# 3.6. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ФИНАНСОВЫМИ РЕСУРСАМИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Мищенко А.В., д.э.н., профессор кафедры логистики, Национальный исследовательский институт – Высшая школа экономики;
Артеменко О.А., аспирант кафедры «Математические методы в экономике» Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова

В статье рассмотрены динамические модели управления ограниченными ресурсами промышленных предприятий. Рассмотрены возможности применения данных моделей при интервальном задании параметров, в условиях неопределенности исходных данных и с учетом привлечения предприятием заемных средств. Задачи решаются с помощью экономико-математического моделирования. На примере промышленного предприятия проиллюстрирована реализация модели оптимизации управления потоками производственных ресурсов.

## Оптимальное распределение ресурсов в детерминированной модели конвейерного типа

Конвейерные системы обработки заявок характеризуются параллельной одновременной обработкой нескольких видов заявок на различных технологических операциях при заданной интенсивности их поступления.

Параллелизм обработки одной партии заявок на нескольких последовательных операциях обработки достигается за счет того, что возможна передача любой части обработанной партии заявок на последующую операцию, в отличие от систем календарного планирования, где обработка партии заявок возможна только после того как на предыдущей операции обработана полностью вся партия заявок.

Под заявками могут пониматься детали, полуфабрикаты и заготовки изделий на промышленных предприятиях, информационные документы на вычислительных и информационных центрах, специализирующихся в области компьютерной обработки, транспортируемые грузы, поступающие на пункты перевозки.

При анализе работы конвейерной системы обработки заявок пользователя могут интересовать прежде всего такие показатели работы:

- время ожидания заявок в очереди на обработку;
- производительность системы по каждому виду обрабатываемых заявок;
- объем межоперационных заделов на конец директивного периода;
- общий объем обработанных заявок за директивный период.

Перечисленные показатели работы системы зависят от того, насколько рационально распределены ресурсы системы, участвующие в обработке поступающего потока заявок.

Рассмотрим основные уравнения, описывающие функционирование конвейерных систем.

Технологическая схема обработки заявок в конвейерной системе может быть представлена в виде орграфа $G(M,N)$, в котором вершины имитируют операции обработки, а дуги задают технологическую последовательность обработки заявок на операциях. Таким образом, анализируемая система относится к классу технологических задач [2]. Обозначим через $V(t,\tau)$ вектор-функцию компонента $i$, который представляет очередь заявок, имеющих время ожидания в системе не более чем $\tau(\tau \geq 0)$. Введем также векторы-функции $U(t,\tau)$ и $Q(t,\tau)$ так, что $U_i(t,\tau)$ задает интенсивность поступления заявок со временем ожидания в системе не более $\tau$ на операцию $i$ в момент времени $t$. Аналогично определяется интенсивность обработки заявок $Q_i(t,\tau)$ на операции $i$.

Будем предполагать, что $U(t,\tau)$ содержит в качестве аддитивной компоненты вектор-функцию $U_0(t,\tau)$ внешних поступлений, по предположению имеющих нулевой возраст:

$$U_i(t,\tau) = I(\tau)\, U_i^0(t),$$

где

$I(\tau)$ – функция скачка, заданная следующим образом:

$$I(\tau) = \begin{cases} 0, \tau < 0; \\ 1, \tau > 0. \end{cases}$$

Для очереди $V_i(t,\tau)$ операции $i$ уравнение баланса:

$$\frac{\partial V_i(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial V_i(t,\tau)}{\partial \tau} = U_i(t,\tau) - Q_i(t,\tau). \quad (1)$$

Его можно получить, учитывая, что приращение:

$$V_i(t+\Delta t,\tau) - V_i(t,\tau)$$

очереди за время $dt$ складывается из разности:

$$(U_i(t,\tau) - Q_i(t,\tau))$$

и объема заявок, выбывших из очереди вследствие старения. За время $dt$ объем выбывших заявок составит:

$$\frac{\partial V_i(t,\tau)}{\partial \tau} dt.$$

Интенсивность поступления заявок $U(t,\tau)$ определим следующим образом:

$$U(t,\tau) = U^0(t,\tau) + \hat{D}(t)\, Q(t,\tau). \quad (2)$$

где

матрица $\hat{D}(t)$ такова, что величина $d_{ij}(t)\, Q_j(t,\tau)$ задает интенсивность заявок, передаваемых с элемента $i$ на элемент $j$;

$d_{ij}(t)$ – элементы матрицы $\hat{D}(t)$.

Уравнение (2) задает поступления заявок для системы обработки однородных заявок. Если же обрабатываются заявки нескольких, то для заявок $K$ видов зададим межэлементные связи в технологическом графе $G(M,N)$, отражающем последовательность обработки заявок на операциях трехмерным матричным оператором $\tilde{D}(t)$, действующим на матрицу $Q(t,\tau)$:

$$U(t,\tau) = U^0(t,\tau) + \tilde{D}(t)\, Q(t,\tau).$$

Здесь

$U_{ij}(t,\tau)$, $Q_{ij}(t,\tau)$, $U_{ij}^0(t,\tau)$ – элементы соответствующих матриц

$$(i = 1, ..., N_i,\ j = 1, ..., K),$$

где

$N_i$ – число операций в цикле обработки заявок вида $i$;

$d_{lij}(t)$ – элемент матрицы:

$\tilde{D}(t)\ (i = 1, ..., N_i,\ j = 1, ..., N_i,\ l = 1, ..., K)$,

при этом элемент $d_{lij}(t)\, Q_{ij}(t,\tau)$ задает интенсивность заявок, передаваемых элементом $i$ на элемент $j$ для вида $l$.

Динамика изменения очередей заявок на операциях без учета времени ожидания задается следующим соотношением:

$$\frac{\partial V_i(t,\tau)}{\partial t} = U^0(t) - (\hat{E} - D_i)Q_i(t), (i = 1, .., K).$$

Здесь

$V_i(t)$ – вектор-функция очередей на операциях $i$-го типа заявок;

$D_i$ – матричный оператор межэлементных связей;

$Q_i(t)$ – вектор производительностей на операциях по $i$-му виду заявок;

$U_{ij}^0(t,\tau)$ – вектор внешних поступлений;

$\hat{E}$ – единичная матрица.

Производительности, с которыми происходит обработка заявок $Q_{ij}(t)$, на технологических операциях обеспечиваются при помощи ресурсов в системе обработки, заданных вектором $C = (C_1, ..., C_m)$. Для того чтобы обеспечить на операции $i$ производительность обработки $Q_{ij}(t)$, необходимо выделить на этой операции ресурсы в количестве

$$\bar{r}_{ij}(t) = O_{ij}(t)\ \bar{\alpha}_{ij},$$

где

$\bar{\alpha}_{ij} = (\alpha^1_{ij}, ....., \alpha^m_{ij})$ $m$-мерный вектор трудозатрат на операции $j$ по виду заявок $i$.

Полагаем, что ресурсы можно мгновенно перебрасывать с одной операции на другую в количестве, не превышающем координат вектора:

$$C = (C_1, ..., C_m).$$

Рассмотрим задачу оптимального распределения ресурсов по критерию максимизации суммарного объема обработанных заявок за директивный период в следующей постановке.

Необходимо максимизировать функционал

$$\sum_{i=0}^{K}\int_0^T Q_{iNi}(t)dt, \tag{3}$$

где $Q_{ij}(t) = \lim_{\tau\to\infty} Q_{ij}(t,\tau)$ при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{Ni} Q_{ij}\alpha^l_{ij} \le C_l\ , l = 1, ..., m; \forall\ \ t \in [0,T]; \tag{4}$$

$$\int_0^t Q_{ij}(t')dt' \le V_{ij}(0) + \int_0^t u_{ij}(t')dt' + \sum_{Qpe\in Rij}\int_0^t Q_{pl}(t')dt'\ ; \tag{5}$$

$$\int_0^T Q_{iNi}\ (t)dt \ge b_i\ , i = 1, ..., K. \tag{6}$$

Здесь

$N_i$ – номер последней операции по $i$-му типу заявок;

$R_{ij}$ – множество операций предшественников для $j$-й операции по виду заявок $i$;

интервал $(O,T)$ задает длительность периода планирования;

$b = (b_1, ..., b_m)$ – вектор, задающий плановый объем заявок, который необходимо обработать к концу директивного периода.

