3.5. СОПРЯЖЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ПО УРОВНЮ ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПАРЕТО[1]

Колмаков И.Б., д.э.н., профессор, кафедра информатики

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ

В статье рассматривается решение проблемы построения двухфункцинального распределения населения по уровню денежных доходов. Выполнено сопряжение логарифмически нормального распределения населения по уровню денежных доходов с распределением Парето. По результатам решения задач сопряжения для долей численности и долей доходов населения в двухфункциональном распределении установлена граница начала усечённого распределения Парето. Обнаружена фундаментальная связь дисперсии логарифма дохода логарифмически нормального распределения с параметром кривизны распределения Парето как особая точка стандартного нормального распределения. На основе решения задач нормирования для объемов долей численности и объемов долей доходов населения в двухфункциональных распределениях установлена граница второго усечения распределения Парето. Результаты практических расчетов параметров сопряжения и нормирования для данных 2006 г. и 2012-2014 гг. приведены в таблице. Графики двухфункцинального распределения населения по уровню денежных доходов построены на данных 2013 г.

Распределение населения по уровню денежных доходов – очень сложная функция, которую не удается математически описать некоторым одним законом распределения, хотя теоретические, методологические и даже практические предложения достаточно широко представлены в отечественных и зарубежных источниках [1-9, 12]. Слишком разные социальные условия, источники доходов и источники расходов соответствуют статусу различных социальных групп. Не случайно поэтому некоторые исследователи предлагают рассматривать различные законы распределения денежных доходов населения для групп населения с разным социальным статусом и разным уровнем денежных доходов.

Известно, что существует группа обездоленного населения [13]. Вариант математического описания доходов этой группы приведен в [7]. Существуют группы населения:

- бедного;
- малообеспеченного;
- среднего класса;
- с высокими доходами;
- со сверхвысокими доходами.

[1] Настоящее исследование проведено в рамках работ выполняемых по гранту РФФИ № НК 13-07-0085814 от 15.03.2014 и 14-07-00603

Для каждой группы, по-видимому, существует собственное распределение по уровню денежных доходов. Но инструментов прямого измерения доходов отдельно для каждой группы на сегодня не существует.

На государственном уровне сегодня применяются два канала измерения денежных доходов населения: выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств и косвенные оценки денежных доходов населения по данным макроэкономических измерений. Выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств оставляет за пределами обследования обездоленных. У этих 5-7% населения нет «домашних хозяйств» [13, 7].

Достаточно «удачно» выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств охватывает и представляет группы бедного населения, малоимущих и частично (примерно половину) среднего класса. Если проследить публикуемые Федеральной службой государственной статистики (Росстат) данные за последние 15-18 лет распределения населения по уровню денежных доходов, то обнаруживается четкая закономерность: поведение доходов 60-65% населения с совокупными доходами в объеме 40-35% могут быть достаточно хорошо описаны логарифмически нормальным распределением. Покажем это на примерах распределения населения по уровню денежных доходов за 2012- 2014 гг., публикуемых Росстатом. (На момент подготовки статьи Росстат опубликовал только полугодовые данные за 2014 г.). Данные о распределении населения по размеру среднемесячного среднедушевого денежного дохода, указаны в столбцах X_i (руб.) и $\Delta F(x_i)$ (%) табл. 1. Расчеты выполнены по известной методике, но для прозрачности расчетов и возможности проверок приведены полностью.

Восстановление параметров распределения по отчетным данным функции распределения

Рассматриваемый способ определения параметров логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевого дохода сводится к отысканию параметра σ из публикуемых Росстатом данных [1, 11], содержащих сведения о функции распределения в следующем виде. Для диапазона дохода (от левой границы X_i до правой границы X_{i+1}) приводится доля населения, имеющего доход в этом диапазоне (приращение функции распределения $\Delta F(X_i)$). Математически это означает, что диапазону доходов (от 0 до X_i) ставится в соответствие значение функции логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевого дохода $F(0 < x < X_i)$ как накопленной сумме долей численности (приращениям функции распределения $\Delta F(X_i)$) со всеми доходами (от 0 до X_i):

$$F(0 < x < X_i) = \sum_i \Delta F(X_i) = F(X_i). \quad (1)$$

Предполагается, что публикуемые отчетные данные – функция распределения $F(X_i)$ и ее приращения $\Delta F(X_i)$ – могут быть аппроксимированы двухпараметрическим логарифмически нормальным распределением [4 с.19-20; 11, с. 79]. Один из параметров – среднее значение душевого денежного дохода X_c – всегда известен. Для определения второго параметра – среднеквадратического отклонения логарифма доходов – используется теоретически известная связь параметров логарифмически нормального распределения с параметрами нормированной функции Лапласа $\Phi_0(Z_i)$:

$$\Phi_0(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{Z_i} e^{-\frac{v^2}{2}} dv. \qquad (2)$$

Действительно, если к функции логарифмически нормального распределения $F(X_i)$

$$F(X_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_i} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (3)$$

применить замену переменной

$$z = (\ln x - \mu)/\sigma \qquad (4)$$

и учесть, что $dz = \frac{1}{\sigma \cdot x} dx$, то получаем

$\Phi(Z_i) = F(X_i)$.

Нормированная функция Лапласа приводится во многих монографиях, справочниках и программных продуктах (например, Excel). Это позволяет решать как прямые задачи – отыскания $\Phi(Z_i)$ по известному значению Z_i ,– так и обратные задачи – отыскания Z_i по известному значению $\Phi(Z_i)$ (рис. 1).

