3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВЕЛИЧИНЫ СПРОСА ОТ ЦЕНЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Егорова Н.Е., д.э.н., г.н.с., экономист-математик, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Центральный экономико-математический институт Российской Академии наук» (ФГБУН ЦЭМИ РАН);
Ким Т.Ш., соискатель, индивидуальный предприниматель

В статье предложена методика построения модели зависимости величины спроса от цены с использованием аппарата нечетких множеств. Приведен пример практической реализации представленной модели.

В условиях рыночной экономики успех любого предприятия или предпринимателя во многом зависит от того, насколько правильно они будут устанавливать цены на свои товары и услуги. Одним из ключевых факторов, оказывающих влияние на цены, является спрос, на который существенное влияние оказывает комплекс политических, экономических, психологических и социальных факторов.

Знание зависимости величины спроса от цены предопределяет целесообразность продажи товара. В классической теории цена и величина спроса соотносятся через коэффициент эластичности спроса по цене [5], полученный экспериментально. Достоинством коэффициента эластичности является простота расчета. Однако именно в этом заключается и его недостаток. При определении эластичности делается важная оговорка: «при прочих равных условиях». Коэффициент эластичности не учитывает влияния других неценовых факторов и существующей неопределенности.

Теоретически обоснованные решения по этому вопросу, насколько нам известно, отсутствуют. Поэтому задача определения зависимости $Q(P)$ с помощью математического аппарата является актуальной. В данной работе сделана попытка создать методику определения зависимости $Q = f(P)$ на основе теории нечетких множеств (ТНМ), и, зная эту зависимость, найти максимальную прибыль.

Разработанная Л. Заде ТНМ [1, 2] позволяет решать задачи с нечеткими исходными данными. В нашем случае нечетко характеризуется цена товара, например «хорошая» – это когда доход составит примерно от 10% до 150% от себестоимости товара, а «плохая» цена – от 0% до 30% от себестоимости товара. Но можно считать цену «хорошей», когда доход составляет от 40% до 200% от себестоимости товара, а «плохой» – от 0% до 50%. И первый, и второй вариант правомерны из-за отсутствия четкой границы между лингвистическими понятиями «хорошая» и «плохая». По этой же причине правомерны и перекрытия интервалов между ними (перекрытия имеют особое значение в ТНМ) и то, что мы относим, например, цену с доходностью в 20% и к «хорошим», и к «плохим». Цена, которая дает определенный доход N, может считаться «хорошей» и в то же время является «плохой», если будет давать доход в два раза меньше. Но в другой ситуации можно считать «хорошей» цену, дающую даже доход, меньший дохода N в три раза. Дать точное лингвистическое определение цене (строго хорошая или строго плохая) представляется нам невозможным.

Для понимания дальнейшего материала сформулируем основные постулаты ТНМ. Нечетким множеством называют множество A, для которого функция $\mu_A(x)$ принадлежности элемента x к A может принимать любые значения от нуля до единицы (таким образом, расширяется канторово понятие множества). При этом $x \in E$, где E – универсальное множество, имеющее некоторое свойство R, причем A – подмножество в E ($A \in E$), и для элементов x в A нет однозначного ответа «да», «нет» относительно свойства R. Между областями, где $\mu_A(x)$ имеет значение ноль и единица, существует так называемая область переключения (перекрытия). В ней и работает функция $\mu_A(x)$, определяя насколько данное значение (например, цена 95 руб. в рассматриваемом далее примере) принадлежит выбранному, часто приближенно, интервалу. Это объясняет необходимость иметь перекрывающиеся интервалы в нашей модели.

Общеизвестную формулу прибыли фирмы упрощенно запишем так:

$$P_r = (P - C) * Q - TC, \qquad (1)$$

где

P_r – прибыль фирмы;

P и C – цена и стоимость закупа единицы товара;

Q – величина спроса при цене P;

TC – общие затраты предприятия.

Данный расчет прибыли можно применять для любого субъекта экономической деятельности, будь то небольшой отдел розничной продажи или крупная компания. При этом будем считать, что средняя величина спроса за определенный период времени (неделя, месяц, год) нам известна, т.е. товар не является абсолютно новым на рынке. Также примем все остальные условия, влияющие на величину спроса, постоянными.

Основная идея работы

Основную идею данной работы можно представить в виде последовательного решения следующих задач:

- определяется зависимость $Q = f(P)$ на основе теории нечетких множеств. В формулу (1) вместо Q подставляется $f(P)$. P_r рассматривается как уравнение относительно P;
- определяется максимальная прибыль P_{rx} путем нахождения производной P_r по P_x. Производная приравнивается к нулю. Решение полученного уравнения дает искомую цену P_x, при которой прибыль фирмы максимальна. Затем находится Q при P_x, и по формуле (1) подсчитывается P_{rx}.

