралли» и «паники» на активах повышены;
  - со спецификой работы самих роботов, которые применяют технику, на сленге брокеров именуемую «катвилосей»: т.е. «быстро крой убыточные позиции с помощью стоповых заявок (стоплоссов), но при этом не ограничивай прибыль, т.е. не ставь заявки типа тейкпрофит». Соответственно, отсечение убытков вызывает усечение соответствующих вероятностных распределений с одновременным снижением волатильности результата торговли;
- при этом в составе портфеля появляются активы, обладающие выраженной отрицательной корреляцией по отношению к другим роботам. Это страхующие роботы, или локботы, временно занимающие противоположные позиции для отсечения убытков или для удержания накопленного маржинального дохода по фьючерсам или для фиксации стоимости опционов. То есть, с одной стороны, от классического вероятностного фреймворка по Марковицу приходится отказываться. Но факт возникновения отрицательной корреляции, существенно снижающий волатильность дохода по портфелю, не может быть просто проигнорирован, и он должен быть учтен в оптимизационной модели;
- волатильность – это ограничение в постановке задачи оптимизации по Марковицу. В то же время главный фокус внимания инвестора на рынке деривативов сосредоточен не на волатильности как таковой, а только на ее негативной составляющей (на просадках). Соответственно измеримый инвестиционный риск приходит на смену волатильности, и это обстоятельство, фигурально говоря, забивает последний гвоздь в крышку гроба классического подхода к фондовой оптимизации.

Настоящая статья разрешает указанные затруднения и предлагает алгоритм оптимизации портфеля торговых роботов, свободный от ограничений на вид распределения доходности и на характер риск-критерия. Одновременно выстраивается некоторый мост между вероятностной и нечетко-множественной парадигмами оптимизации портфеля. Основательно первый такой мост был наведен работой [11], где постулировалась нечеткая случайная величина, определенная на декартовом произведении вероятностного и нечеткого пространства. В свое время это позволило обосновать вероятностные распределения с нечеткими параметрами и модифицировать классический подход Марковица к оптимизации портфеля [4]. Теперь же заход в алгоритм оптимизации производится со стороны неклассической нечеткой модели, в которую вкрапляются классические элементы теории вероятности.

Постановка задачи оптимизации портфеля торговых роботов

Рассматривается портфель из $\boldsymbol{N}$ работающих одновременно торговых роботов, $\boldsymbol{i}$ – номер текущего торгового робота, $\boldsymbol{S_i}$ – лимит гарантийного обеспечения (ГО) по фьючерсам на $\boldsymbol{i}$-м роботе, $\boldsymbol{S}$ – суммарное ГО по портфелю. Тогда вес робота в портфеле:

$$x_i = S_i / S, \ \Sigma_{(i)} x_{(i)} = 1. \qquad (1)$$

По каждому роботу известны:

- нечеткое число доходности робота $\boldsymbol{R_i}$, образованное эмпирической частотной гистограммой, нормированной на единицу (предел функции принадлежности нечеткого числа); $\boldsymbol{R_i}$ – кусочно-линейное нечеткое число (***BL***-вид, от broken line);
- историческая средняя доходность (матожидание функции распределения случайной величины доходности) $\boldsymbol{r_i}$, процентов годовых;
- историческое среднеквадратическое отклонение (СКО, корень из дисперсии функции распределения случайной величины доходности) $\boldsymbol{\sigma_i}$, процентов годовых.

Также по портфелю роботов известна корреляционная матрица $\{\rho_{ij}\}$, измеренная на помесячном базисе от даты измерения, с единицей измерения один торговый день. Традиционные свойства матрицы:

- единицы на диагонали (автокорреляция активов портфеля, $\rho_{ii} = 1$);
- центральная симметрия относительно диагонали: $\rho_{ij} = \rho_{ji}$.

При этом $\boldsymbol{r_i}$ и $\boldsymbol{\sigma_i}$ измеряются на квартальном базисе от даты измерения. Выбор временных интервалов для измерения обусловлен, с одной стороны, полнотой оценки (достаточность статистики), с другой стороны – актуальностью статистики для измерения ее параметров (предположение об условном постоянстве параметров статистики на интервале измерения).

Также на каждый вес компонента в портфеле установлены двусторонние ограничения вида

$$a_i \le x_i \le b_i. \quad (2)$$

Нечеткое число доходности портфеля по формуле среднего взвешивания, вне зависимости от вида корреляционной матрицы:

$$R = x_1 {*} R_1 + x_2 {*} R_2 + \ldots x_N {*} R_N. \quad (3)$$

То же самое справедливо, разумеется, и в отношении среднеожидаемых значений доходностей роботов:

$$r = x_1 {*} r_1 + x_2 {*} r_2 + \ldots x_N {*} r_N. \quad (4)$$

Взвешенная сумма ***BL-чисел*** есть ***BL-число***, что доказывается с использованием правил интервальной арифметики Дюбуа-Прада [9]. Выберем уровень α горизонтального сечения нечеткого числа. При пересечении нечеткого числа с этим уровнем образуется интервал. Поэтому операции с нечеткими числами сводятся к операциям над интервалами, при последовательном сканировании уровня α вдоль оси ординат (с изменением значения функции принадлежности числа). Результат операций с нечеткими числами – нечеткое число, восстановленное из α-уровневых интервалов. Поскольку координаты интервалов ***BL-числах*** зависят от уровня α кусочно-линейно, то и взвешенная сумма интервалов сохранит эту кусочно-линейную зависимость.