2012	Xi (РУБ.)	Xc	ΔF(x)%	F(X) %	F(x) доли	Z	Z'2	LN(Xc/Xi)	2*LN(Xc/Xi)	КОРЕНЬ	σ	Кх	Xmod	μ	
1	**0**	**22802**	0	0	0										
2	**5000**		5,8	5,8	0,058	**-1,57179**	2,47051	1,51739718	3,034794364	2,34633931	0,774552	2,459351	9271,431	9,73462	
3	**7000**		6,9	12,7	0,127	**-1,14069**	1,30117	1,18092495	2,361849891	1,9139012	0,773214	2,451718	9300,293	9,73566	
4	**10000**		12	24,7	0,247	**-0,68396**	0,4678	0,82425	1,648500003	1,4547516	0,770791	2,438	9352,626	9,73753	
5	**14000**		15,4	40,1	0,401	**-0,25076**	0,06288	0,48777776	0,97555553	1,01903675	0,768277	2,423893	9407,059	9,73947	
6	**19000**		15,5	55,6	0,556	**0,140835**	0,01983	0,18239612	0,364792231	0,6201829	0,761018	2,383865	9565,012	9,74502	
7	**27000**		16,7	72,3	0,723	**0,591777**	0,3502	-0,1690018	-0,33800354	0,11043707	0,702214	2,095216	10882,74	9,78804	65%
8	**45000**		17,1	89,4	0,894	**1,248085**	1,55772	-0,6798274	-1,35965479	0,44504034	1,693125	73,70047	309,3834	8,60125	
9	свыше 45000		10,6	100	1										
10	**6510**	**ПМ**	**15,6 млн.**	**10,9**	**0,109**	-1,23186	1,51749	1,25349564	2,506991277	2,00611053	0,774247	2,457605	9278,017	9,73486	
											0,77035		**9362,406**	**9,73786**	

2013	Xi (РУБ.)	Xc	ΔF(x)%	F(X) %	F(x) доли	Z	Z'2	LN(Xc/Xi)	2*LN(Xc/Xi)	КОРЕНЬ	σ	Кх	Xmod	μ	
1	**0**	**25512**	0	0	0										
2	**5000**		4,4	4,4	0,044	**-1,70604**	2,91058	1,62969926	3,259398516	2,48394496	0,777902	2,478606	10292,76	9,84433	
3	**7000**		5,7	10,1	0,101	**-1,27587**	1,62785	1,29322702	2,586454043	2,05287821	0,777004	2,473423	10314,33	9,84502	
4	**10000**		10,6	20,7	0,207	**-0,81687**	0,66728	0,93655208	1,873104155	1,59385964	0,776985	2,473312	10314,79	9,84504	
5	**14000**		14,4	35,1	0,351	**-0,38262**	0,1464	0,60007984	1,200159682	1,16041343	0,777791	2,477969	10295,41	9,84441	
6	**19000**		15,3	50,4	0,504	**0,010027**	0,0001	0,29469819	0,589396383	0,76778703	0,777814	2,478098	10294,87	9,8444	
7	**27000**		17,4	67,8	0,678	**0,462113**	0,21355	-0,0566997	-0,11339939	0,31646391	0,778577	2,482519	10276,54	9,8438	67%
8	**45000**		19,1	86,9	0,869	**1,121677**	1,25816	-0,5675253	-1,13505064	0,35086692	1,472543	25,85687	986,6508	9,0627	
9	свыше 45000		13,1	100	1										
10	**7306**	**ПМ**	**15,7млн**	**11**	**0,11**	-1,22653	1,50437	1,25044124	2,500882484	2,001313	0,774785	2,460679	10367,75	9,84675	
											0,777265		**10308,06**	**9,84482**	

2014	Xi (Руб.)	Xc	ΔF(x)%	F(X) %	F(x) доли	Z	Z'2	LN(Xc/Xi)	2*LN(Xc/Xi)	КОРЕНЬ	σ	Кх	Xmod	μ	
1	**0**	**27523**													
2	**5000**														
3	**7000**		10	10	0,1	**-1,28155**	1,64237	1,36911187	2,738223739	2,09298785	0,811436	2,684899	10251,04	9,89356	
4	**10000**		10,8	20,8	0,208	**-0,81338**	0,66159	1,01243693	2,024873852	1,63904286	0,825662	2,780353	9899,104	9,88192	
5	**14000**		14,6	35,4	0,354	**-0,37454**	0,14028	0,67596469	1,351929378	1,22156138	0,847018	2,933391	9382,658	9,86406	
6	**19000**		15,6	51	0,51	**0,025069**	0,00063	0,37058304	0,741166079	0,86127494	0,886344	3,249198	8470,706	9,82997	60%
7	**27000**		17,6	68,6	0,686	**0,484544**	0,23478	0,01918515	0,038370305	0,5226404	1,007184	4,579684	6009,804	9,71557	
8	**45000**		18,9	87,5	0,875	**1,150349**	1,3233	-0,4916405	-0,98328094	0,5831147	1,733464	90,68088	303,5149	8,72033	
9	**60000**		6,2	93,7	0,937	**1,530068**	2,34111	-0,7793225	-1,55864509	0,88456867	2,414636	6283,626	4,380115	7,30754	
9	свыше 60000		6,3	100	1										
10	**7688**	**ПМ**	**19,8 млн.**	**14,8**	**0,148**	-1,04505	1,09213	1,1994765	2,398952998	1,8684437	0,823394	2,764795	9954,806	9,88379	
											0,838771		**9591,662**	**9,87066**	