Рассмотрим частный случай задачи (3-6) при условии, что:

$$K = 1, m = 1, u_{ij}(t); b_1 = 0, \ \exists\ \ V_{ij} \ge 0;$$

граф, задающий последовательность обработки заявок, является цепью.

Приводимый ниже алгоритм распределения ресурсов максимизирует функционал (3) при ограничениях (4-6) для любого интервала $[0,t] \in [0,T]$.

Описание алгоритма.

Шаг 0. Полагаем $i = N_1$; $\Delta\ t_0 = 0$.

Шаг 1. На все операции, начиная с операции $i$ по операцию, ресурсы выделяются в количестве

$$C_1\alpha_{1j} / \sum_{k=i}^{N_1}\alpha^1_{1k}\ , (j = i, i + 1, ..., N_1).$$

Будем считать, что ресурсы не выделяются на операции $1, ..., i - 1$. Производительности на операциях для всех:

$$t \in [\Delta t_{N_1-j}; \Delta t_{N_1-j+1}]$$

задаются следующим образом:

$$q_{1l}(t) = \begin{cases} c_1 / \sum_{k=i}^{N_1}\alpha^1_{1k}, \text{если } i \le l \le N_1; \\ 0, \text{если } 1 \le l \le i. \end{cases}$$

Здесь $\Delta t_{N_1-j+1} = \Delta t_{N_1-j} + V_{1i}(0)\sum_{l=i}^{N_1}\alpha^1_{1e} / C_1$.

Шаг 2. Изменяем значение $i$ по формуле $i = i+1$. Если $i < 1$, то выход из алгоритма, в противном случае перейти к шагу 1.

Докажем, что алгоритм оптимально распределяет ресурсы по критерию максимального объема обработки заявок за любой период $[0,t] \subseteq [0,T]$.

Обозначим $\Delta_i = \Delta t_{N_1-j+1} - \Delta t_{N_1-i}$.

Предположим, что существует распределение ресурсов, обеспечивающее производительности $\tilde{q}_{11}(t),...,\tilde{q}_{1N_1}(t),$ для которых выполняются ограничения (4) и существует такой момент времени $t^* \in [0,T]$, что

$$\sum_{i=1}^{N_1} V_{1i}(t^*) > \sum_{i=1}^{N_1}\tilde{V}_{1i}(t^*), \tag{7}$$

где

$V_{1i}(t^*)$ – величина очереди на операции $i$ $(i = 1, ..., N_1)$ в момент времени $t^*$, если ресурсы распределены согласно приведенному алгоритму;

$\tilde{V}_{1i}(t^*)$ – величина очереди среди заявок на операции $i$ $(i = 1, ... ,N_1)$, если производительности на операциях заданы функциями $\tilde{q}_{11}(t),...,\tilde{q}_{1N_1}(t)$.

Не уменьшая общности, можно считать:

$$\sum_{i=1}^{K}\Delta i \le t^* \le \sum_{i=1}^{k+1}\Delta i.$$

В силу соотношения (7) имеем:

$$\int_0^{t^*} q_{1N_1}(t)dt < \int_0^{t^*}\tilde{q}_{1N_1}(t)dt.$$

В свою очередь:

$$\int_0^{t^*} q_{1N_1}(t)dt = \sum_{j=k+1}^{N_1} V_{1j}(0) + (t^* - \sum_{j=k}^{}\Delta j)C_1 / \sum_{j=k}^{N_1}\alpha^1_{1j}.$$

Тогда объем заявок, обработанный к моменту времени $t^*$ при производительностях, может быть представлен так:

$$\int_0^{t^*}\tilde{q}_{1N_1}(t')dt' = \sum_{j=k+1}^{N_1} V_{1j}(0) + (t^* - \sum_{i=k}^{K}\Delta i)C_1 / \sum_{j=k}^{N_1}\alpha^1_{1j} + V_\varepsilon; V_\varepsilon > 0. \tag{8}$$

Оценим время обработки $t_{обр}$ этого объема заявок при выполнении ограничений (4):

$$t_{обр} \ge \sum_{j=1}^{K}\Delta j + (t^* - \sum_{j=1}^{K}\Delta j) + V_\varepsilon\sum_{j=k+1}^{N_1}\alpha_{1i} / C_1 > t^*, \tag{9}$$

где $l \ge k$.

Неравенство (9) противоречит тому, что к моменту времени $t^*$ может быть обработан объем заявок, заданный правой частью равенства (8), что означает оптимальность приведенного алгоритма.

В простейшем случае конвейерная система обработки может быть графически задана ориентированным ациклическим графом, состоящем из нескольких параллельных цепочек, задающих перечень операций по каждому виду заявок и последовательность обработки на этих операциях. Такой ориентированный граф еще называют ***П***-сетью, на вход сети подается поток материальных ресурсов производства (или финансовый поток, предназначенный для закупки материальных ресурсов), который должен быть обработан с учетом имеющегося производственного арсенала на всех технологических операциях и на выходе таким образом будет получена готовая продукция. Графически такой процесс обработки для ***M*** видов заявок может быть представлен следующим образом (рис. 1).

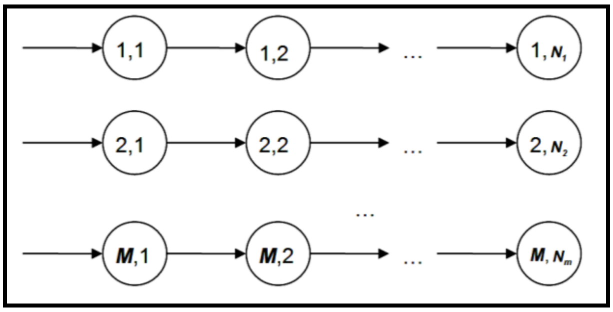


**Рис. 1. Технологическая последовательность операций *П*-сети**

Рассмотрим задачу оптимизации управления потоками материальных и производственных ресурсов по критерию максимизации суммарного маржинального дохода от произведенной продукции в периоде (***0, T***), который будет получен после ее реализации. В этом случае необходимо решить следующую задачу оптимального управления:

$$\sum_{i=1}^{M}\beta_i\int_0^T q_{iN_i}(t)\,dt \to max\,. \qquad (10)$$

Здесь $\beta_i$ – маржинальный доход от выпуска одной единицы продукции вида ***i***;

$q_{iN_i}(t)$ – искомая интенсивность обработки заявок вида ***i*** на последней $N_i$ операции $(i = 1,2,\ldots,M)$.

Пройдя обработку на операции $0_{iN_i}$, на выходе будет получена конечная продукция вида ***i*** $(i = 1,2,\ldots,M)$. Учитывая, что ни на одной операции производственного цикла не может быть обработано большее количество заявок, чем поступило, необходимо учитывать следующее ограничение:

$$\int_0^t q_{ij}(t')\,dt' \le V_{ij}(0) + \int_0^t q_{ij-1}(t')\,dt'\,, \qquad (11)$$

где

$i = 1,2,\ldots,M$;

$j = 1,2,\ldots,\ N_i$ ;

$t \in (0,T)$.

Здесь $V_{ij}(0)$ – объем незавершенного производства на операции $0_{ij}$ в момент $t = 0$.

Далее будем предполагать, что обработка заявок на каждой операции происходит с использованием производственных ресурсов, к которым относятся: станки, оборудование, технологическая оснастка, обслуживающий персонал и другое. Объем этого вида ресурсов задан с использованием вектора $C = (C^1,\ldots,C^m)$. Для того чтобы на операции $0_{ij}$ обеспечить единичную производительность, необходимы производственные ресурсы в количестве заданном векторами $\alpha_{ij} = (\alpha_{ij}^1, \alpha_{ij}^2,\ldots,\alpha_{ij}^m)$ , $i = 1,2,\ldots,M$; $j = 1,2,\ldots, N_i$ .