Зададимся фиксированным уровнем ***L*** требований инвестора к доходности портфеля роботов, который обусловлен объективным соотношением доходности и риска портфеля деривативов. Если рационально-приемлемая доходность по рынку акций составляет 25-30% годовых, то доходность по деривативам, с учетом финансового рычага, образующегося на соотношении курса базовых активов и гарантийного обеспечения по отвечающим им деривативам, составляет от 300% годовых. Соответственно представляется, что рациональный уровень ***L*** в этом случае должен превышать 100% годовых. Если это требование по доходности не выдерживается, то уровень риска инвестиций в портфели торговых роботов перестает быть приемлемым.

Соответственно, риск по портфелю ***Risk*** – это возможность того, что результирующая доходность по портфелю окажется ниже нормативного значения:

$$Risk\ (L) = Poss\ \{R < L\}. \quad (5)$$

Количественно ***Risk (L)*** для ***R*** произвольного нечеткого вида определяется по обобщенной формуле [1]:

$$Risk\ (L) = \sum_{\alpha=0}^{0.9} Risk_\alpha(L)/11\ . \quad (6)$$

где $$Risk_\alpha\ (L) = \begin{cases} \dfrac{L - R_{\alpha min}}{R_{\alpha max} - R_{\alpha min}}, L > R_{\alpha min} \\ 0, L \le R_{\alpha min} \end{cases}. \quad (7)$$

Причем в (7) предполагается, что нечеткое число доходности портфеля ***R*** разрезается горизонтальными α-уровнями с выделением интервалов принадлежности $[R_{\alpha min}, R_{\alpha max}]$.

Задача оптимизации для этой модели может звучать так: максимизировать среднеожидаемую доходность портфеля роботов при фиксированном риске и весовых ограничениях вида (1-2) (прямая задача). Двойственная к ней задача: минимизировать риск при фиксированной среднеожидаемой доходности и весовых ограничениях. Математическая запись для прямой задачи:

$$\{x_{opt}\}=\{x\}\ |\ r \to max,\ Risk_{(L)} = const. \quad (8)$$

Для двойственной задачи:

$$\{x_{opt}\}=\{x\}\ |\ Risk_{(L)} \to min,\ r = const. \quad (9)$$

при соблюдении ограничений вида (1-2).

Прямая задача оптимизации отвечает настроениям сверхагрессивного инвестора, для которого задачей является «разогнать счет», несмотря на возникающие при этом существенные просадки. Наоборот, более консервативный инвестор (если будет уместно применять слово «консервативный» к торговле деривативами) склонен скорее минимизировать риск, увеличивая долю хеджирующих компонент в портфеле даже ценой снижения доходности. Соответственно, решения для агрессивного инвестора располагаются на правой стороне эффективной границы портфельного множества (ЭГ), а решения для консервативного инвестора – на правой стороне. Но сама по себе ЭГ – это одно и то же решение задач (8-9), для инвесторов любой ориентации.

Проблема учета корреляции активов в модели

Можно было бы пренебречь корреляционной матрицей при оптимизации портфеля, в соответствии с результатом [7, 8]. В этих работах показывается, что погрешность, вносимая в результат оптимизации неустойчивостью в определении параметров корреляционной матрицы, пренебрежимо мала по сравнению с тем же для параметров средней доходности и среднеквадратического отклонения (СКО).

Но по мере возникновения в портфеле компонент с отрицательной или неполной корреляцией возникают эффекты, которые могут внести существенную погрешность в результат оптимизации. Когда корреляция активов полная отрицательная, эта коллизия разрешается в нечетко-множественных задачах с применением так называемых *зеркальных* или *инверсных нечетких чисел* [3]. Но для случая неполной положительной / отрицательной корреляции активов портфеля, соответствующая корректировка в нечетких моделях не предусмотрена, и это снижает ценность модели.

Следует более подробно прокомментировать этот тезис. Рассмотрим простейший пример портфеля из двух одинаковых активов, представленных треугольными числами доходности (10, 15, 20) процентов годовых, веса активов в портфеле равны и составляют 0,5. Если $\rho = 1$, то активы коррелированы полно-положительно, и результирующая доходность портфеля – это треугольное число (10, 15, 20) (рис. 1). Но если они коррелированы полно-отрицательно и $\rho = -1$, то результат доходности по портфелю составит уже (15, 15, 15), треугольное число вырождается в скаляр, т.е. доходность портфеля будет полностью предопределена на фиксированном уровне – за счет того, что уменьшение доходности одного актива будет сопровождаться синхронным ростом доходности другого актива на ту же самую величину, и средневзвешенная сумма доходностей не изменится.

