3.11. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ СУБЪЕКТОВ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В УСЛОВИЯХ РАССРЕДОТОЧЕННОГО РЫНКА СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Коваленко А.Г., д.ф.-м.н., профессор

Самарский государственный университет

Известно, что статистическая информация о функционировании сложных рассредоточенных систем часто далека от описания фактического состояния системы и не позволяет сделать каких-либо выводов о правильности ее функционирования. Так, например, из мировой практики эксплуатации систем водообеспечения, водоотведения известно, что суммарные замеры у потребителей и у поставщиков отличаются на 40-60%. И связано это не столько с погрешностью измерительных приборов, сколько с неэффективной эксплуатацией соответствующих систем и потерями потока. Еще сложнее анализ пространственно-рассредоточенных систем, в которых самостоятельные в принятии решений субъекты осуществляют экономическое взаимодействие при производстве, купле-продаже, перепродаже, потреблении. В работе рассмотрены математические модели продавцов, покупателей, арбитражеров и модели их взаимодействия в условиях однопродуктового рассредоточенного рынка совершенной конкуренции. На основе этих моделей приведены методы, позволяющие оценить параметры функционирования каждого субъекта и системы в целом.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что поведение субъектов рынка совершенной конкуренции описывается кривыми спроса и предложений. Его равновесное состояние [2, 5] достигается в точке пересечения этих кривых. Рынок будем называть сосредоточенным, если поведение всех его субъектов (покупателей и продавцов) описывается одной кривой спроса и одной кривой предложений. Более общей является ситуация, когда субъекты рынка рассредоточены по различным пунктам – локальным рынкам, связанным между собой торгово-транспортными коммуникациями. В этом случае в рынок вступают новые субъекты (будем называть их арбитражерами), которые являются промежуточными звеньями между производителями и потребителями. Процессы купли-продажи проходят как между субъектами каждого пункта, так и между субъектами различных пунктов, с той лишь разницей, что в последнем случае товар должен быть перевезен по некоторым торгово-транспортным коммуникациям. В этом случае каждый пункт характеризуется своими кривыми спроса и предложений, каждая коммуникация характеризуется транспортной кривой, представляющей собой зависимость объема перевоза между пунктами от разности цен в инцидентных пунктах. Такой рынок будем называть рассредоточенным [2, 3]. Под его равновесным состоянием будем понимать состояние, когда весь товар продается, покупается, перевозится в соответствии с соотношениями, определяемыми кривыми, а также уравнениями материального баланса каждого пункта. Для описания рассредоточенного рынка применим аппарат теории гидравлических сетей [4], использующий сетевую постановку задач.

В экономико-математическом моделировании широко используются сетевые постановки экономических задач. Наиболее близкой к задачам теории гидравлических сетей является транспортная задача линейного программирования в сетевой постановке и двойственная к ней [1]. Если в сетевой транспортной задаче функции стоимости перевоза по дугам графа выпуклые, нет ограничений на знаки потоков, то с помощью метода множителей Лагранжа задача сводится к частному случаю задачи потокораспределения. В данной работе рассматривается дальнейшее развитие этих задач, позволяющее описать рассредоточенный рынок, и показывается, что задача отыскания его равновесного состояния сводится к задаче потокораспределения в сети с нефиксированными отборами [4].

Часто для реальных экономических систем объемы ввоза-вывоза, цены, установившиеся в пунктах, и объемы перевоза известны из статистической отчетности. Обычно они не удовлетворяют основным балансовым соотношениям, кривым спроса и предложений и транспортным кривым. Как правило, кривые спроса и предложений и транспортные кривые неизвестны, хотя часто именно они и представляют наибольший интерес в экономических исследованиях. На их основе можно решать, например, задачи инвестиционной привлекательности пунктов. Отсюда возникают задачи поиска этих параметров, т.е. идентификации этих кривых.

С математической точки зрения рассмотрение вопросов идентификации реальных объектов приводит к необходимости постановки и решения так называемых обратных задач. Очень часто обратные задачи являются некорректно поставленными, трудно решаемыми. Общая проблематика идентификации гидравлических сетей и подходы к ее решению рассмотрены в работе [4].

Одним из таких подходов, который имеет широкое применение в статистических методах идентификации, является подход, основанный на методе наименьших квадратов. В данной работе этот подход развивается применительно к рассматриваемым экономико-математическим моделям. Ставится задача минимизации суммы квадратов отклонения искомых величин от замеренных (заданных) при условиях, которым должны удовлетворять потоки в сетях в условиях равновесия. Для получившейся задачи строятся необходимые условия, основанные на методе множителей Лагранжа. В результате получается, что как переменные, характеризующие движение потока, так и множители Лагранжа удовлетворяют законам движения гидравлических потоков в сети, и задача сводится к суперпозиции двух задач потокораспределения. Это дает возможность применить для решения задач известные, хорошо разработанные алгоритмы потокораспределения в гидравлической сети с небольшой их модификацией.