Если же необходимо обеспечить производительность $q_{ij}$ на операции $0_{ij}$ , то соответственно требуемый объем производственных ресурсов необходимо увеличить в $\frac{q_{ij}}{q_{ij}^0}$ раз (в линейном случае). Тогда вектор производственных ресурсов примет вид:

$$\bar{\alpha}_{ij} = (\alpha_{ij}^1 * \frac{q_{ij}}{q_{ij}^0}\ ,\ldots,\alpha_{ij}^m * \frac{q_{ij}}{q_{ij}^0})\,,\ i = 1,2,\ldots,M;\ j = 1,2,\ldots,N_i\,.$$

При задании производительностей $q_{ij}(t)$ на каждой операции $q_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,M;\ j = 1,2,\ldots,N_i)$ объем используемых ресурсов не должен превышать соответствующих компонент вектора $C = (C^1,\ldots,C^m)$. Иными словами, должно выполняться следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_i}\frac{q_{ij}}{q_{ij}^0} * \alpha_{ij}^l \le C^l\,,\ l = 1,2,\ldots,M;\ \ \forall t \in (0,T). \qquad (12)$$

Количество выпущенной на интервале (***0, T***) продукции каждого вида не должно быть выше объема спроса $Pt_i$ , что определяется следующим неравенством:

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)\,dt \le Pt_i\,,\ i = 1,2,\ldots,M. \qquad (13)$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (10-12) (без ограничения на спрос (13)) при условии, что $V_{ij}(0)\ > 0$, $i = 1,2,\ldots,M$; $j = 1,2,\ldots, N_i$ .

В момент $t = 0$ в этом случае необходимо назначить производительности $q_{iN_i}$ $(i = 1,2,\ldots M)$, обеспечивающие максимальный маржинальный доход за единицу времени, т.е.

$$\sum_{i=1}^{M}\beta_i q_{iN_i} \to max\,, \qquad (14)$$

при ограничениях:

$$\sum_{1}^{M}\frac{q_{iN_i}}{q_{iN_i}^0}\alpha_{iN_i}^l \le C^l\,,\ l = 1,2,\ldots,M; \qquad (15)$$

$$q_{iN_i} \ge 0,\ i = 1,2,\ldots M. \qquad (16)$$

Задача (14-16) является задачей линейного программирования, решение которой не представляет принципиальных трудностей. Получив решение задачи (14-16), которое обозначим:

$$Q_{N_i}^1 = (q_{1N1}^1, q_{1N2}^1,\ldots,q_{1N_M}^1)\,,$$

можно вычислить минимальное время $\tau_1$ , за которое будет полностью обработан весь объем незавершенного производства на одной из конечных операций:

$$O_{1N1},\ldots,O_{MN_M}\,.$$

Очевидно, что

$$\tau_1 = min\frac{V_{iNi}(0)}{q_{iNi}^1}\,,\ i = 1,2,\ldots,M. \qquad (17)$$

Если $\tau_1 \geq T$, то задача (10-12) решена. При этом оно будет оптимальным не только для целевой функции (10), но и для целевой функции вида:

$$\sum_{i=1}^{M} \beta_i \int_0^t q_{iNi}(t')dt', \quad \forall t \in (0,T).$$

Приведенная процедура разбивает интервал планирования обработки заявок на отрезки $(0,t_1)$, $[t_1,t_2),\ldots,[t_{n-1},T)$, каждый из которых характеризуется одним и тем же множеством операций, на которых существуют неотрицательные очереди необработанных заявок. Правая граница каждого отрезка соответствует моменту завершения обработки очереди на одной из операций. Таким образом, предложенный подход дает решение задачи (1-4) для любого временного интервала $(0,t) \subseteq (0,T)$.

Пусть выполняется $\tau_1 < T$ и минимум в выражении (17) достигается на каком-либо $1 \leq K_1 \leq M$. В этом случае для организации выпуска продукции вида $K_1$ необходимо выделять производственные ресурсы не только на операцию $O_{K_1 N_{K1}}$, но и на предыдущую операцию $O_{K_1 N_{K1-1}}$. Следовательно, производительности на конечных операциях, как и ранее, назначаются исходя из того, что максимизируется целевая функция (14), а вместо ограничений (15-16) используются следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{q_{iN_i}}{q^0_{iN_i}} \alpha^l_{iN_i} + \frac{q_{K_1 N_{K1-1}}}{q^0_{K_1 N_{K1-1}}} \alpha^l_{iN_{K1-1}} \leq C^l, \; l = 1,2,\ldots,M; \quad (18)$$

$$q_{K_1 N_{K1}} \leq q_{K_1 N_{K1-1}}; \quad (19)$$

$$q_{iN_i} \geq 0, \; q_{K_1 N_{K1-1}} \geq 0, \; i = l = 1,2,\ldots,M. \quad (20)$$

Ограничения (18) и (20) свидетельствуют о том, что производственные ресурсы для выпуска продукции вида $K_1$ должны выделяться не только на последнюю операцию, $N_{K_1}$, но и на операцию $N_{K_1-1}$.

Далее находится минимум следующих соотношений:

$$\min_{i=1,M} \left\{ \frac{V_{iN_i}(\tau_{\min K_1})}{q^2_{iN_i}}, \frac{V_{K_1 N_{K_1-1}}}{q^2_{iN_{K_1-1}}} \right\}.$$

Здесь $q^2_{iN_i}$ и $q^2_{iN_{K_1-1}}$ – решение задачи (14, 18, 20).

Таким образом, если $V_{ij} > 0$, то решение задачи (10-12) (без ограничения на спрос) сводится к решению серии задач линейного программирования.

Если есть ограничения на спрос, то необходимо при решении задачи (10-13) отслеживать момент времени $\tau_i$, для которого:

$$\int_0^{\tau_i} q_{iN_i}(t)dt = b_i, \; i = 1,2,\ldots,M.$$

Далее с момента времени $\tau_i$ выпуск продукции вида $i$ останавливается.

Рассмотрим ситуацию, когда есть еще ограничение на заказы, т.е.:

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)dt \geq Z_i, \; i = 1,2,\ldots,M, \quad (21)$$

Здесь $Z_i$ – объем продукции вида $i$, который необходимо поставить заказчику на интервале времени $(0,T)$.

В этом случае необходимо оценить объем незавершенного производства по всем видам продукции, т.е. выполнение неравенства:

$$\sum_{j=1}^{N_i} V_{ij} \geq Z_i, \; i = 1,2,\ldots,M. \quad (22)$$

В то же время выполнение условия (22) еще не гарантирует выполнения заказа, поскольку, несмотря на то, что все материальные ресурсы поставлены в необходимых объемах, производственные мощности предприятия не могут обеспечить выпуск продукции каждого вида в объемах $Z_i$ за период $(0, T)$.

Рассмотрим ситуацию, когда:

$$Z_i \leq V_{iN_i}, \; i = 1,2,\ldots,M. \quad (23)$$

Выполнение ограничения (23), в частности, означает, что объем незавершенного производства на последней операции по каждому виду продукции достаточен для выполнения заказа. В этом случае решение задачи оптимального управления (10-13, 23) сведется к решению следующей задачи линейной оптимизации:

$$\sum_{i=1}^{M} \beta_i q_{iN_i} \to \max; \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{M} q_{iN_i} \alpha^l_{iN_i} \leq C^l, \; l = 1,2,\ldots,M; \quad (25)$$

$$T * q_{iN_i} \geq Z_i, \; i = 1,2,\ldots,M; \quad (26)$$

$$T * q_{iN_i} \leq Pt_i, \; i = 1,2,\ldots,M; \quad (27)$$

$$q_{iN_i} > 0, \; i = 1,2,\ldots,M. \quad (28)$$

Здесь $T$ – продолжительность директивного периода $(0,T)$.

Если задача (24-28) имеет решение, то производительности $q_{iN_i}$ являются постоянными в течение всего интервала времени.