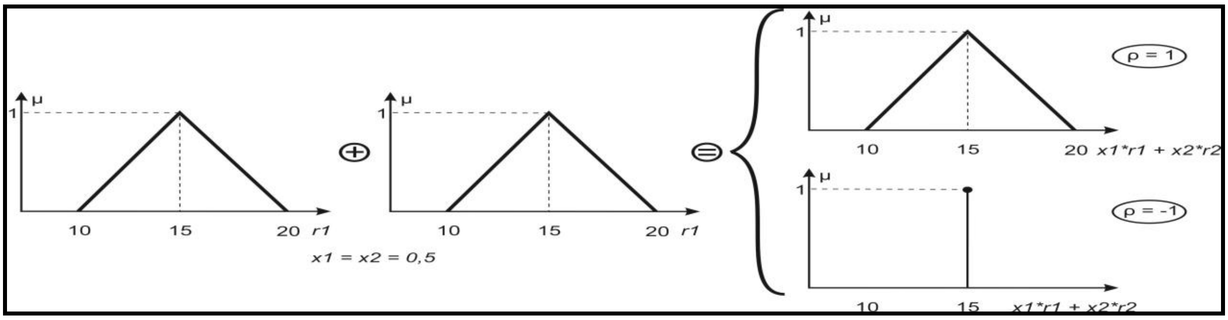

Рис. 1. Эффект корреляции в нечетко-множественной модели портфеля

Этот эффект очень хорошо прослеживается на сборках активов, когда базовый актив, например, хеджируется пут-опционом. Актив и опцион коррелированы неполно и кусочно; когда опцион не в деньгах, корреляция актива и опциона нулевая; когда же опцион в деньгах, корреляция актива и опциона – полная отрицательная. В результате распределение доходности сборки (вероятностное или нечетко-множественное) претерпевает усечение на левом конце.

Еще один характерный пример – локирующий робот в структуре портфеля, который в определенный момент занимает противоположные позиции, т.е. хеджирует портфель. Его корреляция с остальными роботами в портфеле – неполная отрицательная. За этот счет волатильность доходности по портфелю снижается. Этого бы не прослеживалось, если бы в расчетах применялась формула (4), без учета того, что нечеткое число доходности по локботу, в полной аналогии с пут-опционом, может носить зеркально-инверсный вид, когда минимальное значение на интервале принадлежности выше максимального значения на том же интервале.

Чтобы учесть корреляцию в конфигурации нечетко-множественного числа доходности портфеля R, необходимо отказаться от использования представления (1) «в лоб», заменив его приближенным построением оценки R по нижеследующей схеме. Сначала разберем схему на двух активах, $N = 2$. На уровне горизонтального α-среза при сложении двух интервалов доходности активов A_1 и A_2 $[r_{1min\alpha}, r_{1max\alpha}]$ и $[r_{2min\alpha}, r_{2max\alpha}]$ соответственно, коррелированных на глубину ρ_{12}, при $-1 \le \rho_{12} \le 1$, выстраивается следующая кусочно-линейная интервальная арифметика для интервала доходности $[R_{2min\alpha}, R_{2max\alpha}]$, отвечающего сборке двух активов $P_2 = A_1 \oplus A_2$, где $\oplus$ – знак сборки при $\rho 12 \ge 0$:

$$R_{2min\alpha} = x_1 * r_{1min\alpha} + x_2 * r_{2min\alpha};$$

$$R_{2max\alpha} = x_1 * r_{1max\alpha} + x_2 * r_{2max\alpha}. \qquad (10)$$

Здесь мы сохраняем совпадение с классической формулой. A при $\rho_{12} < 0$:

$$R_{2min\alpha} = \min\{x_1*(a_{1\alpha}*\rho_{12} + b_{1\alpha}) + x_2*(a_{2\alpha}*\rho_{12} + b_{2\alpha}); x_1*(-a_{1\alpha}*\rho_{12} + b_{1\alpha}) + x_2*(-a_{2\alpha}*\rho_{12} + b_{2\alpha})\},$$

$$R_{2max\alpha} = \max\{x_1*(a_{1\alpha}*\rho_{12} + b_{1\alpha}) + x_2*(a_{2\alpha}*\rho_{12} + b_{2\alpha}); x_1*(-a_{1\alpha}*\rho_{12} + b_{1\alpha}) + x_2*(-a_{2\alpha}*\rho_{12} + b_{2\alpha})\} \qquad (11)$$

где $a_{1\alpha} = (r_{1min\alpha} - r_{1max\alpha}) / 2$,
$a_{2\alpha} = (r_{2min\alpha} - r_{2max\alpha}) / 2$,
$b_{1\alpha} = (r_{1min\alpha} + r_{1max\alpha}) / 2$,
$b_{2\alpha} = (r_{2min\alpha} + r_{2max\alpha}) / 2$. (12)

Схематично содержание формулы (11) представлено на рис. 2. Смысл схемы в следующем: чем отрицательнее корреляция, тем «перекрестнее» сборка слагаемых в линейную комбинацию для расчета доходности портфеля.