В заключение работы приводится анализ предложенных моделей и алгоритмов, рассматриваются проблемы, связанные с их развитием и применением.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для описания моделей воспользуемся основными определениями и обозначениями из теории графов. Пусть

$G = \langle E, V, H \rangle$ – связный конечный ориентированный граф;

E – множество вершин графа;

V – множество дуг;

H – отображение $H : V \to E \times E$.

Каждой дуге $v \in V$ отображение H ставит в соответствие упорядоченную пару ($h1(v)$, $h2(v)$) вершин из E, $h1(v)$ – начало дуги v, $h2(v)$ – конец.

Будем говорить, что из вершины i выходит дуга v, если $i = h1(v)$, и входит в вершину j, если $j = h2(v)$. Множество дуг, входящих в вершину i, обозначим через $V^+(i)$, множество дуг, выходящих из вершины i, обозначим через $V^-(i)$.

Вершины $i \in E$ интерпретируем как пункты – локальные рынки купли-продажи некоторого однородного продукта. Каждой вершине $i \in E$ в соответствие поставлены переменные P_i, C_i, интерпретируемые как соответственно цена и объем внешнеторгового сальдо этого продукта, $C_i = D_i - S_i$, D_i – объем спроса, S_i – объем предложений. Если $C_i < 0$, то в этой вершине предложение (и соответственно вывоз) преобладает над спросом (и соответственно над ввозом) и она является источником потока, если $C_i > 0$, то преобладает спрос над предложением и она является стоком потока, $C_i = 0$ – промежуточная вершина.

Дуги $v \in V$ интерпретируем как торгово-транспортные коммуникации (системы), по которым осуществляется транспорт потока. Обозначим через Q_v величину потока, идущего по дуге $v \in V$, направление дуги указывает положительное направление потока. Объем транспорта Q_v по дуге v зависит от разности цен между инцидентными пунктами и описывается зависимостью:

$$Q_v = \varphi_v(P_{h2(v)} - P_{h1(v)});\ v \in V. \qquad (1)$$

Q_v возрастает с ростом ($P_{h2(v)} - P_{h1(v)}$), причем если ($P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) < 0$, то $Q_v < 0$, и наоборот, если ($P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) > 0$, то $Q_v > 0$. Эта зависимость фактически отражает предложение пункта $h1(v)$ пункту $h2(v)$ при разности цен $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) \geq 0$, и наоборот, предложение пункта $h2(v)$ пункту $h1(v)$ при разности цен $P_{h2(v)} - P_{h1(v)} < 0$.

Перепишем зависимость (1) в виде:

$$P_{h2(v)} = P_{h1(v)} + f_v(Q_v);\ v \in V, \qquad (2)$$

т.е. цена $P_{h2(v)}$ продукта в конце дуги v равна цене продукта в начале дуги v плюс добавленная цена при его транспортировке $f_v(Q_v)$, где f_v , функция, обратная для φ_v. Из экономического анализа этой функции можно заключить, что она возрастающая, нечетная, при $Q_v > 0$ выпуклая вверх. Аналитически такую функцию можно записать в виде $f_v(Q_v) = A_v Q_v |Q_v|^{\alpha_v}$,

где $A_v \geq 0$, $0 < 1 + \alpha_v \leq 1$.

Для всех вершин $I \in E$ должно выполняться уравнение материального баланса

$$\sum_{v \in V^+(i)} Q_v - \sum_{v \in V^-(i)} Q_v = C_i\ ;\ i \in E, \qquad (3)$$

где C_i – внешнеторговое сальдо.

Как отмечалось выше, если $C_i < 0$, то i-я вершина источник потока, если $C_i > 0$, то сток потока, если $C_i = 0$, то промежуточная вершина.

Разобьем множество вершин E на две непересекающиеся части E_1 и E_2. В вершинах из E_1 заданы цены потока (вершины с фиксированными ценами P_i^*)

$$P_i - P_i^* = 0\ ;\ i \in E_1. \qquad (4)$$

В вершинах из E_2 задана величина внешнеторгового сальдо (вершины с фиксированным внешнеторговым сальдо C_i^*)

$$C_i - C_i^* = 0\ ;\ i \in E_2. \qquad (5)$$

Задача 1

Систему уравнений (2–5) будем называть задачей 1. Она представляет собой задачу потокораспределения в гидравлической сети (в дальнейшем просто задачей потокораспределения) и для ее решения в настоящее время разработаны достаточно эффективные алгоритмы [4]. В случае, когда множество E_1 одноэлементное, задачу 1 называют задачей с фиксированными отборами.

