3.12. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ АКЦИИ, АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ПУАССОНОВСКИЙ И ВИННЕРОВСКИЙ ПРОЦЕССЫ

Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры математической статистики и системного анализа;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры финансов и менеджмента

Тверской институт экологии и права

Рассматривается задача прогнозирования продажной цены бизнеса, основанный на нестационарной модели броуновского процесса изменения цены акции. Броуновский процесс является примером непрерывного виннеровского процесса с независимыми приращениями, в определенном смысле единственного. Поэтому интересно обратится к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса дает пуассоновский процесс. Возникает мысль о таком же распределении, объединяющим винеровский и пуассоновский процессы. В настоящей работе выводится, что пуассоновский и винеровский процессы аппроксимируются схемой дискретного случайного блуждания. Предлагаемая простая аппроксимация пуассоновского и винеровского процесса может быть полезной аналитикам фондового рынка.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости X_n бизнеса на конец последнего *n*-го прогнозного периода в методе дисконтирования доходов (***DDM***) в рамках доходного подхода для определения рыночной стоимости бизнеса. Один из способов определения величины X_n состоит в том, что за эту величину принимается прогноз цены продажи на конец последнего *n*-го периода [1, 2]. Однако этот способ определения продажной стоимости сталкивается с отсутствием соответствующих статистических данных для прогнозирования. Из обзоров рынка можно узнать в лучшем случае рост капитализации в отрасли за предыдущие годы, однако, экстраполяция этих данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. В работе [3] был предложен мультипликативный способ прогнозирования на базе стационарной лог-нормальной модели изменения стоимости. Он оказался применимым только в том случае, когда за основу берется изменение какого-нибудь экономического индекса, например, индекса Российской торговой системы (РТС) и к тому же предполагает стационарность прогнозного периода, которая как раз и отсутствует в общем случае по определению прогнозного периода. Получается, что лог-нормальная стационарная модель хорошо подходит для прогнозирования экономических индексов, но фактически не применима для прогноза изменения рыночной стоимости бизнеса в будущем на основе ретроспективы изменения стоимости его акций. Поэтому в работе [6] был предложен другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского движения цены акции, рассмотренной в [4]. Поскольку модель броуновского процесса является аддитивной [6], то и предложенный способ прогнозирования является аддитивным, т.е. постулирует независимость приращений. Аддитивный способ моделирования изменения стоимости бизнеса, как таковой, был нами рассмотрен в отдельной работе [5]. Не стационарности прогнозного периода, таким образом, предлагалось сопоставить нестационарную модель роста стоимости бизнеса, понимаемого как стоимость всей совокупности его голосующих акций. Винеровский процесс является примером непрерывного, аддитивного процесса с независимыми приращениями. В определенном смысле единственным, как показано в [7]. Поэтому интересно было обратится к дискретным процессам, которые удовлетворяю условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс, рассмотренный в [8]. Причем даже кусочно-постоянного. В пуассоновском процессе среднее значение приращения за время Δt линейно зависит от Δt с коэффициентом λ, который может быть оценен статистически подобно тому, как это было сделано для единственного параметра винеровского процесса в [6]. Соответствующее условное пуассоновское распределение аппроксимируется биномиальным, а разница двух одинаково распределенных биномиальных имеет распределение, которое получается из свертки биномиального с минус биномиальным и аппроксимирует нормальное условное распределение сечения непрерывного винеровского процесса, как сумма одинаково распределенных дискретных с.в. Отсюда в настоящей работе выводится, что пуассоновский процесс аппроксимируется схемой дискретного случайного блуждания с вероятностью перехода в следующее за ним (по возрастанию) дискретное состояние с вероятностью $p = \lambda\Delta t > 0$, а винеровский процесс – схемой дискретного случайного блуждания с вероятностью перехода в следующее за ним дискретное состояние с вероятностью p, возврата в предыдущее – тоже p, и, наконец, остаться в том же состоянии – $1-2p$. Параметрами и того и другого предельного условного распределения являются соответствующие вероятности переходов, которые, оцениваются статистически, подобно параметрам предельных процессов в предыдущих работах. Предлагаемая простая аппроксимация пуассоновского и винеровского процесса может быть полезной аналитикам фондового рынка, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области моделирования изменения цены акции на бирже и соответствующей стоимости бизнеса, понимаемой как совокупность всех его голосующих акций. Но важно, что уже из этих простых моделей видно, почему кроме пуассоновского и винеровского процессов ничего и не может получиться в пределе для процессов с независимыми приращениями, что является фундаментальным положением теории нестационарных процессов.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Будем отождествлять стоимость бизнеса со стоимостью всех его голосующих акций. Предположим, что эти акции котируются на бирже. Обозначим через $X(t)$ цену акции в момент времени $t = n\Delta t, n = 0,1,...,$ дискретного времени, где $\Delta t > 0$ – временной дискрет, например, заданная периодичность мониторинга данных об изменении цены акции на бирже. И предположим, что в момент $t = 0$ она приняла значение:

$$u = k\Delta x, k = 0,1,...; \qquad (1)$$

$$X(0) = u.$$

Здесь $\Delta x > 0$ – пространственный дискрет, например, заданная точность вычислений.

Предположим, что случайный процесс $X = X(t)$ адекватно описывается дискретным нестационарным пуассоновским процессом, задаваемым переходной функцией [7]:

$$p_t(u,E) = \sum_{m=0}^{n} p^m (1-p)^{n-m} C_n^m \aleph(u + m\Delta x, E), \qquad (2)$$

где, $p = \lambda\Delta t$, а λ – константа, которая оцениваются статистически.

Здесь $\aleph(u,E)$ – функция инцидентности точки u множеству $E \subset R_1$, равная единице, если точка принадлежит множеству и нуль, в противном случае. Напомним, что переходная функция представляет по определению вероятность принадлежности с.в. $X(t)$ измеримому по Лебегу множеству E на действительной прямой R_1. Плотность $p_t(u,v)$ условного дискретного распределения $X(t)$ при условии (1) выражается соответственно формулой:

$$p_t(u,v)=\sum_{m=0}^{n}p^m(1-p)^{n-m}C_n^m\delta(u+m\Delta x-v) \qquad (3)$$

и представляет собой плотность биномиального распределения со средним значением

$$m_u(t)=u+np\Delta x \qquad (4)$$

и дисперсией

$$D_u(t)=npq\Delta x.$$

Здесь $q=1-p$, а $\delta(u-v)$ – δ – функция, т.е. обобщенная функция, удовлетворяющая для любой непрерывной функции $\varphi(v)$ условию:

$$\varphi(u)=\int_E\varphi(v)\delta(u-v)dv.$$

Функция $\delta(u-v)$ – представляет собой обобщенную плотность вероятности дискретной с.в. сидящей в точке u. В частности, ее матожидание тоже равно u:

$$u=\int_E v\delta(u-v)dv.$$

Процесс имеющий дискретное условное распределение, заданное плотностью (3) может быть построен, как процесс с независимыми приращениями принимающими на каждом шаге дискретного времени значения 0 и Δx с вероятностью $p=\lambda\Delta t>0$. Поскольку для каждого $t>0$

$$n\to\infty,\ p\to 0, np=\lambda t,$$

при $\Delta t\to+0$, то условное биномиальное распределение (3) сходится к пуассоновскому распределению с плотностью:

$$p_t(u,v)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}\delta(u+m\Delta x-v), \qquad (5)$$

со средним значением:

$$m_u(t)=u+\lambda t\Delta x \qquad (6)$$

и дисперсией

$$D_u(t)=\lambda t\Delta x.$$

Соответствующая переходная функция, задается формулой:

$$p_t(u,E)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}\aleph(u+m\Delta x,E), \qquad (7)$$

определяющей пуассоновский процесс [7]. В этом смысле описанное случайное блуждание приводящее к биномиальному условному распределению (3) аппроксимирует пуассоновский процесс.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ВИННЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Наряду с условным распределением с плотностью $p_t(u,v)=p_t^+(u,v)$ заданной формулой (3) рассмотрим его зеркальное отражение относительно точки u на оси ординат, заданное:

$$p_t^-(u,v)=\sum_{m=0}^{n}p^m(1-p)^{n-m}C_n^m\delta(u-m\Delta x-v) \qquad (8)$$

и представляет собой плотность биномиального распределения с.в. со средним значением

$$m_u(t)=u-np\Delta x \qquad (9)$$

и дисперсией

$$D_u(t)=npq\Delta x.$$

Рассмотрим распределение, которое получается сверткой условного распределения (3) и (8):

$$p_t(u,v)=p_t^-(u,v)*p_t^+(u,v). \qquad (10)$$

Здесь * – означает свертку двух функций [7].