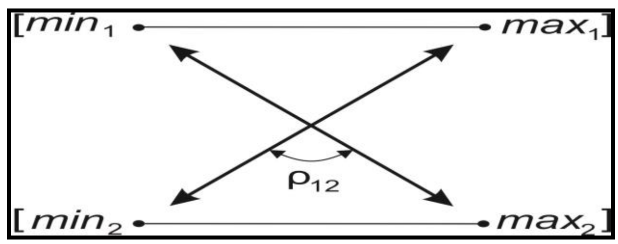

Рис. 2. Схематичное содержание формулы (11)

Важный частный случай. Если $\rho_{12} = -1$, то (*П11*) приобретает «зеркальный» вид:

$$R_{2min\alpha} = \min\{x_1 * r_{1min\alpha} + x_2 * r_{2max\alpha}; x_1 * r_{1max\alpha} + x_2 * r_{2min\alpha}\},$$

$$R_{2max\alpha} = \max\{x_1 * r_{1max\alpha} + x_2 * r_{2min\alpha}; x_1 * r_{1min\alpha} + x_2 * r_{2max\alpha}\}. \qquad (13)$$

Теперь добавим к сборке P_2 еще один актив A_3. Корреляция сборки P_2 и актива A_3 определяется по приближенной формуле:

$$\rho_3^* = x_1*\rho_{13} + x_2*\rho_{23} + x_3*\rho_{33}, \qquad (П14)$$

где веса активов определяются по (*П1*). Возвращаемся к формулам *(П10) – (П12)* и восстанавливаем α-интервалы для сборки $P_3 = P_2 \oplus A_3$, заменив $R_{2min\alpha}$ и $R_{2max\alpha}$ на $R_{3min\alpha}$ и $R_{3max\alpha}$ соответственно, x_1 на $(x_1 + x_2)$, x_2 на x_3, а ρ_{12} - на ρ_3^*. Так повторяем всего *(N-2)* раза, модифицировав (*П14*) до следующего вида:

$$\rho_j^* = x_1*\rho_{1j} + x_2*\rho_{2j} + \ldots + x_j*\rho_{jj}, \ 3 \le j \le N. \qquad (П15)$$

В результате мы построили рекурсивную процедуру для пошагового формирования нечеткого числа доходности R по портфелю с неполно-коррелированными активами. Суть этой процедуры может быть компактно описана формулой:

$$P_j = P_{j-1} \oplus A_j, \ 3 \le j \le N. \qquad (16)$$

База рекурсии (16) – соотношение (10) для двух активов в портфеле. Можно назвать эту процедуру обобщением интервальной арифметики Дюбуа-Прада на случай нечетких чисел с неполной корреляцией.

Продемонстрируем вновь введенный подход на примере сборки «актив + опцион», чтобы убедиться, что предложенная нами модель работает корректно. Пусть выполнены следующие условия задачи. Инвестирование происходит одновременно в акцию A_1 по стартовой цене C_0 = 100 у.е. и в опцион ***PUT*** на эту акцию с премией z = 7 у.е., обозначаемый как A_2. Страйк опциона y совпадает с начальной ценой и составляет 100 у.е. Срок инвестирования T = 1 год. Будущая прогнозная цена акции на момент через год после инвестирования (соответственно, на момент исполнения пут-опциона) описывается треугольным нечетким числом с координатами C = (70, 120, 170) у.е.

Задача в том, чтобы сформировать нечеткое число доходности по сборке «актив + опцион» (обозначение сборки $P_2 = A_1 \oplus A_2$), руководствуясь двумя подходами:

- классическим, основанным на зеркальных интервалах;
- предложенным здесь (для обобщающего случая двух активов с неполной корреляцией).

Рассмотрим сначала классический подход. В соответствии с ним, доход по акции:

$$\Delta_1 = C - C_0 = (70, 120, 170) - 100 = (-30, 20, 70) \text{ у.е.} \quad (17)$$

треугольное нечеткое число. Доходность определяется по формуле:

$$r_1 = (C - C_0) / C_0 / T = (-30, 20, 70) \text{ \% годовых.} \quad (18)$$

Классическая формула дохода по пут-опциону:

$$\Delta_2 = \begin{Bmatrix} -z, C > y \\ y - C - z, y \geq C \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

В нашем случае Δ_2 – это кусочно-линейное нечеткое число *инверсного типа* (инверсный ***BL-вид***), с усечением на левом фронте числа. Именно инверсность числа дохода по опциону служит верным признаком того, что опцион отрицательно коррелирован с активом. В этой связи, если для рис. 1 второе слагаемое – это инверсное число (при $\rho = -1$), то его следовало бы отрисовать пунктиром, чтобы подчеркнуть инверсность числа.

Отсюда доходность инвестиций в пут-опцион:

$$r_2 = \Delta_2 / z / T = \begin{Bmatrix} -100, C > y \\ \dfrac{y - C - z}{z * T}, y \geq C \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Совокупная инвестиция в сборку составляет:

$$C_0 + z = 107 \text{ у.е.} \quad (21)$$

Можно рассмотреть сборку как портфель из двух активов с весами:

$$x_1 = C_0 / (C_0 + z) = 100 / 107 = 0.935, \; x_2 = z / (C_0 + z) = 7 / 107 = 0{,}065. \quad (22)$$

Совокупный доход по сборке:

$$\Delta = \Delta 1 + \Delta 2, \quad (23)$$

это кусочно-линейное нечеткое число, с усечением на левом фронте.

Тогда доходность по сборке в целом – это формула (3):

$$R = \Delta / (C_0 + z) / T = x_1 * R_1 + x_2 * R_2. \quad (24)$$

На рис. 3 представлено соотношение дохода Δ_1 по акции, дохода Δ_2 по опциону (пунктир, инверсное число) и дохода Δ по сборке «актив + опцион». Соответствующий кейс описан табл. 1.