Предполагается, что данный метод потребует меньшего количества экспериментов, чем известные на сегодняшний день методы, потому что он позволяет учитывать влияние неопределенности.

Модель для определения зависимости $Q = f(P)$

Для каждой компании и товара, для которого определяется зависимость величины спроса от цены, разрабатывается система размытых правил, записываемая в соответствии с [4] в общем виде следующим образом:

$$IF\left(x_1 \in A_{1I}\right) \text{ И } \left(x_2 \in A_{2I}\right) \text{И...И } \left(x_k \in A_{kI}\right);$$
$$THEN\ y = \eta_I\left(x\right),\ i = 1,\ldots,N, \qquad (2)$$

где

A_{II} – нечеткое подмножество, т.е. нечеткий интервал для переменной x_I с функцией принадлежности $\mu_{AII}(x)$;

N – число правил (число интервалов);

$y = \eta_I(x)$ – функция, определяющая локальное решение модели от набора $x = (x_1,\ldots,x_k)$.

Для одномерной зависимости (речь идет о параметре цена) система размытых правил (2) приобретает вид:

$$IF\left(x \in A_I\right)\ THEN\ y = \eta_I\left(x\right),\ i = 1,\ldots,N, \qquad (3)$$

где A_I имеет функцию принадлежности $\mu_{AI}(x)$.

Для определения функции принадлежности используем прямой метод [4], в котором для каждого $x \in E$ задается значение $\mu_A(x)$. Это правомерно, поскольку метод применяется для измеряемых понятий, таких как давление, температура и т.д., а цена, несомненно, относится к этим понятиям.

Для описания нечеткой принадлежности к интервалам приняты, как это обычно делается при решении задач с использованием нечетких множеств, экспоненциальные функции:

$$\mu_{A_1}(x) = e^{-c(x-d)^2} \text{ и } \mu_{A_2}(x) = 1 - e^{-c(x-d)^2}, \qquad (4)$$

где

коэффициенты c и d характеризуют степень нечеткости (плавность переключения) и положение на числовой оси параметра цена (начало нечеткой границы);

коэффициент c определяется методом беспоисковой идентификации;

d – нашим представлением о понятии «цена».

Обоснование возможности определения зависимости $Q = f(P)$ на основе нечеткой логики

Поскольку компания при цене P имеет прибыль, равную P_r, то мы можем принять данную цену за «хорошую». Цены, которые дадут меньшую прибыль, естественно называть «плохими». К «хорошим» ценам, очевидно, надо отнести все цены, которые дадут доход, больший P_r. В данном случае нечетко определенной величиной является цена товара.

Определим примерные диапазоны цен, которые мы примем за «плохие» и «хорошие». При этом будем считать, что общие затраты постоянны и не зависят от количества проданного товара.

Условие «плохой» цены P_1: прибыль P_{r1}, полученная фирмой, становится меньше P_r, т.е. $P_{r1} < P_r$. Из формулы (1) вытекает, что, если при цене P_1 величина спроса Q_1, то:

$$P_1 < \frac{P_r + TC}{Q_1} + C = A_1. \qquad (5)$$

Для большей наглядности рассмотрим пример деятельности фирмы N с определенным товаром. Цену данного товара P примем равной средней рыночной цене P_1 = 100 руб., себестоимость C = 70 руб., величину спроса $Q = Q_1$ = 2 000 шт., суммарные затраты, приходящиеся на данный товар, TC = 20 000 руб.

Тогда фирма получит прибыль, которая из формулы (1) будет равна:

$$P_r = (100 - 70) * 2\,000 - 20\,000 = 40\,000 \text{ руб.}$$

Из (2) следует, что цена $P = A$ = 90 является «плохой» при Q < 3 000. Однако, если Q ≥ 30, то P_r > > 40 000, и цена 90 становится «хорошей». Из неравенства (5) также получим, что цена P = 95 становится «хорошей» при Q ≥ 2400.