Рис. 1. Расчеты фактических параметров отчетных распределений

Нас интересует обратная задача. В Excel существует функция НОРМСТОБР(Ф), которая по известному значению $\Phi(Z_i) = F(X_i)$ выдает значение аргумента Z_i. Связь между Z_i и параметрами μ и σ устанавливается уравнением (4). Исключим из этого уравнения параметр μ, заменив его известным средним значением среднедушевого дохода X_c, которое вычисляется по отчетным макропоказателям и среднегодовой численности населения. Среднее значение среднедушевого денежного дохода определяется параметрами логнормального распределения $X_c = exp(\mu + 0{,}5\sigma^2)$, из чего следует, что

$$\mu = \ln X_c - 0{,}5\sigma^2. \qquad (5)$$

Подставляя выражение для μ из (5) в (4), получим:

$$Z_i = (\ln X_i - \ln X_c + 0{,}5\sigma^2)/\sigma_i. \qquad (6)$$

Учитывая, что параметр $\sigma_i \neq 0$, это уравнение преобразуется к приведенному квадратному уравнению относительно параметра σ_i:

$$\sigma_i^2 - 2\sigma_i Z_i - 2\ln(X_c/X_i) = 0. \qquad (7)$$

Решение этого квадратного уравнения дает значение параметра σ_i :

$$\sigma_i = Z_i \pm \sqrt{Z_i^2 + 2\ln(Xc/Xi)}\,. \qquad (8)$$

Экономический смысл имеет только положительное значение корня. Теперь, когда нам известно значение параметра σ, из уравнения (5) находим μ, а затем вычисляем X_{mod}, что и дает полное решение задачи идентификации параметров распределения по известным значениям функции распределения. Примеры расчетов фактических параметров отчетных распределений за 2012-2014 гг. приведены на рис. 1.

Дифференциация доходов, определяемая параметром σ, меняется с возрастанием σ (2012-2014 г.). Величина μ стабильно растет с медленно убывающим темпом.

Анализ расчетных параметров распределений для отчетных данных каждого года показывает, что реальное распределение населения по уровню среднедушевых денежных доходов (СДД) отличается от идеализированного. Параметры сохраняются в средней части распределений, отличаясь на правой ветви по мере удаления от среднего значения весьма существенно. Выполненные расчеты показывают, что начальный участок (от нуля до X_{mod}) сравнительно удачно аппроксимируется логарифмически нормальным распределением. Достаточно хорошо аппроксимируется основная часть распределения, заканчивая значениями, несколько большими среднего значения среднедушевого дохода X_c.

Правая финальная часть кривой распределения от X_c до ∞ аппроксимируется неудачно по двум основным причинам: отсутствует информация об этой части кривой в выборочных обследованиях и имеют место косвенные оценки информации об этой части кривой в показателях баланса денежных доходов и расходов населения [11, с. 93-109]. В показателях баланса эта недостающая часть информации экспертно досчитывается из балансовых уравнений по расходной части баланса.

В последней строке таблицы для каждого года приведены параметры логнормального распределения, на основе которых по значению прожиточного минимума выполнялся расчет уровня бедности. Справа каждой таблицы приведена приблизительная оценка численности населения, которое подпадает под действие логнормального закона.

Полученные усредненные параметры μ и σ отчетных значений распределений позволяют получать количественные оценки многих других параметров и показателей, необходимых для решения аналитических задач отчетных периодов и решения проблем прогнозирования показателей дифференциации и поляризации денежных доходов населения [4, 6].

Обнаруженный факт говорит о том, что доходы групп населения с доходами выше среднего уровня, возможно, имеют другие распределения. Многие исследователи полагают, что доходы высокодоходных групп описываются распределением Парето [10, 14, с. 291]. Если согласиться с этой гипотезой, то получается, что реальным объектом исследования становятся доходы около 50 млн. чел. Т.е. доходы около 100 млн. чел. в Российской Федерации описываются логнормальным распределением, а доходы около 50 млн. чел. могут быть описаны распределением Парето. Естественно, что в такой постановке встает проблема сопряжения логнормального распределения для большинства населения с доходами ниже среднего уровня и распределения с законом Парето для населения с доходами выше среднего дохода.

Очевидно, что каждое распределение существует на своем ограниченном конечном интервале измерения (области определения). Логично ожидать, что при таких масштабах применения в точках сопряжения границ применения математических законов не должно возникать провалов или скачков. Обнаруживаемые дополнительные проблемы сопряжения границ, гладкости и нормирования плотностей и функций распределения численности и доходов должны решаться на условиях равенства значений нулевого и первого порядка.

Логарифмически нормальное распределение давно и успешно применяется Росстатом для расчетов показателей денежных доходов населения [1, 11]. Основные свойства логнормального распределения приведены, например, в [1, 4, 9-12].

Приведем здесь некоторые основные свойства усеченного распределения Парето. Еще в конце позапрошлого века (1897 г.) итальянский экономист В. Парето рассматривал распределение дохода налогоплательщиков [9-12].