В том случае если задача (24-28) не имеет решения, необходимо инвестировать средства в увеличение производственных мощностей, т.е. приобретение дополнительного оборудования, станков, привлечение дополнительного количества обслуживающего персонала, а также приобретение материально-сырьевых ресурсов и вспомогательного материала. Таким образом, мы должны перейти от производительных ресурсов, заданных вектором $C = (C^1,\ldots,C^m)$ к увеличенным производственным ресурсам:

$$C + y = (C^1 + y_1,\ldots,C^m + y_m),$$

где $y_j$ – дополнительное количество производственных ресурсов вида $j$ $(j = 1,2,\ldots,M)$.

Естественным требованием при приобретении дополнительного производственного оборудования является минимизация затрат на его приобретение. Это требование можно выполнить, решив следующую оптимизационную задачу:

$$\sum_{j=1}^{M} y_j \gamma_j + \sum_{l=1}^{R} L_l b_l \to \min; \quad (29)$$

$$\sum_{1}^{M} q_{iN_i} \alpha^l_{iN_i} \leq C^l + y_l, \; l = 1,2,\ldots,M; \quad (30)$$

$$T * q_{iN_i} \geq Z_i, \; i = 1,2,\ldots,M; \quad (31)$$

$$T * q_{iN_i} \leq Pt_i, \; i = 1,2,\ldots,M; \quad (32)$$

$$q_{iN_i} > 0,\ i = 1,2,\dots,M; \qquad (33)$$

$$y_i \ge 0,\quad y_i \in Z^+. \qquad (34)$$

Решив задачу (29-34) и получив в качестве решения объемы дополнительно закупаемого оборудования $y_j$, мы переходим к решению задачи (24-28) с учетом того, что в правой части производственные ресурсы в количестве:

$$C^l + y_l\ (l = 1,2,\dots,M),$$

Если ограничение (23) для какого-либо вида продукции $P$ не выполняется, то существует такое $j$, что

$$V_{pj} \ge Z_p,\ 1 \le p \le M, \qquad (35)$$

тогда задача оптимального управления (10-13, 23) сводится к решению следующей задачи линейного программирования.

$$\sum_{i=1}^{M}\beta_i q_{iNi} \to max; \qquad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{M} q_{iNi}\alpha^l_{iNi} + \sum_{k=1}^{Np} q_{pK}\alpha^l_{pK} \le C^l,\ l = 1,\dots,M; \qquad (37)$$

$$q_{pj} = q_{pj+1} = \dots = q_{pNp}; \qquad (38)$$

$$T * q_{iN_i} \ge Z_i,\ i = 1,2,\dots,M; \qquad (39)$$

$$T * q_{iN_i} \le Pt_i,\ i = 1,2,\dots,M; \qquad (40)$$

$$q_{iN_i} \ge 0,\ q_{pj} \ge 0,\ i = 1,2,\dots,M,\ j = l,\dots,Np. \qquad (41)$$

Формулируя задачу оптимизации управления производственными ресурсами (36-41), необходимо учитывать, что по виду продукции $P$ необходимо осуществить обработку незавершенного производства не только на операциях $O_{pNp}$, но и на предшествующих операциях $O_{pNp-1},\dots,O_{pj}$, что требует дополнительного привлечения производственных ресурсов (ограничение (37)), а также согласование производительностей по операциям продукции вида $P$ (ограничение (38)).

## Интервальное задание маржинального дохода в динамической модели конвейерного типа

Рассмотрим задачу (10-13, 23) в условиях, когда маржинальный доход по каждому виду выпускаемой продукции может принимать любое значение из заданного интервала $[\beta_i^1, \beta_i^2]$, т.е. $\beta_i \in [\beta_i^1, \beta_i^2]$. В этом случае возникает проблема, какие решения из множества допустимых производственных программ $\hat{Q} = \{Q^1,\dots,Q^L\}$ могут быть оптимальными и на каком множестве возможных значений $\beta_i$ они остаются оптимальными. Иными словами можно ли разбить многомерный параллелепипед значений маржинальной доходности выпускаемой продукции $P = \prod_{i=1}^{n}[\beta_i^1, \beta_i^2]$ на области $O_1,\dots,O_V$ так чтобы выполнялись следующие два условия:

I. $\bigcup_{j=1}^{V} O_j = P$.

II. Для каждой $O_j$ существует некоторая производственная программа $Q^j$, которая остается оптимальной для всех значений $\beta \in Q^j$ $(\beta = (\beta_1, \beta_2,\dots,\beta_M))$.

Решение этой задачи сводится к организации следующей процедуры.

1. Формирование множества потенциально оптимальных производственных программ. Для этого строится множество интервалов:

$$[F_1^j, F_2^j]\ j = 1, 2, \dots, L,$$

где

$F_1^j$ – значение целевой функции (10) на производственной программе $Q^j$ при условии, что маржинальный доход $\beta_i = \beta_i^1$ $(i = 1,2,\dots, M)$.

$F_2^j$ – значение целевой функции (10) на производственной программе $Q^j$ при условии, что маржинальный доход $\beta_i = \beta_i^2$.

2. Формирование множества потенциально оптимальных производственных программ $Q_{по} \subseteq \hat{Q}$.

Для этого необходимо осуществить следующие шаги.

2.1. Определить $\max_{j=\overline{1,L}} F_2^j = F_2^{l_1}\ (1 \le l_1 \le L)$.

Включить в $Q_{по}$ производственную программу $Q^{l_1}$.

2.2. Определить $\max_{j=\overline{1,L}} F_1^j = F_1^{l_2}\ (1 \le l_2 \le L)$.

Включить в $Q_{по}$ производственную программу $Q^{l_2}$.

2.3. Включить в $Q_{по}$ все производственные программы $Q^j \subseteq \hat{Q}$, для которых $F_2^j > F_1^{l_2}$.

3. После того как сформировано множество потенциально оптимальных производственных программ $Q_{по}$, определим, для каких значений $\beta_j \in F$ $(j = 1, 2, \dots, M)$ производственная программа $Q^i$ является оптимальной. Легко видеть, что область изменения маржинального дохода $\beta_j$, на которой оптимальной будет производственная программа $Q^i$, определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases}\beta_j^1 \le \beta_j \le \beta_j^2; \\ \sum_{j=1}^{M}\beta_j Q_j^i \le \sum_{j=1}^{M}\beta_j Q_j^l.\end{cases} \quad j = 1,2,\dots,M;\ l \ne i;\ \forall Q^l \subseteq Q_{по} \qquad (42)$$

Таким образом, система неравенств (42) задает многоугольник, при применении на котором значений маржинального дохода $\beta_j$ $(j = 1, 2, \dots, M)$ оптимальной остается производственная программа $Q^i$.

## Анализ устойчивости в динамической модели конвейерного типа

Обратимся к модели (10-13, 23) и рассмотрим ситуацию линейного роста маржинальной доходности $\beta_i$ от инфляции, т.е. будем предполагать, что при уровне накопленной инфляции $\xi$ маржинальный доход:

$$\beta_i(\xi) = \beta_i + n_i\beta_i\xi,$$

где $\xi$ – накопленная инфляция в долях.

Будем также считать, что для $\forall$ допустимого решения задачи (10-13, 23) $Q = (Q_1,\dots,Q_m)$, компоненты вектора $Q$ целочисленны. Это соответствует реалиям практически любого промышленного предприятия, выпускающего конечную продукцию для потребителя.