Если из предыдущей деятельности фирмы (за год, месяц, неделю) заведомо известно, что величина спроса для данного субъекта экономической деятельности на рассматриваемый вид товара не может быть больше 3 000, то цены в пределах от 71 до 90 руб. естественно считать «плохими», так как при данных ценах компания получает прибыль меньше 40 000 руб. Аналогично цены 110, 120,…, 175, 195 могут быть как «хорошими», так и «плохими» в зависимости от величины спроса Q. Так, 195 – «хорошая» цена, если найдется 480 и больше покупателей данного вида товара при такой цене, и «плохая», если их будет меньше 480. 225 – «хорошая» цена при Q ≥ 388 и «плохая», если Q < 388. Так как вероятность того, что найдется 388 покупателей, готовых приобрести товар по цене почти в 2 раза большей, чем средняя цена на данный вид товара на рынке, очень мала, а при меньшей величине спроса прибыль фирмы будет меньше 40 000 руб., то к «плохим» ценам мы можем отнести и цены, большие 225. Какой диапазон цен считать «чисто плохим» или «чисто хорошим» зависит от величины спроса Q, но путем экспертных оценок он может быть установлен достаточно легко. При условиях, указанных выше, P = 90 можно без сомнения считать концом первого диапазона «плохих» цен (от 71 до 90, т.к. Q > 3000 из предыдущей деятельности фирмы мы считаем невозможным). Начало второго диапазона «плохой» цены является спорным. Какую именно цену (225 или, например, 275) брать за начальную точку зависит от многих обстоятельств. На взгляд авторов, предпочтительнее взять P = 225.

Отметим, что при использовании теории нечетких множеств это часто не имеет значения, так как дает малую погрешность в результатах.

Таким образом, в данном примере выделяются четко ограниченные интервалы «плохой» цены (71 ≤ P ≤ 90 и P ≥ 225) и одна четкая точка «хорошей» цены (P = = 100). Цены в интервалах от 90 до 100 и от 100 до 225 можно считать и «плохими» и «хорошими», то есть данные цены являются нечеткими. Поскольку таких примеров можно привести достаточно много, то можно сделать следующие выводы: цены на товар можно рассматривать как термы в теории нечетких множеств; среди них всегда можно выделить множества хороших и плохих цен, а также нечеткое множество цен, поэтому теория нечетких множеств может использоваться для определения зависимости $Q = f(P)$.

Определение зависимости спроса Q от цены P

В соответствии с теорией нечетких множеств представим Q следующим образом:

$$Q = \mu_1(P) * \eta_1(P) + \mu_2(P) * \eta_2(P), \qquad (6)$$

где

μ_1 и μ_2 – функции принадлежности, значения которых при полученном экспериментально небольшом количестве цен P_I предстоит определить в дальнейшем;

$\eta_1(P)$ и $\eta_2(P)$ – экспериментально полученные величины спроса при определенной цене P.

В данном выражении $\mu_1(P) = 0$, если цена P «плохая», $\mu_1(P) = 1$, если цена P «хорошая», и $\mu_1(P)$ какая-то определяемая нами величина (от 0 до 1), если считать, что в диапазоне [0;1] цена может быть и «хорошей», и «плохой».

Если $\mu_2(P) = 1$, то цена P «плохая», соответственно $\mu_2(P) = 0$, если цена P «хорошая». В соответствии с ТНМ $\mu_2(P) = 1 - \mu_1(P)$ в любой точке от нуля до единицы.

$\eta_1(P) = Q_{экс}$, где $Q_{экс}$ – экспериментально полученная величина спроса на товар при выставленной цене P_1, в нашем примере из диапазона (90-100). Например, $Q_{экс}$ = 2 400 при P_1 = 97.

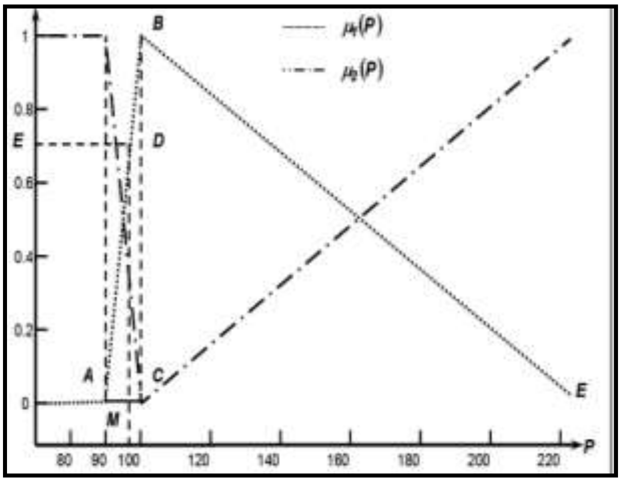

Рис. 1. Графики функций принадлежности μ_1 и μ_2

Теперь становится понятным, почему искомой является функция $Q(P)$, а не наоборот. Причина заключается в том, что нельзя экспериментально изменить величину спроса, а менять цену P можно. Ориентировочно (но достаточно близко к истине) $\mu_1 = f(P)$ и $\mu_2 = f(P)$ (см. рис. 1).