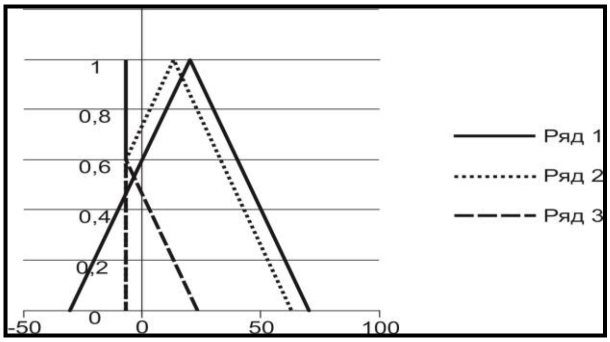

Рис. 3. Соотношение дохода по акции и по сборке

Таблица 1

АНАЛИЗ ДОХОДНОСТИ СБОРКИ В ИНТЕРВАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Показатель	Альфа	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Будущая цена актива	мин ***C*** =	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
	макс ***C*** =	170	165	160	155	150	145	140	135	130	125	120
Доход без о.	мин ***Дельта1*** =	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
	макс ***Дельта1*** =	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20
Доходность без о.	мин ***r1*** =	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
	макс ***r1*** =	70%	65%	60%	55%	50%	45%	40%	35%	30%	25%	20%
Доход по опциону	мин ***Дельта2*** =	23	18	13	8	3	-2	-7	-7	-7	-7	-7
	макс ***Дельта2*** =	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
Доходность по опциону	мин ***r2*** =	329%	257%	186%	114%	43%	-29%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%
	макс ***r2*** =	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%
Доход сборки Дельта	мин ***Дельта = Дельта1 + + Дельта2***	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-2	3	8	13
	макс ***Дельта = Дельта1 + + Дельта2***	63	58	53	48	43	38	33	28	23	18	13
Доходность по сборке вар. 1	мин ***r = Дельта / (C0 + z) / T***	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-2%	3%	7%	12%
	макс ***r = Дельта / (C0 + z) / T***	59%	54%	50%	45%	40%	36%	31%	26%	21%	17%	12%
Доходность	мин ***r = x1*r1 + x2*r2***	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-2%	3%	7%	12%

Показатель	Альфа	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
по сборке вар. 2	макс $r = x1*r1 + x2*r2$	59%	54%	50%	45%	40%	36%	31%	26%	21%	17%	12%

Теперь, чтобы на время отойти в сторону от только что полученного результата и проверить достоверность нового подхода, абстрагируемся от природы актива $\boldsymbol{A_2}$ как пут-опциона и будем рассматривать этот актив с обобщенных позиций, не интерпретируя его зеркальным нечетким числом. Еще 10 лет назад, в [2] нами совместно с А.В. Сомовой была получена формула для корреляции актива и пут-опциона. Однако эта формула, если ее применить «в лоб», исказит результат, поскольку вычисляемая по ней корреляция выразит «среднюю температуру по больнице». Мы же, де-факто, имеем дело с корреляцией кусочно-линейного типа. В данном случае:

$$\rho_{12} = 0 \text{ при } \alpha_0 \le \alpha \le 1 \text{ (опцион неэффективен)},$$
$$\text{и } \rho_{12} = -1 \text{ при } 0 \le \alpha < \alpha_0 \text{ (опцион эффективен)}, \quad (25)$$

где α_0 определяется из условия, когда случайная цена акции $\boldsymbol{C}$ равна страйку $\boldsymbol{y}$ (опцион включается в работу при дальнейшем снижении цены. Аналитический вид треугольного числа $C = (C_{min}, C_{av}, C_{max}) = (70, 120, 170)$ в координатах ***цена – уровень принадлежности*** α для нашего случая имеет вид:

$$C(\alpha) = 120 \pm 50*(1-\alpha), \quad (26)$$

причем нас интересует только левый фронт числа $\boldsymbol{C}$. Соответственно, α_0 выделяется из уравнения:

$$C_{av} - (C_{av} - C_{min})*(1 - \alpha_0) = y, \quad (27)$$

откуда

$$\alpha_0 = 1 - (C_{av} - y)/(C_{av} - C_{min}) = 0,6. \quad (28)$$

На рис. 3 отчетливо видно, что левый фронт сборки «актив + опцион» делает излом именно в точке, чья ордината составляет $\alpha_0 = 0,6$. Именно в этой точке начинает действовать опцион, а корреляция ρ_{12} скачкообразно падает от нуля до минус единицы.

Теперь построим интервальный расчет доходности, исходя из того, что в диапазоне α от 0 до 0,6 мы применяем формулы (13), а от 0,6 до 1 – формулу (10). Воспользуемся данными из табл. 1, но не станем представлять пут-опцион зеркальными интервалами (поменяем интервальные границы местами). Результат расчетов представлен в табл. 2.