Обозначим множество всех допустимых производственных программ модели (10-13, 23) через:

$$\hat{Q} = (Q^1,\ldots,Q^L).$$

Учитывая целочисленность векторов $Q^j$ $(j = 1, 2, \ldots, L)$, число допустимых производственных программ будет конечным. Обозначим $F^j(\xi)$ значение целой функции (10) на производственной программе $Q^j$ при уровне накопленной инфляции $\xi$. Очевидно, что в этом случае $F^j(\xi)$ вычисляется по следующей формуле:

$$F^j(\xi) = \sum_{i=1}^{M}(\beta_i + n_i\beta_i\xi)\int_0^T q^j_{iNi}(t)dt,\ j=1,2,\ldots,M.$$

Легко видеть, что функция $F^j(\xi)$ является линейной относительно $\xi$ и:

$$\frac{dF^j(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=1}^{M} n_i\beta_i\int_0^T q^j_{iNi}(t)dt,\ j = 1,2,\ldots,M.$$

Предположим, что при уровне накопленной инфляции $\xi = 0$, оптимальной является производственная программа $Q^l = (Q^l_1,\ldots,Q^l_M)$. Будем считать также, что программы множества $\hat{Q}$ упорядочены по возрастанию производных:

$$\frac{dF^j(\xi)}{d\xi},\ j = 1, 2, \ldots, L.$$

Таким образом, если $p > q$, то:

$$\frac{dF^p(\xi)}{d\xi} \ge \frac{dF^j(\xi)}{d\xi},$$

для любых $1 \le p \le L$ и $1 \le q \le L$ и $p \ne q$. В этом случае, если $l > L$, то рост маржинального дохода на производственной программе $Q^k$ $(k > L)$ по мере накопления инфляции. Следовательно, каждое из уравнений вида $F^l(\xi) = F^k(\xi)$, $k = 1, \ldots, L$ будет иметь одно положительное решение. Обозначим эти решения как $\xi^1_k$ и выберем min $\xi^1_k = \xi^1_p$ $(p > l)$.

Очевидно, что при уровне накопленной инфляции $\xi$ более чем $\xi^1_p$, производственная программа $Q^l$ утрачивает оптимальность и оптимальной становится производственная программа $Q^p$ $(p > l)$. Повторяя предыдущую цепочку рассуждений для множества производственных программ $Q^p, Q^{p+1},\ldots,Q^L$, найдем следующую производственную программу $Q^j$ и соответствующее значение накопленной инфляции $\xi^2_j$ $(j > p)$, при котором оптимальной становится производственная программа $Q^j$. Очевидно, что через конечное число итерации и при некотором уровне накопленной инфляции оптимальной станет производственная программа $Q^L$. Обозначим соответствующий уровень накопленной инфляции $\xi_L$. Дальнейший переход на новые оптимальные производственные не произойдет в силу того, что $\frac{dF^L(\xi)}{d\xi} \ge \frac{dF^j(\xi)}{d\xi}$ для всех $j = l, l+1,\ldots,L-1$ и для всех $\xi \notin (\xi_L,\infty)$. Следовательно доказано следующее утверждение.

Утверждение. Пусть множество $\hat{Q} = (Q^1,\ldots,Q^L)$ задает множество всех допустимых решений (10-13, 23) в том случае, если маржинальный доход по каждому виду выпущенной продукции растет по линейному закону $\beta_i(\xi) = \beta_i + n_i\beta_i\xi$, $i = 1, 2, \ldots, M$ относительно накопленной инфляции $\xi$, то интервал изменения инфляции $\xi$ $(\xi \in (0,\infty))$ может быть таким образом разбит на конечное число отрезков $(0, \xi_1), (\xi_1, \xi_2)\ldots(\xi_k,\infty)$, что при изменении инфляции в рамках одного отрезка ($\xi_{p-1}, \xi_p$) оптимальной остается одна и та же производственная программа $Q_p \in \hat{Q}$.

## Многопродуктовая динамическая модель

В большинстве случаев число видов материально сырьевых ресурсов (комплектующих, деталей и т.д.), при выпуске одного вида продукции более одного. При этом в процессе обработки происходят сборка (слияние) нескольких видов материально-сырьевых ресурсов в один полуфабрикат, узел или деталь будущего изделия. В этом случае технологическую последовательность выпуска продукции можно представить, например, в виде дерева следующего вида (рис. 2).

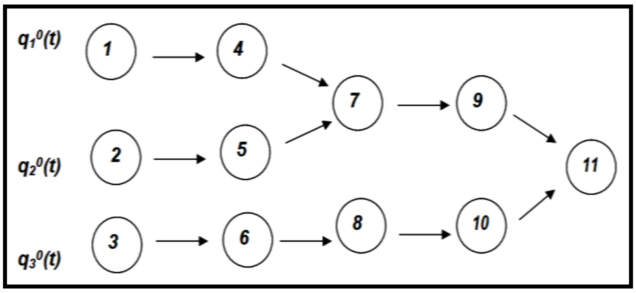


**Рис. 2. Технологическая последовательность операций многопродуктовой модели**

Здесь $q_1^0(t)$, $q_2^0(t)$, $q_3^0(t)$ – это интенсивности поступления материально-сырьевых ресурсов для выпуска одного вида продукции. Обработка этих видов продукции происходит на операциях 1, 2, … 11. При этом на последней (11-й операции) происходит выпуск готовой продукции.

При этом на операции 7 и 11 происходит слияние материальных потоков. На операции 7 происходит сборка отдельного узла будущего изделия, в состав которого вошли материальные ресурсы первого и второго типа, а на операции 11 происходит сборка всего изделия, в состав которого вошли материально-сырьевые ресурсы первого, второго и третьего вида.

Легко видеть, что на операциях 7 и 11 должно выполняться условие пропорциональности обработки нескольких видов материально-сырьевых ресурсов. Например, при обработке стола, состоящего из четырех ножек и одной столешницы, эта интенсивность должна быть в соотношении 4 : 1, чтобы выпускать на операции сборки конечную продукцию, а не полуфабрикаты [4, с. 145].

Принимая во внимание вышеприведенные замечания, сформируем модель оптимизации прибыли с учетом технологической последовательности обработки материальных ресурсов производства.

Пусть $q_{ij}^0(t)$ $i = 1, 2 \ldots N$, $j = 1, 2, \ldots M$ интенсивность поступления материально-сырьевых ресурсов типа $j$

для выпуска продукции вида $i$. Тогда с учетом ранее введенных обозначений задача оптимизации использовании производственных ресурсов состоит в том, чтобы обеспечить такие производительности $q_{ij}(t)$ как на конечных операциях, связанных с выпуском готовой продукции, так и на промежуточных операциях обработки, чтобы максимизировать валовую прибыль от реализации всех видов продукции, выпущенной в интервале $[0, T]$.

Т.е. необходимо максимизировать следующий функционал:

$$\sum_{i=1}^{M}\beta_i\int_0^T q_{iN_i}(t)\,dt \to max\,. \qquad (43)$$

При этом должны выполняться следующие ограничения на производственные мощности:

$$\sum_{p=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}^{p}(t)\alpha_{ij}^{l} \le c^{l}\,, \qquad (44)$$

$l = 1,2,\dots, m$ для любого $t \in [0,T]$.

Балансовые ограничения, связанные с тем, что объем обработки на каждой операции не должен превышать объема материальных ресурсов на эту операцию с учетом межоперационного задела на этой операции на момент времени $t$.

$$\int_0^t q_{ij}^{p}(t')dt' \le V_{ij}^{p}(0) + \int_0^t q_{py}^{p}(t')dt'\,. \qquad (45)$$

Для любого $p = 1, 2, ..., M$; для любого $t \in [0,T]$; для любого $O_{\beta\gamma} \in R_{ij}$

Здесь $R_{ij}$ – множество операций предшественников для операций $O_{ij}$. отношение пропорциональности производительностей (если число операций предшественников для операции $O_{ij}$ более одной (т.е. $|R_{ij}| \ge 1$):

$$k_{ij}^{\theta 1}q_{ij}(t) = k_{ij}^{\theta 2}q_{ij}(t) = \dots = k_{ij}^{\theta M}q_{ij}(t)\,. \qquad (46)$$

Здесь $k_{ij}^{\theta 1}, k_{ij}^{\theta 2}, k_{ij}^{\theta M}$ – коэффициенты пропорциональности производительностей на операции $O_{ij}$ по материальным ресурсам вида $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_M$, обрабатываемым на операции $O_{ij}$.

Ограничение на объем производства по каждому виду продукции:

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)dt \le Pt_i\,,\ i = 1,2,\dots,n. \qquad (47)$$

Рассмотренная оптимизационная модель (43-47) может быть исследована с использованием средств теории оптимального управления.