Степенное распределение с параметром α имеет плотность вероятности

$$p(\alpha,x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^{-(\alpha+1)} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \quad (9)$$

Парето имел дело лишь с теми значениями доходов, которые превышают некоторый порог x_0. Такие распределения были названы усеченными. Парето обнаружил, что закон распределения высоких доходов описывается формулой:

$$p(\alpha,x) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{x_0}\right)\left(\frac{x_0}{x}\right)^{(\alpha+1)} & x > x_0 \\ 0, & x \le x_0 \end{cases} \quad (10)$$

Здесь параметр x_0 обозначает минимальное значение случайной величины, а параметр α характеризует кривизну плотности распределения случайной величины.

Функция усеченного распределения долей численности населения по закону Парето $P(\alpha,x)$:

$$P(\alpha,x) = \int_{x_0}^{x} p(\alpha,u)du =$$

$$= \begin{cases} 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} & x > x_0 \\ 0, & x \le x_0 \end{cases} \quad (11)$$

Моменты k-го порядка распределения случайной величины по закону Парето определяются так:

$$M\xi^k = x_0^k \frac{\alpha}{(\alpha-k)} \qquad k<\alpha. \quad (12)$$

В частном случае первый момент – математическое ожидание – принимает вид:

$$M\xi = x_0 \frac{\alpha}{\alpha - 1} \qquad \alpha > 1. \tag{13}$$

Дисперсия случайной величины, распределенной по закону Парето:

$$D\xi = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)} x_0^2 & \alpha > 2 \\ \infty, & \alpha \le 2 \end{cases} \tag{14}$$

Плотность распределения доходов по закону Парето имеет вид:

$$q(\alpha,x) = x \cdot p(\alpha,x) = \begin{cases} \alpha \cdot x_0^{\alpha} \cdot x^{-\alpha} & x > x_0 \\ 0, & x \le x_0 \end{cases} \tag{15}$$

А функция распределения доходов в абсолютных единицах определяется выражением:

$$Q_A(\alpha,x) = \int_{x_0}^{x} q(\alpha,u)du = \begin{cases} x_0 \frac{\alpha}{\alpha-1}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1}\right] & x > x_0 \\ 0, & x \le x_0 \end{cases} \tag{16}$$

В относительных единицах с учетом нормирования к среднему значению (15) функция распределения доходов по Парето приобретает вид:

$$Q_0(\alpha,x) = (1/M\xi) \int_{x_0}^{x} q(\alpha,u)du = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1} & x > x_0 \quad \alpha > 1 \\ 0, & x \le x_0 \end{cases} \tag{17}$$

Итак, ставится задача получить гибридное распределение население по уровню денежных доходов с помощью двух функций: логарифмически нормального распределения в низкодоходной части и распределения Парето в высокодоходной части. Чтобы описать распределение населения по уровню СДД с помощью двух функций необходимо выполнение условий сопряжения и нормирования. Причем эти условия должны выполняться одновременно, поэтому и необходима дополнительная проверка не противоречивости выполнения всех условий.

Условия сопряжения

1.1. Равенство значений плотностей распределения численности в точке сопряжения.

1.2. Равенство значений производных плотностей распределения численности в точке сопряжения.

2.1. Равенство значений плотностей распределения доходов в точке сопряжения.

2.2 Равенство значений производных плотностей распределения доходов в точке сопряжения.

Следует отметить, что так как речь идет о сопряжениях распределений двух функций, то условия 2.1 и 2.2, которые являются теми же условиями, но для линейных модификаций исходных функций, должны необходимо выполняться в той же точке, если выполняются условия 1.1 и 1.2. Поэтому условия 2.1 и 2.2 практически являются проверочными.

Предполагается, что нам известны параметры логнормального распределения μ и σ (см. рис. 1). Граничная точка – точка сопряжения, – по-видимому, должна принадлежать диапазону

$$e^{\mu} < x_0 < e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \tag{18}$$

Определим, при каких параметрах x_0 и α выполняются первое и второе условия сопряжения, т.е.:

$$f(\sigma,x) = p(\alpha,x), \tag{19}$$

$$f'(\sigma,x) = p'(\alpha,x). \tag{20}$$

Выполнение условия (19) после несложных преобразований дает:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-0{,}5(\ln x_0 - \mu)^2/\sigma^2) = \alpha. \tag{21}$$

Выполнение условия (20) дает:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-0{,}5(\ln x_0 - \mu)^2/\sigma^2)[1 + (\ln x_0 - \mu)/\sigma^2] = \alpha(\alpha+1). \tag{22}$$

Отсюда следует, что:

$$(\ln x_0 - \mu)/\sigma^2 = \alpha. \tag{23}$$

Решение пары (21) и (23) при известных параметрах логнормального распределения позволяет сразу найти x_0. Здесь обнаруживается ожидаемый факт – более общее свойство – фундаментальная связь параметров σ и α. Действительно, подставив (23) в (21), имеем $\alpha\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0{,}5\alpha^2\sigma^2)$. Или, выполнив замену $z = \alpha\sigma$, получаем:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0{,}5 z^2). \tag{24}$$

Произведение параметра кривизны распределения Парето α и среднеквадратического отклонения логарифма дохода σ логарифмически нормального распределения в точке сопряжения этих двух распределений всегда равно тому значению аргумента нормированного нормального распределения Лапласа, при котором значение плотности этого распределения равно значению аргумента.

Решая (24), находим

$$z = 0{,}37223898\ldots \tag{25}$$

Это значение z - фундаментальная константа связи параметров σ и α сопрягаемых распределений. Из (23) с учетом (24) имеем $\ln x_0 - \mu = \sigma z$. Отсюда

$$x_0 = \exp(z\sigma + \mu) = \exp(\alpha\sigma^2 + \mu). \tag{26}$$

Впервые теоретические результаты сопряжения были получены в 2007 г., проверены на данных 2006 г. и приведены в [6]. Спустя семь лет условия сопряжения проверены на отчетных данных Росстата за 2012-2014 гг. и приведены в настоящей статье.