Отметим следующее важное обстоятельство: в ТНМ не имеют значения масштабы μ и P (рис. 2). Участок кривой AB можем принять за прямую линию. Тогда из анализа подобия треугольников AB_1C и AD_1M следует, что $\frac{E_10}{1} = \frac{D_1M}{B_1C} = \frac{97-90}{100-90} = 0{,}7$, а из анализа подобия треугольников AB_2C и AD_2M получим:

$$\frac{E_20}{1} = \frac{D_2M}{B_2C} = \frac{97-90}{100-90} = 0{,}7.$$

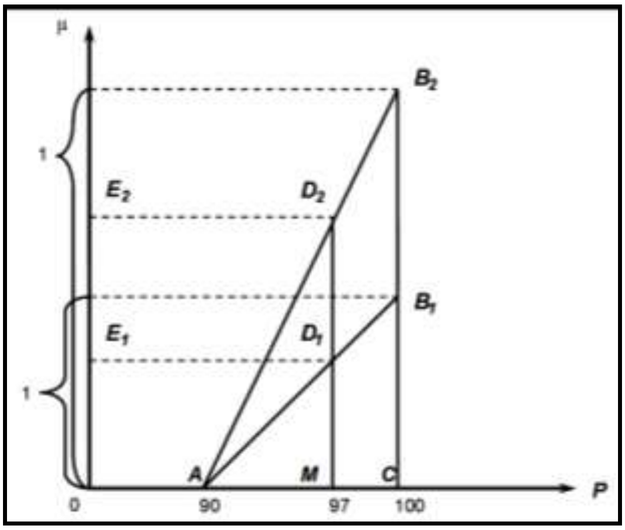

Рис. 2. Анализ значимости масштабов μ и P на графиках функций принадлежности

μ_1 при P_1 = 97 определяется следующим образом. Находим P_1 = 97 на оси P, из точки μ при P = 97 восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с прямой AB в точке D. Из точки D проводим прямую, параллельную оси P до пересечения с осью μ. Получаем, что $\mu = E0$, то есть части от 1. Найдем эту часть.

$\frac{E0}{1} = \frac{DM}{BC}$, а из подобия треугольников ADM и ABC следует: $\frac{DM}{BC} = \frac{97-90}{100-90} = 0{,}7$. μ_1 = 0,7. Таким образом, первое слагаемое в формуле (6) равно:

$$Q_{экс} * 0{,}7 = 2\,400 * 0{,}7 = 1\,600.$$

Далее также определяем второе слагаемое. Сумма двух слагаемых и даст искомую величину спроса при цене P_1 (см. формулу 6).

Затем аналогично для следующего опытного значения цены P_n определяем значение $\mu_1(P_n) * \eta_1(P_n)$ и $\mu_2(P_n) * \eta_2(P_n)$, сумма которых даст значение величины спроса Q при цене P_n. Таких экспериментальных точек необходимо взять от пяти до семи. Функции $\eta_I(P)$ определялись в виде:

$$\eta_I(P) = b_0 + b_1P,$$

где

P – цена товара;

b_0 и b_1 – параметры уравнения регрессии, оцениваемые по методу наименьших квадратов для каждого из интервалов отдельно.

Наконец с помощью различных приемов, известных из ТНМ, строится кривая $Q = f(P)$. До этого целесообразно уточнить кривую ABE. Как показывает практика применения ТНМ, скорее всего, данная кривая является параболой, у которой в точках A, B и E плавные переходы.

Таблица 1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ СПРОСА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЦЕНАХ

P	92	93	94	95	97	99
$Q_{экс1}$	2697	2532	2390	2527	2276	2176
$Q_{экс2}$	2852	2760	2487	2380	2354	1933
μ_1	0,3	0,35	0,4	0,5	0,7	0,9
μ_2	0,7	0,65	0,6	0,5	0,3	0,1
Q	2805,5	2680,2	2448,2	2453,5	2299,4	2151,7

С помощью полученных экспериментальных данных, представленных в табл. 1, и программы Microsoft Excel, построим линейную регрессионную модель зависимости $Q(P)$ вида $Q = a - b * P$. По результатам, полученным в Microsoft Excel, a = 10910; b = – 88,8.

$$Q = 10910 - 88{,}8P\,. \qquad (7)$$

Подставим полученное выражение (7) в формулу (1) и возьмем от него производную и приравняем ее к нулю:

$$P_r = (P - 70) * (10\,910 - 88{,}8P) - 20\,000 =$$

$$= -88{,}8P^2 + 17126P - 78\,3700;$$

$$P_r = -177{,}6P + 17126\,;$$

$$P = 96{,}4 \text{ руб.}$$

В описанном примере цена, при которой прибыль будет максимальна, получилась равной 96,4 руб.