В некоторых случаях в динамической производственной модели задаются не интенсивности поступления материально-сырьевых ресурсов $q_{ij}^{0}(t)$, а интенсивность поступлений оборотного капитала $u(t)$. В этом случае для решения задачи (43-47) необходимо таким образом распределить поток $u(t)$ на составляющие $u_{ij}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K_i} u_{ij}(t) = u(t)\,.$$

Чтобы потоки поступающих материальных ресурсов $q_{ij}^{0}(t)$, заданные по формуле:

$$q_{ij}^{0}(t) = u_{ij}(t)/\gamma_{ij}\,,$$

оптимизировали бы целевую функцию (43) при ограничениях (44-47).

Здесь $\gamma_{ij}$ – стоимость одной единицы материального ресурса $j$, поступающего для выпуска одной единицы продукции вида $i$.

## Динамические модели конвейерного типа в условиях риска и неопределенности

Формируя производственный план выпуска конечной продукции и загрузки производственного оборудования (задача (43-46)), лицо, принимающее решение не всегда может оценить будущий маржинальный доход $\beta_i$ $(i = 1, 2, \dots, M)$ по каждому виду выпускаемой продукции.

В частности $\beta_i$ может быть задана как случайная величина с известными дискретными распределениями вероятностей, т.е. величина $\beta_i$ принимает определенные значения с некоторой вероятностью:

$$p_q \ge 0\,,\ \sum_{q=1}^{m} p_q = 1\,.$$

В этом случае при решении задачи (43-46) естественно использовать в целевой функции (43) вместо $\beta_i$ математическое ожидание маржинального дохода $\overline{\beta_i}$ :

$$\overline{\beta_i} = \sum_{j=1}^{q}\beta_i^{j}p_j\,. \qquad (48)$$

Обозначим объем выпуска по каждому виду выпускаемой продукции в решении задачи (43-46) через $Q_i$ .

Очевидно, что:

$$Q_i = \int_0^T q_{iNi}(t)dt\,,\ i = 1, 2, \dots, M. \qquad (49)$$

Соответственно объем переменных издержек, связанный с выпуском одной единицы продукции вида $i$ через $b_i$ , $(i = 1, 2, \dots, n)$. Тогда объем переменных издержек продукции вида $i$ при производственной программе $Q = (Q_1,\dots,Q_m)$ определяется как:

$$S_i = b_iQ_i\,,\ i = 1,2,\dots,M.$$

Обозначим долю затрат на выпуск продукции вида $i$ при производственной программе $Q = (Q_1,\dots,Q_m)$ через $\Delta_i$ . Очевидно, что:

$$\Delta_i = \frac{b_iQ_i}{\sum_{j=1}^{M} b_jQ_j} = \frac{\int_0^T b_iq_{iNi}(t)dt}{\sum_{i=1}^{M}\int_0^T b_iq_{iNi}(t)dt}\,. \qquad (50)$$

В этих обозначениях, используя классическую модель Марковица [5, с. 71-91], сформулируем задачу на максимум маржинального дохода с ограничением на риск производственной программы $Q$ задачи (43-46), который может быть оценен следующим образом [1]:

$$R = \sum_{i=1}^{M}\sigma_i^2 * \Delta_i^2 + 2\sum_{i=1}^{M}\sum_{i>j} cov_{ij}\,\Delta_i\Delta_j\,. \qquad (51)$$

Здесь

$\sigma_i^2$ – дисперсия маржинального дохода по продукции вида $I$;

$cov_{ij}$ – ковариация маржинального дохода продукции i и продукции $j$.

Таким образом, с учетом (48-51) модель оптимизации производственной программы по финансовому критерию с учетом риска доходности производственной программы может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{M} \overline{\beta}_i \int_0^T q_{iNi}(t)dt \to max . \qquad (52)$$

$$\int_0^t q_{ij}(t')dt' \le V_{ij}(0) + \int_0^t q_{ij-1}(t')dt' , \qquad (53)$$

$$\forall t \in (0,T) \ \ i = 1,2,\ldots,M; \ j = 1, 2, \ldots, N_i .$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sigma_i^2 \Delta_i^2 + 2\sum_{i=1}^{M}\sum_{j>i} cov_{ij} \ \Delta_i \Delta_j \le R_q . \qquad (54)$$

Здесь $R_q$ – допустимый уровень риска доходности производственной программы $Q = (Q_1,\ldots,Q_m)$:

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{Np} q_{ij}(t)\alpha_{ij}^l \le C^l , \qquad (55)$$

$$\forall t \in (0,T), \ l = 1, \ldots, m.$$

$$\int_0^T q_{iNi}(t)dt \le Pt_i , \ i = 1, 2, \ldots, M. \qquad (56)$$

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)dt_i \ge Z_i , \ i = 1, 2, \ldots, M. \qquad (57)$$

В модели (52-57) оптимизируется маржинальный доход от реализации продукции, выпущенной на директивном периоде (***0,T***), заданной соотношением (51). Формула (53) задает балансовые ограничения на объем обработки незавершенного производства на каждой операции $O_{ij}$ , для операции, когда технологическая схема выпуска продукции задается ***П***-сетью $(i = 1,2,\ldots,M; j = 1, 2, \ldots, N_i)$.

Неравенство (54) задает ограничение на допустимый уровень риска доходности производственной программы, где $\Delta_i$ – определяются по формуле (50), $\delta_i^2$ – дисперсия маржинального дохода по продукции вида ***i***, $cov_{ij}$ – ковариация доходности продукции вида ***i*** и продукции вида ***j***. Неравенство (55) ограничивает производительность на каждой операции $O_{ij}$ , что связано с существующими производственными мощностями предприятия. Соотношения (56) и (57) – это соответственно ограничения на объем спроса и объем заказа на выпускаемую продукцию.

Рассмотрим ситуации, когда динамика поступления оборотного капитала задана недетерминировано.

Пусть интенсивность поступления оборотного капитала ***u(t)*** есть случайный процесс, причем величина ***u(t)*** принимает определенные значения $(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ – возможные интенсивности поступления оборотного капитала) с некоторой вероятностью $p_q$ :

$$p_q \ge 0 , \sum_{q=1}^{m} p_q = 1 .$$

Тогда математическое ожидание случайного процесса задается следующим выражением:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t)p_j$$

Далее можно решить задачу (35-38) для каждого потока оборотного капитала $u_j(t)$ и получить доходность от производства продукции вида ***i*** при финансовом потоке $u_j(t)$:

$$D_j^i = \beta_i \int_0^T q_{iNi}^j(t)dt .$$

Определим математическое ожидание дохода от продукции вида ***i***:

$$\overline{D}^i = \sum_{j=1}^{m} D_j^i p_j$$

Определить ожидаемую доходность по всем видам выпускаемой продукции:

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^{n} D^i$$

Цель управления оборотным капиталом состоит в том, чтобы с одной стороны ожидаемый доход был бы не менее какого-то известного показателя $D_{гр}$, т.е.

$$\overline{D} \ge D_{гр} \qquad (58)$$

С другой стороны, дисперсия ожидаемого дохода (как показатель риска управления оборотным капиталом) должна быть минимальной.

Учитывая введенные выше обозначения, дисперсия по доходности ***i***-го вида продукции равна:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{m} (\overline{D^i} - D_j^i)^2 p_j$$

Определим долю затрат по каждому виду выпускаемой продукции $\Delta_i$ по формуле (50). Тогда риск как и ранее может быть оценен суммарной дисперсией доходности по всем видам выпускаемой продукции с учетом затрат на материально-сырьевые ресурсы по следующей формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1} cov_{ij} y_i y_j . \qquad (59)$$

Минимизируя выражение (59), мы тем самым минимизируем риск производственной программы.

Таким образом, для решения задачи на минимум риска необходимо таким образом задать производительности обработки незавершенного производства $q_{ij}(t)\ (i = 1, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, N_i)$, чтобы, с одной стороны, минимизировать риск производственной программы в условиях ограничения снизу на ее доходность, заданную (58) и ограничений (51-54).

## Оптимизационные задачи управления материальными и производственными ресурсами в конвейерных системах с учетом привлечения заемных средств

Далее предложим вариант планирования производства при допущении, что предприятие обладает собственным капиталом ***R***, а также имеет возможность привлечения кредита в максимальном размере ***V*** под процентную ставку ***d***.