Для параметров логнормального распределения 2006 г. при X_{mod} = 4187 руб. и X_c = 10183 руб.

σ = 0,769734 и μ = 8,9322299 получим

α = 0,483594 и x_0 = 9065,603 руб.

Положение точки сопряжения соответствует диапазону (18). Уравнение распределения Парето с этими параметрами примет вид:

$$p(\alpha,x) = \alpha{*}x_0^{\alpha} / x^{\alpha+1} = \\ =0{,}483594{*}9095{,}6^{0,483594} / x^{1,483594} \qquad x \ge x_0. \qquad (27)$$

Значение x_0, оставаясь меньше X_c, оказалось близким к X_c. Получим аналитическую оценку сравнения x_0 и X_c:

$$X_c / x_0 = exp(0{,}5 - \alpha)\sigma^2 = exp(0{,}5 - z/\sigma)\sigma^2. \qquad (28)$$

Чем ближе значение кривизны α к 0,5, тем ближе x_0 к среднему значению X_c.

Результаты сопряжения плотностей распределения долей численности населения по логарифмически нормальному закону и закону Парето за 2013 г. приведены на рис. 2.

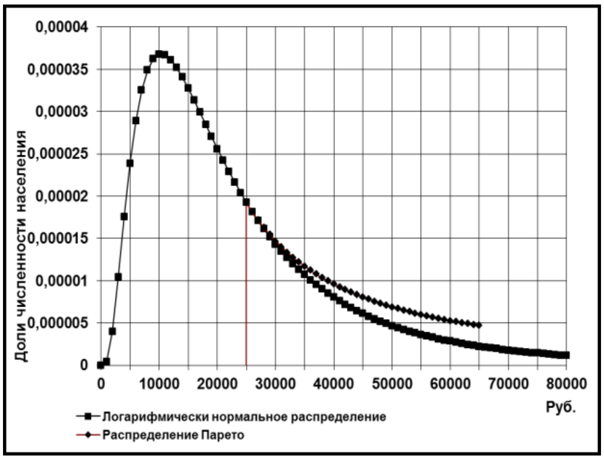

Рис. 2. Двухфункциональное распределение долей численности населения по уровню среднедушевых денежных доходов за 2013 г.

Условия 2.1 и 2.2 могут рассматриваться как аналог первого и второго условий 1.1 и 1.2 для плотности распределения доходов населения. Проверим, при каких параметрах α и x_0 выполняются условия 2.1 и 2.2, т.е.:

$$\varphi(\sigma,x) = q(\alpha,x), \qquad (29)$$

$$\varphi`(\sigma,x) = q`(\alpha,x), \qquad (30)$$

Выполнение условия 2.1 (29) дает:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp(-0{,}5(lnx_0 - \mu)^2/\sigma^2) = \alpha. \qquad (31)$$

Выполнение условия 2.2 (30) дает:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp(-0{,}5(lnx - \mu)^2/\sigma^2)\,[(lnx_0 - \mu)/\sigma^2] = \alpha\alpha. \qquad (32)$$

Отсюда следует, что:

$$(lnx_0 - \mu)/\sigma^2 = \alpha. \qquad (33)$$

Оказалось, что условия (31) и (33) в точности соответствуют условиям (21) и (23). Следовательно, условия (31) и (33) и условия (21) и (23), как и ожидалось, полностью совпадают, не противоречивы и дают одинаковые решения (24) и (25). Результаты сопряжения плотностей распределения денежных доходов населения по логарифмически нормальному закону и закону Парето для 2013 г. приведены на рис. 3.

Сходимость функции Парето для долей численности населения достигается при значениях $\alpha > 1$, а сходимость функции Парето для долей доходов населения достигается при значениях $\alpha > 2$. В нашем случае при известном z и рабочем диапазоне σ (0,6÷0,9), α всегда будет оставаться меньше. Сходимость достигается за счет второго усечения распределения Парето, определяемого по условиям нормировки.

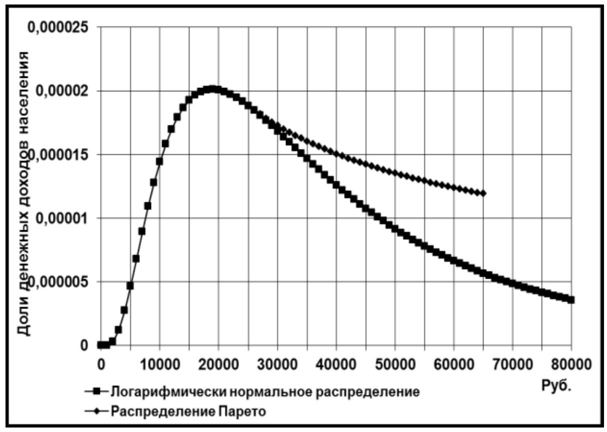

Рис.3. Двухфункциональное распределение доходов населения по уровню среднедушевых денежных доходов за 2013 г.

Условия нормирования.

Исследуем нормирование двухфункционального гибридного распределения по двум направлениям.

1. По долям численности населения. Определяется правая граница – конечная граница доходов X_n, которая соответствует общей численности населения.
2. По долям уровня денежных доходов населения. Определяется правая граница – конечная граница доходов X_s, которая соответствует ограниченному общему объему денежных доходов, определяемых Росстатом.