Как видно из табл. 2, данные по доходности сборки являются идентичными тому же, что приведены в табл. 1. Попутно мы здесь отмечаем неразличимость условий формирования портфеля, создаваемых положительной корреляцией. При $\alpha_0 > 0,6$ корреляция активов в сборке нулевая. Однако суммарный результат точно такой же, как если бы корреляция была единичной (полной положительной). Это обстоятельство и было подмечено и учтено в формулах (10-12). Опять же, это еще один повод говорить о том, что влияние корреляции на портфель значительно менее заметное, чем об этом принято думать в профессиональных кругах. Неполная корреляция на фондовых рынках – это редкость; отрицательную же корреляцию можно приравнять к чуду (если, разумеется, не брать во внимание феномен хеджирования через деривативы или локботы). Именно аспект прямого хеджирования и учитывается в модели, основанной на расширении классической арифметики Дюбуа-Прада.

Таблица 2

ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛ ОБОБЩЕННОЙ АРИФМЕТИКИ ДЮБУА-ПРАДА ДЛЯ ЧИСЕЛ С НЕПОЛНОЙ КОРРЕЛЯЦИЕЙ

Показатель	Альфа	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Доходность акции	мин r_1 =	-30%	-25%	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
	макс r_1 =	70%	65%	60%	55%	50%	45%	40%	35%	30%	25%	20%
Доходность по опциону	мин r_2 =	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%
	макс r_2 =	329%	257%	186%	114%	43%	-29%	-100%	-100%	-100%	-100%	-100%
Корреляция	ρ	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
Доходность по сборке	мин $r = x_1*r_1 + x_2*r_2$	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-7%	-2%	3%	7%	12%
	макс $r = x_1*r_1 + x_2*r_2$	59%	54%	50%	45%	40%	36%	31%	26%	21%	17%	12%

Градиентный метод оптимизации портфеля роботов

Подробно градиентные методы оптимизации различных классов портфелей (фондовый, прямых инвестиций) рассмотрены нами в [1, 5]. Будем решать задачу оптимизации в непрерывном несчетном поле весов активов в портфеле, ограниченных условиями (1) и (2). Решение задачи оптимизации – эффективная граница (**ЭГ,** см. рис. 4) полного множества портфельных решений (портфельного облака). Любая точка внутри портфельного облака является неоптимальной, поскольку на ЭГ есть хотя бы две точки, которые смогут доминировать данную, либо по доходности, либо по риску. Сами эти точки границы не доминируют друг друга в смысле Парето; соответственно, они входят в оптимальное несчетное множество портфельных решений ЭГ.

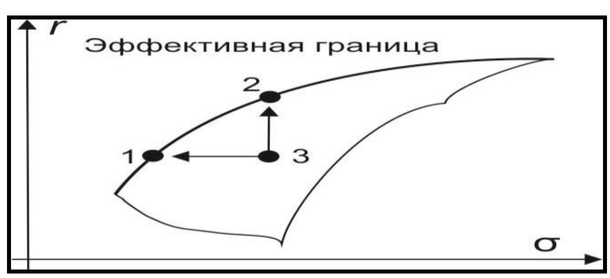

Рис. 4. Оптимизация портфеля в произвольных координатах доходности и риска

Чтобы вычленить ЭГ, необходимо просканировать портфельное облако градиентным вектором по его верхнему покрытию, справа вниз налево, используя свойства выпуклости, непрерывности и гладкости ЭГ. Это приближенный метод, однако он неоднократно доказал свою успешность для произвольно-сложных допущений к доходности и риску портфеля.

Градиентная оптимизация проводится в координатах среднеожидаемая доходность – риск портфеля.

Это итерационный алгоритм, выполняемый по шагам. Если временно пренебречь наложением ограничений вида (2), сохранив только нормировочное условие (1), то процедура состоит в следующем.

1. В качестве нулевой итерации зафиксируем портфель, в котором 100% принадлежит проекту с максимальным уровнем среднеожидаемой доходности (правая точка эффективной границы портфеля). Здесь под точкой мы уже понимаем отрезок, образованный тремя координатами нечеткого числа доходности.
2. Затем выделим некоторую долю-дискрет Δx_i, например 10% суммарной весовой меры портфеля. Попробуем перенаправить эту дискретную инвестицию из крайнего портфеля правой точки в сторону одного из активов. В результате такого ребалансинга возникает новый портфель с новыми характеристиками r и $Risk$. Планово при сканировании эффективной границы справа налево, наблюдается одновременное снижение среднего значения доходности портфеля r на величину $\Delta r > 0$ и риска на величину $\Delta Risk > 0$.
3. Обозначим:

$$Grad = \Delta r / \Delta Risk, \quad (29)$$

это градиент снижения доходности портфеля по уровню риска. Тогда, чтобы решить задачу оптимизации на очередном шаге итерации, необходимо потребовать, чтобы в ходе ребалансинга портфеля одновременно выполнялось два условия:

$$Grad = min, Grad > 0. \quad (30)$$

Это соответствует формированию эффективной границы как набору недоминируемых альтернатив по Парето [5]. Если правило минимального градиента не выполняется, то такое доминирование при ребалансинге оказывается возможным: возникает проигрыш по волатильности при сопоставимой доходности или проигрыш по доходности при сопоставимой волатильности.