Пусть в ходе решения задачи (24-28) или (30-41) стала очевидна необходимость приобретения дополнительных производственных и материально-сырьевых ресурсов или же такая необходимость может возникнуть при планируемом расширении производства. Далее нам интересен вопрос: целесообразно ли привлекать кредит с учетом процентной ставки ***d*** на закупку производственных и материально-сырьевых ресурсов или рациональнее использовать существующие запасы и собственный капитал. Для ответа на этот вопрос можно рассмотреть две стратегии. В первом случае решается задача выбора оптимальных интенсивностей производства с учетом привлечения кредита (задача I). Во втором случае закупка дополнительных ресурсов будет происходить за счет собственных средств предприятия.

### *Задача I*

Будем полагать, что для продукции вида ***P*** объем незавершенного производства недостаточен для удовлетворения заказа (не выполняется ограничение (29)). Поэтому на начало технологической цепочки необходимо подать дополнительные ресурсы.

Закупка их осуществляется в пределах собственного средств предприятия и объема кредита.

В данной задаче в целевой функции необходимо учесть, что стоимость материально-сырьевых ресурсов, превышающих объемы запасов, увеличивается на величину процента по кредиту $d$ . Таким образом, мы учитываем в модели необходимое условие роста предприятия, заключающееся в превышении общей прибыли над размером процентов по кредиту [2, с. 5].

$$F_1 = \int_0^T \beta_i q_{iNi} - d * \left[\sum_f u_f * \gamma_f\right] \to max , \qquad (60)$$

где

$u_f$ – общее количество ресурса ***f***, подаваемое на начало технологической цепочки;

$\gamma_f$ – стоимость единицы ресурса ***f***

Производственные мощности выделяются на все операции технологической цепочки, начиная с первой, и являются постоянными в течение всего периода времени.

$$\sum_{i=1}^{M} q_{iNi}\alpha^l_{iNi} + \sum_{k=1}^{Np} q_{pK}\alpha^l_{pK} \le C^l , \; l = 1,\dots,M; \qquad (61)$$

$$q_{p1} = q_{pj} = \dots = q_{pNp} ; \qquad (62)$$

$$T * q_{iN_i} \ge Z_i , \; i = 1, 2, \dots, M; \qquad (63)$$

$$T * q_{iN_i} \le Pt_i , \; i = 1, 2, \dots, M. \qquad (64)$$

При этом объем дополнительно закупаемых ресурсов должен быть достаточен для удовлетворения заказа и спроса (с учетом имеющегося незавершенного производства на каждой стадии):

$$T * q_{iN_i} - \sum_j V_{ij} = u_{if} / l_{if} , \; i = 1, 2, \dots, M, \qquad (65)$$

где

$l_{if}$ – количество ресурса ***f***, которое идет на производство продукции вида ***i***.

$$q_{iN_i} > 0, \; i = 1, 2, \dots, M. \qquad (66)$$

Стоимость дополнительно приобретаемых ресурсов не должна превышать размер собственного капитала и оптимального объема кредита:

$$\left[\sum_f u_f * \gamma_f\right] \le R + V^* . \qquad (67)$$

### *Задача II*

$$F_2 = \sum_{i=1}^{M} \beta_i q_{iNi} \to max ; \qquad (68)$$

$$\sum_{i=1}^{M} q_{iNi}\alpha^l_{iNi} + \sum_{k=1}^{Np} q_{pK}\alpha^l_{pK} \le C^l , \; l = 1, \dots, M; \qquad (69)$$

$$q_{p1} = q_{pj} = \dots = q_{pNp} ; \qquad (70)$$

$$T * q_{iN_i} \ge Z_i , \; i = 1, 2, \dots, M; \qquad (71)$$

$$T * q_{iN_i} \le Pt_i , \; i = 1, 2, \dots, M. \qquad (72)$$

При этом объем дополнительно закупаемых ресурсов должен быть достаточен для удовлетворения заказа и спроса (с учетом имеющегося незавершенного производства на каждой стадии):

$$T * q_{iN_i} - \sum_j V_{ij} = u_{if} / l_{if} , \; i = 1, 2, \dots, M. \qquad (73)$$

$$q_{iN_i} > 0, \; i = 1, 2, \dots, M. \qquad (74)$$

Стоимость дополнительно приобретаемых ресурсов не должна превышать размер собственного капитала и оптимального объема кредита:

$$\left[\sum_f u_f * \gamma_f\right] \le R . \qquad (75)$$

Далее сравниваем $F_1$ и $F_2$ , и в качестве оптимальной стратегии из двух выбираем ту, у которой значение целевой функции выше.

Используя постановки стратегии I и II, можем также решить задачу определения максимальной ставки привлечения кредита, при которой сохраняется экономическая целесообразность кредитования закупки материальных и производственных ресурсов. Для этого необходимо сформулировать следующую оптимизационную задачу:

$$d \to max . \qquad (76)$$

Ограничение на целесообразность привлечения кредита (полагаем, что привлекать кредит выгоднее, чем использовать лишь собственные ресурсы):

$$F_1 = \sum \beta_i q'_{iNi} - d * \left[\sum_f u_f * \gamma_f\right] > F_2 = \sum_{i=1}^{M} \beta_i q''_{iNi} , \qquad (77)$$

Здесь $q''_{iNi}$ – интенсивности обработки заявок, полученные при решении задачи (68-75):

$$\sum_{i=1}^{M} q_{iNi}\alpha^l_{iNi} + \sum_{k=1}^{Np} q_{pK}\alpha^l_{pK} \le C^l , \; l = 1, \dots, M; \qquad (78)$$

$$q_{p1} = q_{pj} = \dots = q_{pNp} ; \qquad (79)$$

$$T * q_{iN_i} \ge Z_i , \; i = 1, 2, \dots, M; \qquad (80)$$

$$T * q_{iN_i} \le Pt_i , \; i = 1, 2, \dots, M; \qquad (81)$$

$$T * q_{iN_i} - \sum_j V_{ij} = u_{if} / l_{if} , \; I = 1, 2, \dots, M; \qquad (82)$$

$$q_{iN_i} > 0, \; i = 1, 2, \dots, M. \qquad (83)$$

В случае, если задача (60-67) не имеет решения по причине недостаточности производственных ресурсов, в ситуации растущего спроса на продукцию предприятие может принять решение о закупке производственных мощностей. В таком случае необходимо решить модифицированную задачу I:

$$F_1 = \int_0^T \beta_i q_{iNi} - d * \left[\sum_f u_f * \gamma_f + \sum_h y_h * c_h\right] \to max .$$

$y_h$ – дополнительно закупаемые объемы производственного ресурса вида ***h***,

$c_h$ – цена данного ресурса.

$$\sum_{i=1}^{M} q_{iNi}\alpha^l_{iNi} + \sum_{k=1}^{Np} q_{pK}\alpha^l_{pK} \le C^l + y_h , \; l = 1, \dots, M;$$

$$q_{p1} = q_{pj} = \dots = q_{pNp} ; \qquad (84)$$

$$T * q_{iN_i} \ge Z_i , \; i = 1, 2, \dots, M; \qquad (85)$$

$$T * q_{iN_i} \le Pt_i,\ i = 1, 2, \dots, M. \tag{86}$$

$$T * q_{iN_i} - \sum_j V_{ij} = u_{if} / l_{if},\ i = 1, 2, \dots, M; \tag{87}$$

$$q_{iN_i} > 0,\ i = 1, 2, \dots, M. \tag{88}$$

Стоимость дополнительно приобретаемых ресурсов не должна превышать размер собственного капитала и оптимального объема кредита:

$$\left[\sum_f u_f * \gamma_f + \sum_h y_h * c_h\right] \le R + V^* . \tag{89}$$

Рассмотренные подходы к анализу и моделированию конвейерного производства позволяют оптимально распределить производственные ресурсы, исходя из критерия, выбранного ЛПР, выявить области устойчивости полученных решений, получить обоснованные решения о привлечении кредита, объемах закупки дополнительных ресурсов. Модели управления оборотным капиталом в условиях риска позволяют получить эффективные решения в условиях неполноты и неточности задания исходных данных.