Распределение (10) представляет собой распределение суммы двух независимых случайных величин: случайной величины, подчиненной биномиальному распределению (3), с его зеркальным отражение относительно точки u на оси ординат. И аппроксимирует нормальное условное распределение сечения $X(t)$, как сумма одинаково распределенных дискретных приращений, принимающими на каждом шаге дискретного времени значения $-\Delta x$, 0, и Δx с вероятностью, соответственно, $qp,1-2pq,pq$. С матожиданием $m=0$ и дисперсией $d=2pq\Delta x$. Поскольку

$$n\to\infty,\ p\to 0,$$

$$D_u(t)=2npq\Delta x=2\lambda t(1-\lambda\Delta t)\Delta x\to 2\lambda t\Delta x,$$

при $\Delta t\to+0$, то условное биномиальное распределение (10) сходится к нормальному распределению с плотностью:

$$p_t(u,v)=e^{-(u-v)^2/2ct}, \qquad (11)$$

при

$$c=2\lambda\Delta x$$

со средним значением:

$$m_u(t)=u, \qquad (12)$$

и дисперсией

$$D_u(t)=ct. \qquad (13)$$

Соответствующему переходной функции, заданной формулой

$$p_t(u,E)=\frac{1}{\sqrt{2\pi ct}}\int_E e^{-(v-u)^2/2ct}dv, \qquad (14)$$

определяющей виннеровский процесс [6], соответствующий непрерывному броуновскому движению. В этом смысле описанное случайное блуждание, приводящее к условному распределению (10), аппроксимирует броуновское движение. Одновременно выяснен смысл единственного параметра c, определяющего виннеровскую переходную функцию (14). А именно $c=2\lambda\Delta x$, где λ – единственный параметр аппроксимирующего пуассоновского распределения (5). Имея распределение с.в. $X(t)$, подчиненной закону (10), можно построить распределение с.в. $|X(t)|$. Тогда это будет уже распределение соответствующее описанному блужданию с отражающим экраном в нуле и для него среднее уже не будет совпадать с начальным значением и возникает возможность построения нетривиальных формул для прогнозирования условного среднего цены акций в будущем и соответствующих ей брокерских критериев, подобно тому как это было сделано нами в непрерывном случае в [6]. Параметрами и того и другого аппроксимирующего распределения являются соответствующие вероятности переходов, которые, оцениваются статистически, подобно параметрам предельных процессов в предыдущих работах [6,8].

3. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УСЛОВНОГО МАТОЖИДАНИЯ ЦЕНЫ В МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО БЛУЖДАНИЯ С ОТРАЖАЮЩИМ ЭКРАНОМ

Обозначим для удобства

$$p_m^+ = P(X_u^+(t) = u + m\Delta x), m = 0,1,\ldots,n, \tag{15}$$

$$p_m^- = P(X_u^-(t) = u - k\Delta x), k = 0,1,\ldots,n. \tag{16}$$

Здесь $X_u^+(n)$ – случайная величина подчиненная дискретному закону распределения (3), а $X_u^-(n)$ – соответственно, закону (8). И пусть

$$p_l = P(X_u(t) = u + l\Delta x), l = -n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n, \tag{17}$$

где $X_u(t)$ – случайная величина подчиненная дискретному закону распределения (10). Тогда, по определению свертки

$$p_l = \sum_{max(-l,0)}^{min(n,n-l)} p_{l+k}^+ p_k^-, l = -n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n. \tag{18}$$

Формула (18) дает дискретный закон распределения с.в. $X_u(n)$, который является дискретным аналогом броуновского процесса. Для того, чтобы построить дискретный аналог броуновского процесса с отражающим экраном в нуле [6] достаточно построить закон распределения с.в. $|X_u(t)|$ [7]. Если

$$u - n\Delta x \geq 0, \tag{19}$$

то $X_u(n) \geq 0$ и распределение $|X_u(n)|$ совпадает с распределением (18). В противном случае обозначим

$$l_u = u / \Delta x. \tag{20}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overline{p}_l &= P(|X_u(n)| = u + l\Delta x) = \\ &= \begin{cases} p_l, l \geq n - 2l_u \\ 2p_l, l < n - 2l_u \end{cases}, l = -l_u,\ldots,-1,0,1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{21}$$