Обозначим кривую спроса через $D_i = D_i(P_i)$, кривую предложений через $S_i = S_i(P_i)$, тогда кривая внешнеторгового сальдо будет иметь вид $C_i = C_i(P_i) = D_i(P_i) - S_i(P_i)$. Разобьем множество вершин E на три непересекающиеся части E_1, E_2 и E_3. Любое из этих множеств может быть пустым. В вершинах из E_1 заданы цены потока (вершины с фиксированными ценами): $P_i = P^*_i,\ i \in E_1$. В вершинах из E_2 зададим объем потока (вершины с фиксированным внешнеторговым сальдо):

$$C_i = C_i^*\ ;\ i \in E_2.$$

В вершинах из E_3 объем потока есть функция цены (вершины с нефиксированным внешнеторговым сальдо):

$$C_i = C_i(P_i);\ i \in E_3. \qquad (6)$$

Задача 2

Систему уравнений (2–6) будем называть задачей 2. Она является задачей потокораспределения в гидравлической сети с нефиксированными отборами и для ее решения также в настоящее время разработаны достаточно эффективные алгоритмы. Заметим, что в гидравлической сети на решения задачи (2-6) могут налагаться также дополнительные ограничения:

$$Q_v \geq 0;\ v \in V^*, \qquad (7)$$

где $V^* \subset V$ (множество V^* может быть пустым). В множество V^* входят дуги, интерпретируемые как насосы, обратные клапаны т.д.

Сведем задачу 2 к задаче 1. Для этого в граф введем дополнительную вершину $\zeta \notin E$ и положим $E = \{\zeta\} \cup E$. Для новой вершины положим $P(\zeta)$, она будет вершиной с фиксированной ценой.

В начале вершину ζ соединим с вершинами $i \in E_3$ дополнительными дугами v, начало которых в вершине ζ, конец в i. Для этих дуг v (их множество обозначим через $V^-(\zeta)$) положим:

$$P_{h2(v)} = P_{h1(v)} + f_v(Q_v), \qquad (8)$$

где $f_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) = S_i\ (P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) = S_i(P_i)$. Эти дуги будут соответствовать предложениям вершин.

Затем вершину ζ соединим с вершинами $i \in E_3$ дополнительными дугами v, конец которых в вершине η , начало i. Для этих дуг v (их множество обозначим через $V^+(\eta)$) положим:

$$P_{h2(v)} = P_{h1(v)} + f_v(Q_v), \qquad (9)$$

где $f_v^{-1}(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) = D_i\ (P_{h1(v)} - P_{h2(v)}) = D_i(P_i)$. Эти дуги будут соответствовать спросу вершин.

Для вершин $i \in E_3$ положим $C_i^* = 0$, т.е. эти вершины становятся вершинами с нулевым фиксированным внешнеторговым сальдо. Также переобозначим множество дуг, положив $V = V \cup V^+(\zeta) \cup V^-(\zeta)$. Следует заметить, что:

$$Q_v \geq 0; \quad v \in V^+(\zeta) \cup V^-(\zeta). \qquad (10)$$

В результате этих преобразования задача 2 приводится к виду задачи 1, при этом неравенства (10) являются аналогом неравенств (7). В связи с этим в дальнейшем задачу потокораспределения будем рассматривать в постановке задачи 1.

Как отмечалось выше, при анализе реальных экономических систем из статистической отчетности величины Q_v, $v \in V$, P_i, C_i, $i \in E$ известны и часто они не удовлетворяют соотношениям (2, 3). Как правило, неизвестными являются параметры кривых f_v, и именно эти кривые представляют практический интерес. Для дальнейшего анализа нам необходимо конкретизировать вид этих функций. Будем рассматривать их в виде

$$f_v(Q_v) = A_v Q_v |Q_v|^{\alpha_v}\ ;\ v \in V. \qquad (11)$$

Заметим, что для $v \in V^+(\zeta) \cup V^-(\zeta)$ $Q_v \geq 0$, поэтому $Q_v|Q_v|^{\alpha_v} = Q_v^{\alpha_v+1}$, причем для $v \in V^-(\zeta)$ $0 < (\alpha_v + 1) \leq 1$, для $v \in V^+(\zeta)$ $(\alpha_v + 1) < 0$.

ЗАДАЧА ПОИСКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ СУБЪЕКТОВ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В УСЛОВИЯХ РАССРЕДОТОЧЕННОГО РЫНКА

Будем считать, что значения переменных Q^*_v, A^*_v, $v \in V$, C^*_i, P^*_i, $i \in E$ заданы и, в силу различных причин, не удовлетворяют системе уравнений (2, 3). Если для некоторых элементов сети значения этих переменных неизвестны, то задаем произвольные, правдоподобные значения.