## Пример расчета оптимального использования производственных ресурсов в динамической модели управления производственными процессами

В данном разделе приведем иллюстративный пример применения детерминированной модели управления производственными ресурсами Красноярского металлургического завода «Старт».

Перед менеджментом стоит задача оптимизации производства четырех видов продукции: арматурной, оцинкованной, отоженной и сварочной проволоки, поскольку они имеют достаточно схожие технологические процессы и часть операций проводится на одинаковом оборудовании.

Приведем основные параметры производства и реализации продукции, необходимые для применения модели (табл. 1).

**Таблица 1**

**МАРЖИНАЛЬНЫЙ ДОХОД ПО ВИДАМ ПРОДУКЦИИ**

*Тыс. руб./т*

| Наименование продукции | Маржинальный доход от реализации единицы продукции |
|---|---|
| Оцинкованная проволока | 8,3 |
| Отточенная проволока | 6,8 |
| Сварочная проволока | 5,6 |
| Арматурная проволока | 6,5 |

Технологический процесс изготовления проволоки включает ряд классических операций (рис. 3).

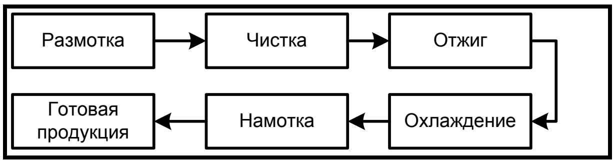


**Рис. 3 Укрупненная схема производства проволоки**

Для каждого вида проволоки существуют некоторые особенности технологического процесса. Так, при изготовлении оцинкованной проволоки добавляется стадия цинкования в растворе цинка, а для сварочной проволоки предусмотрена операция нанесения особых смазок, обеспечивающих антикоррозийную защиту, обе эти стадии предшествуют стадии охлаждения проволоки.

Детерминированная модель подразумевает проведение ряда итеративных процедур по нахождению оптимальных производительностей, начиная с последней операции. Поэтому для первой итерации сосредоточим внимание на операции намотки проволоки.

В распоряжении завода находятся 24 намоточных станка, производительность которых представлена в табл. 2.

**Таблица 2**

**ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ НАМОТОЧНЫХ СТАНКОВ**

*Т/день*

| Наименование продукции | Производительность 1 станка |
|---|---|
| Оцинкованная проволока | 12 |
| Отточенная проволока | 14 |
| Сварочная проволока | 19 |
| Арматурная проволока | 15,5 |

Тогда оптимизационная задача загрузки намоточных станков предприятия будет сформулирована следующим образом:

$$8.3 * 12 * x_1 + 6.8 * 14 * x_2 + $$
$$+ 5.6 * 19 * x_3 + 6.5 * 15.5 * x_4 \to max;$$

$$x_1 + x2 + x3 + x4 \le 24 \text{ ж}$$

$$x_i \in Z^+,\ i = 1, .., 4.$$

Решить эту оптимизационную задачу можно симплекс-методом с помощью Excel.

При заданных ограничениях значение маржинального дохода будет равно 2 553,6 тыс. руб. При этом решение задачи следующее:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 24, x_4 = 0 .$$

Таким образом, все 24 станка используются для намотки сварочной проволоки. Очевидно, что общий объем сварочной проволоки, готовой к продаже, равен 456 т (рассчитан как произведение количества станков на их производительность).

Незавершенное производство на конечной стадии производства (намотке проволоки) задано следующими значениями (табл. 3).

**Таблица 3**

**ОБЪЕМ НЕЗАВЕРШЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА НА КОНЕЧНОЙ СТАДИИ $V_{iN_i}(0)$**

*Т*

| Наименование продукции | Объем незавершенного производства |
|---|---|
| Оцинкованная проволока | 511,8 |
| Отточенная проволока | 213 |
| Сварочная проволока | 820,8 |
| Арматурная проволока | 709,4 |

Тогда получаем, что через время $\tau_1 = 820{,}8 / 456 = 1{,}8$ дня полностью закончится незавершенное производство на стадии намотки сварочной проволоки.

Далее переходим ко второму этапу итерационной процедуры. Для того чтобы продолжить выпуск сварочной проволоки необходимо выделить ресурсы на стадию охлаждения проволоки. Допустим, данная процедура длится в течение 0,5 дня. Охлаждение проводится в специальных ваннах, вместимость которых ограничена (200 т/день), поэтому учтем, что производительность сварочной проволоки не должна превышать 400 т/день.

С учетом вышеприведенных данных, оптимальная целевая функция на этом этапе будет выглядеть следующим образом:

$$8.3*12*x_1+6.8*14*x_2+$$
$$+5.6*0,5*19*x_3+6.5*15.5*x_4 \rightarrow max;$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4 \le 24;$$
$$0,5*19*x_3 \le 400;$$
$$x_i \in Z^+,\ i=1,..,4.$$

Получим оптимальное решение задачи:

$x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=24$,

т.е. на данном этапе все станки используются для намотки арматурной проволоки. Маржинальный доход равен 2 418 тыс. руб. Данный этап продлится $\tau_2=709,4/(24*15,5)=1,907$ дня. Т.е. через это время закончится все незавершенное производство арматурной проволоки на этапе намотки.

Мы получили оптимальное распределение производственных программ для первых 3,707 дня. Аналогичным образом можно продолжить расчеты до момента времени, когда будет обработан весь объем незавершенного производства на оставшихся операциях производственного процесса.

## Литература

1. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Ричард Брейли, Стюарт Майерс. – М. : Олимп-бизнес, 1997. – 1120 с.
2. Бурков В.Н. Элементы теории графов [Электронный ресурс] / В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. URL: http://www.mtas.ru/start/t_garf.pdf
3. Егорова Н.Е. Дифференциальный анализ развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционный ресурс [Текст] / Егорова Н.Е., Хачатрян С.Р., Маренный М.А. // Аудит и финансовый анализ. − 2004. − №45.
4. Мищенко А.В. Методы управления ограниченными ресурсами в логистических системах [Текст] / А.В. Мищенко. – М. : ИНФРА-М, 2011. – 184 с.
5. Markowitz H.M. Portfolio selection // Journal of finance. 1952. Vol. 7; №1. p. 71-91.

## Ключевые слова

Динамические модели; конвейерные системы; заемные средства; неопределенность.

*Мищенко Александр Владимирович*

*Артеменко Ольга Андреевна*

## РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность работы. Эффективность функционирования промышленного предприятия во многом зависит от того, насколько рационально использованы ограниченные ресурсы такого вида, как производственный аппарат предприятия, трудовые ресурсы, заемные и собственные средства. Важной задачей представляется разработка математических моделей, оптимизирующих деятельность предприятия в зависимости от выбранных критериев и позволяющих получить аргументированные решения по использованию производственно-финансовых ресурсов.

Научная новизна и практическая значимость. В работе рассматривается конвейерная система производства, в предположении о возможности перераспределения производственных мощностей в процессе реализации производственной программы, в отличие от часто встречаемого подхода, характеризующегося четким закреплением производственных ресурсов на всем интервале планирования. Представлены уравнения, описывающие функционирование конвейерных систем; рассматриваются методы распределения ограниченных ресурсов по критерию максимизации суммарного объема обработанных заявок (под заявками понимаются материалы, незавершенное производство, документы вычислительных и информационных центров и т.п.) и по критерию максимизации маржинального дохода за директивный период. Исследуется также устойчивость задачи оптимального распределения ресурсов в зависимости от изменения исходных данных модели. Предложены модели управления материальными и производственными ресурсами в конвейерных системах, предусматривающие возможность привлечения кредита и позволяющие сделать вывод о целесообразности его применения. Практическое применение модели показано в расчетном примере по данным промышленного предприятия.

Заключение: рецензируемая статья отвечает требованиям, предъявляемым к научным публикациям, и может быть рекомендована к опубликованию.

*Халиков М.А., д.э.н., проф., ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»*