Соответствующее условное среднее получается по обычной формуле для математического ожидания дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned} m_u(t) &= \sum_{l=-l_u}^{n} (u + l\Delta x)\overline{p}_l = \\ &= 2\sum_{l=-l_u}^{n-2l_u-1} (u + l\Delta x)p_l + \sum_{l=n-2l_u}^{n} (u + l\Delta x)p_l. \end{aligned} \tag{22}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что формулы (18), (21) полностью решают задачу построения условного дискретного распределения аппроксимирующего броуновский процесс с отражающим экраном в нуле, а формула (22) может служить для прогноза изменения цены акции в будущем. Предлагаемая простая аппроксимация пуассоновского и виннеровского процесса может быть полезной аналитикам фондового рынка, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области моделирования изменения цены акции на бирже и соответствующей стоимости бизнеса, понимаемой как совокупность всех его голосующих акций.

Литература

1. Оценка бизнеса: Учебник/ Под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М.: Финансы и статистика.– 2002.
2. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и/или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России». – Deloitte&Touche. – декабрь 2003-март 2005.
3. Батурина О.Ю., Басангов Ю.М., Перевозчиков А.Г. Прогнозирование изменения чистого операционного дохода от аренды недвижимости в зависимости от предполагаемого изменения ее стоимости. Финансовая аналитика,– 2007, №5, с. 42-46.
4. Перевозчиков А.Г., Лесик А.И. Об аддитивной форме рекуррентного уравнения для денежного потока на инвестированный капитал. Аудит и финансовый анализ. – 2010, №3, с. 163-169.
5. Перевозчиков А.Г., Лесик А.И. К аддитивной форме рекуррентного уравнения для дисконтирования денежного потока. Аудит и финансовый анализ. – 2010, №4, с.105-108.
6. Перевозчиков А.Г., Лесик А.И. О прогнозировании изменения цены бизнеса в рамках аддитивной модели скачков на базе броуновского процесса. Аудит и финансовый анализ. – 2011, №3, с. 200-203.
7. Дж. Ламперти. Вероятность. – М.: Наука, 1973. – 184 с.
8. Перевозчиков А.Г., Лесик А.И. О прогнозировании изменения цены бизнеса в рамках дискретной модели скачков на базе пуассоновского процесса. Аудит и финансовый анализ. – 2011, №5, с. 11-13.

Ключевые слова

Оценка бизнеса; доходный подход; метод дисконтирования доходов; продажная стоимость бизнеса; ставка дисконта; инвестированный капитал; собственный капитал; выручка; денежный поток (ДП); темп изменения изменения ДП.

Лесик Александра Ильинична

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Известно, что, экстраполяция статистических данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. Поэтому в предшествующих работах авторами изучался другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса, основанный на нестационарной модели броуновского процесса изменения цены акции. Броуновский процесс является примером непрерывного виннеровского процесса с независимыми приращениями, в определенном смысле единственного. Поэтому интересно обратиться к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса дает пуассоновский процесс. Наконец, возникает мысль о таком же распределении, объединяющем виннеровский и пуассоновский процессы. Такая модель прогнозирования построена в предшествующей работе авторов.

В настоящей работе показано, что пуассоновский и виннеровский процессы аппроксимируются схемой дискретного случайного блуждания. Параметрами и того и другого предельного условного распределения являются соответствующие вероятности переходов, которые оцениваются статистически подобно параметрам предельных процессов в предыдущих работах авторов. Предлагаемая простая аппроксимация пуассоновского и виннеровского процесса может быть полезной аналитикам фондового рынка, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области моделирования изменения цены акции на бирже и соответствующей стоимости бизнеса, понимаемой как совокупность всех его голосующих акций.

Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, А.И. Лесик «Дискретные модели изменения цены акции, аппроксимирующие пуассоновский и виннеровский процессы» является новой и актуальной и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н., профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и права, декан факультета экономики и менеджмента