4. В ходе сканирования эффективной границы мы рассматриваем все возможные варианты перенаправления дискрета Δx_i, от актива с номером i к активу с номером j.
5. Проходим эффективную границу справа налево, итерацию за итерацией, до тех пор, пока все возможные градиенты не становятся отрицательными. Это означает, что огибающая портфельного облака делает разворот, пройдя левую точку границы. Все остальные портфельные точки, находящиеся на огибающей портфельного облака, уже неоптимальны (доминируются точками эффективной границы). Здесь градиентный алгоритм останавливается.

Расчетный пример оптимизации портфеля торговых роботов

Рассматривается пример из трех торговых роботов, предназначенных для торговли фьючерсами на валютную пару доллар-рубль. Из них два робота (A_1 – волновой и A_2 – паттерновый) обладают неполной положительной корреляцией, а третий робот – локбот A_3 – отрицательно коррелирует с первыми двумя. Доходности роботов представлены в форме интервалов принадлежности, восстановленных на основе гистограмм результатов торговли (см. табл. 3). Корреляционная матрица активов A_1 – A_3 в портфеле размерностью N = 3 представлена в табл. 4.

Таблица 3

НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА ДОХОДНОСТИ ТОРГОВЫХ РОБОТОВ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Альфа	Интервалы доходности волнобота (A1), % годовых		Интервалы доходности паттерн-бота (A2), % годовых		Интервалы доходности волнобота (A3), % годовых	
0	-70	570	-40	360	-100	80
0.1	-60	360	-20	340	-90	75
0.2	-30	335	0	320	-80	70
0.3	0	320	30	300	-70	65
0.4	40	300	60	265	-60	60
0.5	90	250	80	230	-45	55
0.6	120	190	100	200	-30	50
0.7	140	170	105	180	-15	45
0.8	142	160	110	165	0	40
0.9	144	155	115	140	15	35
1	150	150	120	120	30	30

Таблица 4

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА ПОРТФЕЛЯ РОБОТОВ

Активы	Корреляционная матрица для активов:		
	A1	A2	A3
A1	1	0,7	-0,8
A2	0,7	1	-0,6
A3	-0,8	-0,6	1

Среднеожидаемые значения доходности активов в портфеле роботов: r_1 = 150% годовых, r_2 = 120% годовых, r_3 = 30% годовых.

Таблица 5

РЕЗУЛЬТАТ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ РОБОТОВ

Номер шага	x1	x2	x3	Risk	Среднеожидаемая доходность r	Градиент
0	1	0	0	0,119	150	
1	0,9	0,1	0	0,115	147	761
	0,9	0	0,1	0,140	125	-1235
2	0,8	0,2	0	0,111	144	722
	0,8	0,1	0,1	0,136	122	-1189
3	0,7	0,3	0	0,106	141	685
	0,7	0,2	0,1	0,133	119	-1143
4	0,6	0,4	0	0,102	138	649
	0,6	0,3	0,1	0,129	116	-1098
5	0,5	0,5	0	0,097	135	615
	0,5	0,4	0,1	0,125	114	-1053
6	0,4	0,6	0	0,092	132	583
	0,4	0,5	0,1	0,121	111	-1008
7	0,3	0,7	0	0,086	129	553
	0,3	0,6	0,1	0,116	108	-963
8	0,2	0,8	0	0,081	126	524
	0,2	0,7	0,1	0,112	106	-917
9	0,1	0,9	0	0,075	123	498
	0,1	0,8	0,1	0,107	103	-870
10	0	1	0	0,068	120	473
	0	0,9	0,1	0,102	100	-822

Номер шага	x1	x2	x3	Risk	Среднеожидаемая доходность r	Градиент
11	0	0,9	0,1	0,102	100	-581

Результат градиентной оптимизации представлен в табл. 5. В расчете использовались все формулы настоящей статьи. Оптимальные портфели выделены в табл. 5 жирным шрифтом. Все точки, образующие эффективную границу, обладают минимально-положительным градиентом. Сама граница не обладает традиционным свойством выпуклости, поскольку при ее построении используются дробно-линейные и логарифмические меры для оценки риска (в отличие от квадратичных описаний для волатильности в случае классической модели Марковица, например).

Из табл. 5 видно, что локбот (актив 3) не попадает в оптимальный портфель, несмотря на отрицательную корреляцию с другими роботами, в силу низкого уровня доходности. Из этого следует, что этот робот является неэффективным и должен быть удален из портфеля с возможной заменой его на новый.

Заключение

В работе сделана еще одна попытка совместить в портфельной модели два типа описаний: вероятностные и нечетко-множественные. Впервые такая попытка в портфельных задачах была предпринята нами в [2]. Потом нам пришлось временно отказаться от вероятностной парадигмы моделирования, для получения более выпуклых результатах в новой для того времени парадигме – нечетко-множественной.

Некоторые результаты дали нам понять, что корреляционная матрица вносит в модель гораздо меньшую погрешность, нежели разбросы по доходности и волатильности активов, и это обстоятельство позволило нам успокоиться на время, тем более что корреляционная матрица просто не вписывалась в наши нечеткие модели. В такой успокоенности мы провели два-три года.