Эти условия означают, что сумма значений усеченных сопрягаемых функций распределения долей численности должна соответствовать сумме долей численности всего населения, т.е. составлять единицу, а сумма значений усеченных сопрягаемых функций распределения долей доходов должна соответствовать сумме долей всех денежных доходов всего населения (и тоже составлять единицу).

Удовлетворение условий сопряжения (равенство функций и их производных в пограничных точках), по которым устанавливается первая (левая) граница усечения, не противоречит условиям нормирования, по которым устанавливается граница второго (правого) усечения закона Парето.

Условия нормирования долей численности населения. В частном случае из свойств логарифмически нормального закона распределения известно, что

$$F(X_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_{0i}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (34)$$

Интеграл (34) при замене переменной (4) переводится в нормированную функцию Лапласа $\Phi(Y_0)$:

$$\Phi(Y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{Y_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (35)$$

и тогда

$$F(X_0) = \Phi(Y_0). \tag{36}$$

В Excel существует функция НОРМ.СТ.РАСП(Y_o), которая по известному значению аргумента Y_o выдает значение функции $\Phi(Y_o) = F(X_0)$. Для данных за 2006 г. $F(9065{,}6) \cong \Phi(0{,}233864224\ldots) = 0{,}59526\ldots$, т.е. доля численности населения с доходами до X_o составит 0,59526…. Тогда доля численности населения с доходами выше X_o составит

$1 - F(X_o) \cong 0{,}40474\ldots$,

а конечная граница доходов X_n определяется интегральной долей численности населения из условия, когда в первом случае для $x_0 < x < X_n$ доля численности населения по закону Парето должна составить $1 - F(X_o)$. Основное условие нормировки долей численности принимает вид:

$$P(x_0 < x < X_n) = 1 - F(X_o). \tag{37}$$

Используем найденные из условий сопряжения параметры распределения Парето, которые должны применяться при пересчете объемов нормирования. Найдем из этого условия значение верхнего предела интеграла X_n:

$$1 - F(X_0) = P(x_0 < x < X_n) = P(\alpha, X_n) = \int_{X_0}^{X_n} p(\alpha, u)du$$

$$= 1 - \left(\frac{x_0}{x_n}\right)^{\alpha}. \tag{38}$$

Решением (38) будет

$$X_n = X_o F(X_0)^{-\frac{1}{\alpha}} = X_o \sqrt[\alpha]{\frac{1}{F(X_0)}} =$$

$$= X_o k_n = 2{,}9519 X_o. \tag{39}$$

При параметрах распределения за 2006 г. ограничение доходов по сумме долей численности населения составит:

$$X_n = 2{,}9519 X_o = 2{,}9519 * 9065{,}6 \text{ руб.} = 26761{,}58 \text{ руб.} \tag{40}$$

Условия нормирования долей доходов населения. Чтобы получить оценку доходов населения с доходами ниже X_o для координаты D_0, находим соответствующее значение дохода. В частном случае для двухпараметрического логарифмически нормального закона распределения известно, что доля объема денежных доходов населения с доходами до X_o составит:

$$D_0 = \Psi(X_0) = \int_0^{X_0} \varphi(v)dv =$$

$$= \frac{1}{X_c \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{X_0} e^{-\frac{(\ln v - \mu)^2}{2\sigma^2}} dv \tag{41}$$

Интеграл (41) при замене переменной

$$t = \frac{\ln v - \mu}{\sigma} - \sigma \tag{42}$$

и, учитывая, что $dt = \frac{1}{\sigma \cdot v} dv$, переводится в нормированную функцию Лапласа $\Phi(V_o) = \Psi(X_0)$:

$$\Phi(V_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{V_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{43}$$

и тогда

$$D_0 = \Psi(X_0) = \Phi(V_o). \tag{44}$$

Для данных за 2006 г. $\Psi(9065{,}6) \cong \Phi(0{,}53587055\ldots) = 0{,}29602401\ldots$, т.е. D_0 – доля объема денежных доходов населения с доходами до X_o составит 0,29602401…. Тогда доля объема денежных доходов населения с доходами выше X_o составит $1 - D(X_o) \cong 0{,}70397599\ldots$, или свыше 70%. Плотность распределения доходов $q(\alpha, u)$ по закону Парето представлена (15), а функция распределения доходов по закону Парето в абсолютных единицах, без учета нормирования интегрального распределения объёмов денежных доходов примет вид:

$$Q_0(x_0 < x < X_s) = Q_0(\alpha, X_s) = \int_{x_0}^{X_s} q(\alpha, u)du =$$

$$= X_o \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x_s}\right)^{\alpha - 1}\right) \qquad x_0 < x < x \tag{45}$$

Тогда уравнение баланса денежных доходов населения с доходами выше X_o по логарифмически нормальному закону и закону Парето (45) составит:

$$X_c(1 - D_0) = X_o \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(1 - \left(\frac{x_0}{x_s}\right)^{\alpha - 1}\right) \qquad x_0 < x < x_s \tag{46}$$

Решение уравнения (46) в долях денежных доходов населения для 2006 г. примет вид

$$X_s = X_o \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha}(1 - D_0)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = X_o k_s \approx 2{,}961 * X_o. \tag{47}$$