Сфера применения данного метода представляется достаточно широкой. Им могут пользоваться фирмы, поставившие в качестве своей основной цели максимизацию прибыли. Политика компании далее определяется тем, насколько она может варьировать цену продажи своих товаров. Если эта фирма не является монополистом или олигополистом и должна исходить из неизменности цены, то она будет добиваться максимизации прибыли за счет варьирования объемов производства. В данном случае рассматриваемый метод оптимизации прибыли невозможен.

Таким образом, использование нечеткой логики в ценообразовании практически является возможным для фирм ценоискателей. Эти фирмы обладают рыночной силой, достаточной для того, чтобы устанавливать на свои товары цены, отличные от цен конкурентов. Такие ситуации характерны для рынков монополистической конкуренции и олигополии. Фирмы указанного типа могут и должны разрабатывать собственную ценовую политику, тогда как для фирм ценополучателей (на рынках совершенной конкуренции и рынках с доминирующими фирмами-лидерами) эта задача неактуальна – в основе их коммерческой политики лежит управление объемами производства, качеством продукции и затратами [5]. Добавим, что данный способ ценообразования представляется эффективным для применения субъектами малого бизнеса, организациями с относительно небольшим капиталом, для которых заказ дорогостоящей аналитики является неосуществимым.

Если фирма ценоискатель ставит своей основной задачей максимизацию прибыли и обладает полной информацией о рыночном спросе, то ее менеджеры на основе известных закономерностей всегда могут определить оптимальный объем продаж и цену, при которой весь этот объем может быть продан. Однако на практике, получить полную информацию о рыночном спросе практически нереально и приходится довольствоваться лишь определенными допущениями. Применение нечеткой логики позволяет учесть влияние неопределенности и неполноты информации о рыночном спросе.

ВЫВОДЫ

Для фирм-ценоискателей разработана методика, позволяющая с помощью теории нечетких множеств найти аналитическую зависимость спроса от цены и максимальную прибыль.

Литература

1. Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процесса принятия решений [Текст] / Л. Заде // Математика сегодня. – М. : Знание, 1974.
2. Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях [Текст] / Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений / под ред. И.Ф. Шахнова. – М. : Мир, 1976.
3. Маренко Н.Л. Цены и ценообразование [Текст] / Н.Л. Маренков. – М. : Экономистъ, 2000.
4. Регрессионное моделирование на основе нечетких правил [Текст] // Сб. научных трудов НГТУ. – 2000. – №2.
5. Экономическая теория. Экспресс-курс [Текст] : учеб. пособие / под ред. А.Г. Грязновой, Н.Н. Думной, А.Ю. Юданова. – 5-е изд. – М. : КНОРУС, 2010.

Ключевые слова

Величина спроса; цена; нечеткие множества; максимизация прибыли фирмы; стратегия ценообразования.

Егорова Наталья Евгеньевна

Ким Татьяна Шарковна

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность. Работа посвящена использованию аппарата нечетких множеств, разработанного ученым Л. Заде, для решения задачи формирования цены в зависимости от спроса.

Научная новизна и практическая значимость. Предложенный авторами алгоритм состоит в последовательности решения четырех задач:

- определение зависимости спроса от цены с использованием понятий теории нечетких множеств;
- нахождение аналитического выражения для цены максимизирующей прибыль фирмы;
- определение в соответствии с полученной ценой значения спроса;
- расчет на основе спроса соответствующей ему оптимальной прибыли.

Представляется, что предложенный алгоритм может быть использован в тех ситуациях, когда хозяйствующий субъект имеет возможность управлять ценой в некотором диапазоне ее возможного изменения, например, крупные фирмы-монополисты, представляющие значительную долю рынка, или малые фирмы, являющиеся своего рода монополистами на локальном рынке, либо занимающие монопольное положение в узком сегменте рынка.

Заключение. В качестве замечания можно отметить, что авторам следовало бы в явном виде ввести границы изменения цен. Однако выявленный недостаток не является существенным, в связи с чем считаю, что работа может быть рекомендована к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Бахтизин А.Р., д.э.н., в.н.с. Центрального экономико-математического института Российской Академии наук