Однако затем выяснилось, что отказ от учета корреляции активов в модели в ряде частных случаев искажает модель, особенно для случая рассмотрения сборок «актив + опцион». Мы включили в рассмотрение зеркальные нечеткие числа и зеркальные интервалы, и на время острота проблемы опять была снята. Но вопрос детального учета неполной отрицательной корреляции остался нерешенным, и только сейчас мы сделали первую робкую попытку такой учет произвести. Этот вариант учета следует считать приближенным, и в ряде случаев он тоже небезупречен, дает краевые искажения. Но значение этих искажений для результата пренебрежимо мало.

Возможно, мы бы и не стали возвращаться к теме корреляции, если бы не насущная практическая проблема управления портфелями торговых роботов, которая сейчас находится в центре нашего внимания, профессионального и делового. Здесь остро встал вопрос о применении локботов, потому что профессиональные торговые роботы вытесняют локботов из портфеля, не давая им полноценно зарабатывать. Встает вопрос о том, чтобы в принципе отказаться от локботов как от стиля в алгоритмической торговле деривативами. Но для этого необходимо было взвесить роль неполной отрицательной корреляции актива в портфеле, даже при низкой его доходности. Сегодня мы располагаем аналитическим инструментом, который позволит нам принять решение о локботе более взвешенно и обоснованно.

Литература

1. Абдулаева З.И. Стратегический анализ инновационных рисков [Текст] / З.И. Абдулаева, А.О. Недосекин. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 146 с.
2. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций [Текст] / А.О. Недосекин. – СПб. : Сезам, 2002. – 181 с.
3. Недосекин А.О. Оптимизация фондового портфеля, состоящего только из опционов [Текст] / А.О. Недосекин // Банки и риски. – 2005. – №2.
4. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний [Текст] : автореф. дисс. … д-ра экон. наук / А.О. Недосекин. – СПб. : СПбГУЭФ, 2004. – 280 с.
5. Недосекин А.О. Финансовая математика. Основы финансовой математики. Анализ и моделирование финансовых рынков [Текст] / А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 220 с.
6. Недосекин А.О. Оптимизация бизнес-портфеля, содержащего реальные опционы [Текст] / А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева // Аудит и финансовый анализ. – 2013. – №1. – С. 249-253.
7. Недосекин А.О. Корреляционная матрица и ее роль в оптимизации фондового портфеля [Электронный ресурс] / А.О. Недосекин, Д.Н. Бессонов. URL: http://www.mirkin.ru/_docs/articles03-052.pdf.
8. Chopra V.K. The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice [Text] / V.K. Chopra, W.T. Ziemba // Worldwide asset and liability modeling. – Cambridge University Press, 1998.
9. Dubois D. Fuzzy sets and systems [Text] / D. Dubois, H. Prade. – N.Y., Academic Press, 1980.
10. Li J. Optimal portfolio choice with fat tails [Electronic resource] / J. Li // NBER Reports/ – 2009. – Sep. URL: http://www.nber.org/aging/rrc/papers/orrc09-16.pdf
11. Puri M.L. Fuzzy random variables [Text] / M.L. Puri, D.A. Ralesku // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Pp. 409-422.

Ключевые слова

Торговые роботы; деривативы; опционы; фондовый портфель; корреляция; зеркальные интервалы; зеркальные нечеткие числа; волатильность; оптимизация; градиентный метод; риск.

Недосекин Алексей Олегович

Абдулаева Зинаида Игоревна

РЕЦЕНЗИЯ

Рецензируемая статья посвящена актуальной проблеме оптимизации фондовых портфелей на торговых роботах, когда портфель полностью составлен из деривативов на базовые активы. Прежде эта задача решалась авторами работы приближённо, без учёта данных корреляционной матрицы. Вранной работе корреляция активов в портфеле учтена точно.

В статье исследуется вопрос внедрения в портфель торгового робота (локбота), занимающего противоположные позиции в моменты, когда портфель доходит до точки значительного выигрыша (тейкпрофит) или значительного проигрыша (стоплосс). В этом отношении, локбот выступает в качестве хеджирующего опциона в структуре исходного портфеля роботов, торгующих фьючерсами.

Оптимизация портфеля проводится в нечеткой постановке задачи, когда доходность базового актива представляет собой нечеткое число треугольной формы.

Введение хеджирующего опциона в портфель базовых активов трансформирует исходную треугольную форму доходности, приводя эту форму к кусочно-линейному виду. Сам по себе фьючерс на базовый актив тоже может быть интерпретирован с точки зрения доходности как треугольное число с поправкой на финансовый рычаг цены, образующийся на соотношении цены базового актива и гарантийного обеспечения по фьючерсу на этот актив.

Портфельный риск в статье не совпадает с волатильностью, как это традиционно понимает портфельная теория, но представляет собой возможность того, что результирующая доходность по портфелю оказывается ниже нормативного требования инвестора. Рациональным требованием инвестора в случае портфельных инвестиций является доходность на уровне не хуже 25-30% годовых.

Оптимизация портфеля проводится приближенным градиентным методом, с формированием эффективной границы портфельного множества в координатах доходность портфеля – риск портфеля. Рассматривается расчетный пример.

Материал статьи является новым и оригинальным, не содержит государственной тайны и коммерческих секретов третьих сторон.

Считаю, что статья может быть опубликована в открытой научной печати.

Рейшахрит Е.И., д.э.н., доцент, профессор кафедры экономики, учета и финансов Национального минерально-сырьевого университета «Горный».