Таблица 1

ПАРАМЕТРЫ СОПРЯГАЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Логнормальное распределение					Распределение Парето					
Год	X_{mod}	X_c	б	μ	α	Xo	F_0	D_0	Kn	Xn
2006	4187	10183	0,76973	8,93223	0,48359	9065,6	0,59245	0,29602	2,952	26761,6
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2012	9362,4	22802	0,77035	9,73786	0,48321	20286,9	0,59231	0,29568	2,956	59968,6
2013	10308	25512	0,77727	9,84482	0,47891	25188,6	0,64514	0,34272	2,497	62901,8
2014	9591,6	27523	0,83837	9,87134	0,44379	26456,8	0,64507	0,26065	2,685	71046,8

Предположительно границы X_n и X_s должны совпадать, так как характеризуют один и тот же процесс. Если обозначить $\beta = \alpha / (1 - \alpha)$, то при равенстве k_n и k_s из (39) и (46) должно выполняться условие

$$F(X_o) = \left(1 - \frac{X_c}{\beta X_0}(1 - D_0)\right)^{\beta}. \tag{48}$$

Если условие (48) не выполняется, то итерационно уточняется значение α, удовлетворяющее условию (48), и все параметры распределений пересчитываются. Расчеты параметров логарифмически нормального закона распределения и распределения Парето, удовлетворяющие условиям сопряжения и нормирования за 2006 и 2012-2014 гг. сведены в табл. 1.

Здесь F_0 и D_0 определяются соответствующими стандартными процедурами по нормированной функции Лапласа Φ после соответствующей замены переменной.

В итоге получаем дважды усеченное распределение Парето:

$$p(\alpha,x) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{x_0}\right)\left(\frac{x_0}{x}\right)^{(\alpha+1)} & x_0 < x < x_n \\ 0, & x \le x_0 \text{ ..и.. } x \ge x_n \end{cases} \qquad (49)$$

с параметрами α, x_0 и x_n:

$$\alpha = z/\sigma; \qquad x_0 = \exp(z\sigma + \mu) = \exp(\alpha\sigma^2 + \mu);$$

$$x_n = x_0\, F(x_0)^{-\frac{1}{\alpha}} \qquad (50)$$

Абсурдно предполагать, что душевой денежный доход физических лиц может иметь какие-либо ограничения. Смысл решения (49) состоит в трактовке. В соответствии с методологией формирования показателей баланса денежных доходов и расходов населения (БДДРН) для заполнения статей баланса достаточно сумм, ограниченных значениями x_n из (49). Росстат ежеквартально указывает суммы ограниченных доходов населения и уже этим определением закладывает ограничения доходов, определяемых статьями баланса. Деньги, получаемые сверх этой суммы физическими лицами, уже приобретают иную институциональность: могут быть использованы на финансовых рынках, в прямых инвестициях, покупке недвижимости, выведены за рубеж, потрачены на услуги, товары или другие цели, не учитываемые статьями БДДРН. С такой точки зрения ограничение душевых денежных доходов населения принимает конкретный экономический смысл: до определенной границы денежные доходы вписываются в статьи БДДРН, а после этой (условной для каждого года) границы денежные доходы приобретают другую направленность. На рис. 4 приведена гибридная функция распределения численности населения по уровню СДД за 2013 г. Сопряжение выполнено по варианту нормирования накопленных долей численности населения по уровню СДД (рис. 4).

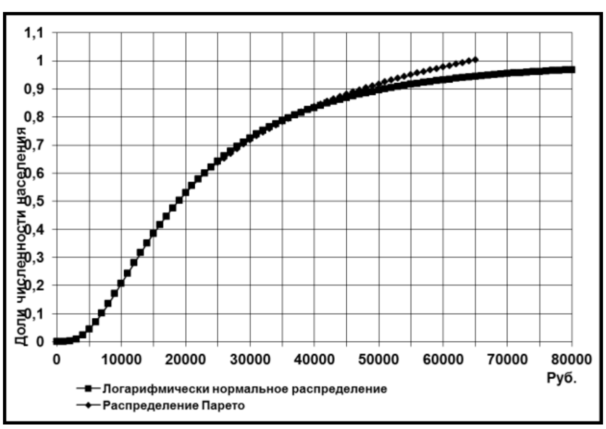

Рис. 4. Гибридная функция распределения долей численности населения по уровню среднедушевых денежных доходов за 2013 г.

На рис. 5 приведена гибридная функция распределения долей объемов денежных доходов населения по уровню СДД за 2013 г. Сопряжение выполнено по варианту нормирования накопленных долей денежных доходов населения по уровню СДД. Естественно, что такие подходы открывают новые направления исследований.

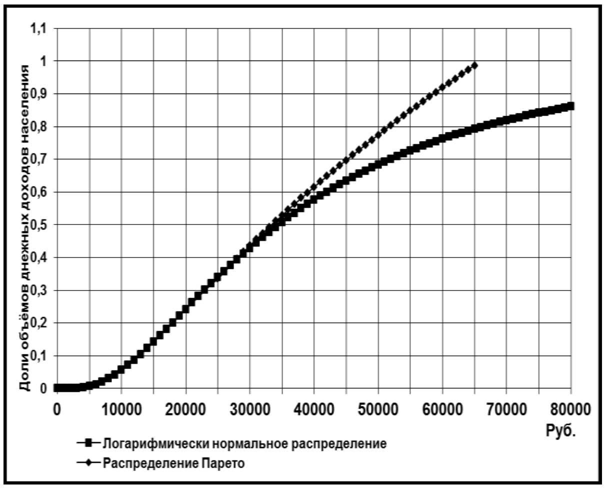

Рис. 5. Гибридная функция распределения долей объемов денежных доходов населения по уровню СДД за 2013 г.

Методы расчета распределения населения по уровню доходов применяются не только на федеральном, но и на региональном уровне. Поэтому, изложенные здесь методы определения параметров двухфункциональных распределений могут быть применены как на федеральном, так и на региональном уровне.

Литература

1. Великанова Т.Б. и др. Совершенствование методики и моделей распределения населения по среднедушевому доходу [Текст] / Т.Б. Великанова, И.Б. Колмаков, Е.Б. Фролова // Вопросы статистики. – 1996. – №5. – 50-58 с.
2. Великанова Т.Б. и др. Распределение населения по среднедушевым доходам. Регионы России [Текст] / Т.Б. Великанова, Б.П. Веденеев, И.Б. Колмаков // Вестн. экономики. – 1997. – №2. – С. 25-47
3. Колмаков И.Б. Гипотезы теории опережающего потребления домашних хозяйств [Текст] / И.Б. Колмаков // Аудит и финансовый анализ. – 2007. – №3. – С. 410-421.
4. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации денежных доходов населения [Текст] / И.Б. Колмаков. – М.: Ин-т микроэкономики, 2004. – 168 с.
5. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей уровня бедности [Текст] / И.Б. Колмаков // Вопросы статистики. – 2005. – №9. – С. 44-54.
6. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации и поляризации денежных доходов населения [Текст]: автореф. дисс. … д-ра экон. наук / И.Б. Колмаков. – М., 2008.
7. Колмаков И.Б. Методы прогнозирования показателей уровня бедности с учетом обездоленных групп населения [Текст] / И.Б. Колмаков // Проблемы прогнозирования. – 2008. – №5. – С. 95-109.

8. Колмаков И.Б. Методы расчета показателей поляризации денежных доходов населения [Текст] / И.Б. Колмаков // Вопросы статистики. – 2007. – №9. – С. 28-35.
9. Королюк В.С. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
10. Лернер Э.Ю. Экономическое моделирование и прогнозирование на компьютере [Текст] / Э.Ю. Лернер, О.А. Кашина. Казань: Изд-во КГУ, 2002.
11. Методологические положения по статистике [Текст] / Госкомстат России. – М., 1996.
12. Павловский З. Введение в математическую статистику [Текст] / З. Павловский. – М.: Статистика, 1967. – 285 с.
13. Римашевская Н.М. Четыре принципиальных вопроса преодоления бедности в России [Текст] / Н.М. Римашевская // Народонаселение. – 2006. – №2. – С. 9-13.
14. Суринов А.Е. Доходы населения. Опыт количественных измерений [Текст] / А.Е. Суринов. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 432 с.
15. Суринов А.Е. Уровень жизни населения России: 1992-2002 гг. (по материалам официальных статистических наблюдений) [Текст] / А.Е. Суринов. – М.: ИИЦ «Статистика России», 2003. – 279 с.

Ключевые слова

Распределение населения по уровню денежных доходов; логарифмически нормальное распределение населения; усеченное распределение Парето; двухфункциональное распределение; условия сопряжения; условия нормирования; фундаментальная связь дисперсии логарифма дохода логарифмически нормального распределения с параметром кривизны распределения Парето; граница второго усечения распределения Парето; дважды усеченное распределение Парето.

Колмаков Игорь Борисович

РЕЦЕНЗИЯ

Статья посвящена исследованию актуальных проблем, а именно, методологии измерения распределения населения по уровню денежных доходов. Применение логарифмически нормального распределения населения по уровню денежных доходов приемлемо описывает распределение примерно до уровня среднего дохода. В этом диапазоне сосредоточено до 63-67% населения и около 33-37% доходов населения. Распределение остальных почти 70% доходов населения оцениваются почти экспертно. Многие авторы склонялись к тому, чтобы описывать доходы высокодоходных групп усеченным слева распределением, предложенным Парето.

Автор впервые нашел практическое решение проблемы сопряжения логарифмически нормального распределения населения по уровню денежных доходов с распределением Парето. По условиям гладкости установлена левая граница начала усеченного распределения Парето, а по условиям нормирования найдено положение правой границы усечения. Т.е. автору удалось установить, что распределение низкодоходных групп по уровню денежных доходов хорошо описывается логарифмически нормальным распределением, а распределение высокодоходных групп по уровню денежных доходов хорошо описывается распределением Парето. Найденные критерии гладкости и нормирования совпадают как для долей численности населения, так и для долей доходов населения. На основе выполненных исследований получено дважды усеченное распределение Парето, которое и описывает распределение по уровню денежных доходов высокодоходных групп населения. Особого внимания заслуживает трактовка высоких доходов, не наблюдаемых ни в выборочных обследованиях домашних хозяйств, ни в показателях баланса денежных доходов и расходов населения (БДДРН).

Результаты практических расчетов параметров сопряжения и нормирования по двухфункциональным распределениям для данных 2006 г. и 2012-2014 гг., приведенные в статье, не противоречат ни результатам выборочного обследования, ни результатам обработки показателей БДДРН, публикуемых Федеральной службой государственной статистики РФ (Росстат).

Приведенные графики гибридных распределений населения по уровню денежных доходов, построенные на данных 2013 г., подтверждают работоспособность предлагаемой автором методологии.

Бобков В.Н., д.э.н., профессор, Заслуженный деятель науки РФ, генеральный директор Открытого акционерного общества «Всероссийский центр уровня жизни»

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