Задача 3

Она заключается в отыскании значений переменных A_v, Q_v, $v \in V$, C_i, P_i, $i \in E$, удовлетворяющих системе уравнений и неравенств (2, 3, 10) и минимизирующих функционал:

$$F = \frac{1}{2}\left(\begin{aligned} &\sum_{v\in V} q_v(Q_v - Q_v^*)^2 + \sum_{v\in V} a_v(A_v - A_v^*)^2 + \\ &+ \sum_{i\in E} c_i(C_i - C_i^*)^2 + \sum_{i\in E} p_i(P_i - P_i^*)^2 \end{aligned} \right),$$

где q_v, a_v, $v \in V$, c_i, p_i, $i \in E$ – положительные коэффициенты, приводящие слагаемые к безразмерному виду и определяющие их достоверность.

Чем больше значение коэффициента, тем больше достоверность соответствующего слагаемого для элементов сети с произвольными, правдоподобными значениями Q_v, A_v, C_i, P_i. Соответствующие значения q_v, a_v, c_i, p_i должны быть достаточно малыми для элементов сети с Q_v, A_v, C_i, P_i, значения которых не вызывает сомнения (например, $C_i = 0$ для промежуточных вершин), соответствующие значения q_v, a_v, c_i, p_i должны быть достаточно большими.

Методы решения задачи 3

Ранее отмечалось, что методы решения задач 1 и 2 подробно рассмотрены в работе [4], поэтому более подробно остановимся на разборе методов решения задачи 3. Составим функцию Лагранжа минимизации функционала F при ограничениях (2, 3):

$$L = F + \sum_{v\in V} x_v\left(P_{h2(v)} - P_{h1(v)} - f_v(Q_v)\right) +$$
$$\sum_{i\in E} y_i\left(\sum_{v\in V^+(i)} Q_v - \sum_{v\in V^-(i)} Q_v - C_i\right)$$

В дальнейшем множители Лагранжа x_v, $v \in V$ будем называть лагранжевыми потоками, множители y_i, $i \in E$ - лагранжевыми ценами. Переменные Q_v, $v \in V$, P_i, $i \in E$ будем называть соответственно продуктовыми потоками и ценами. Смысл этих названий будет ясен из дальнейшего изложения материала.

Необходимыми условиями минимума функционала F при ограничениях (2, 3) являются следующие соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_v} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial A_v} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial x_v} = 0,\quad v \in V;$$
$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial P_i} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0,\quad i \in E.$$

В случае, если решение этой системы уравнений будет также удовлетворять неравенствам:

$Q_v > 0$, $v \in V^+(\eta) \cup V^-(\zeta)$,

то оно (решение) будет удовлетворять и необходимым условиям минимума задачи 3.

Несложными преобразованиями этих соотношений получаем:

$$P_{h2(v)} = P_{h1(v)} + A_v Q_v|Q_v|^{\alpha_v},\ v \in V; \tag{12}$$

$$\sum_{v\in V^+(i)} Q_v - \sum_{v\in V^-(i)} Q_v = C_i^* + \frac{y_i}{c_1},\ i \in E; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} y_{h2(v)} &= y_{h1(v)} - q_v(Q_v - Q_v^*) + \\ &+ x_v(\alpha_v + 1)A_v|Q|^{\alpha_v},\ v \in V; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\sum_{v\in V^+(i)} x_v - \sum_{v\in V^-(i)} x_v = -p_i(P_i - P_i^*),\ i \in E; \tag{15}$$

$$A_v = A_v^* + x_v Q_v|Q_v|^{\alpha_v} / a_v,\ v \in V. \tag{16}$$

Просуммировав соотношения (13) по $i \in E$, получим

$$\sum_{i\in E} C_i^* = -\sum_{i\in E}\frac{y_i}{c_i}. \tag{17}$$

Суммируя соотношения (15) по $i \in E$, получим:

$$\sum_{i\in E} p_i P_i = \sum_{i\in E} p_i P_i^*. \tag{18}$$

Таким образом, задача минимизации функционала F сведена к решению системы уравнений (12-18). Легко видеть, что при фиксированных лагранжевых потоках x_v, ценах y_i и значениях A_v система уравнений (12), (13), (18) представляет собой задачу потокораспределения продуктовых потоков. И, наоборот, при фиксированных продуктовых потоках Q_v, ценах P_i и значениях A_v система уравнений (14, 15, 17) представляет собой задачу потокораспределения лагранжевых потоков такого же вида, что и потокораспределение продуктовых потоков. Лагранжев поток x_v входит в уравнения (14) линейно, что облегчает ее решение. Несколько необычный вид имеют лишь соотношения (17,18). Получившаяся структура уравнений и определяет методы решения задачи.

Основные методы решения задач потокораспределения подразделяются на поузловую и поконтурную увязку сети. Однако, соотношения (17, 18) затрудняют применение для решения получившихся задач потокораспределения методы поузловой увязки.. Покажем, как для ее решения можно применить поконтурную увязку.

Выделим в графе G произвольный остов $G' = \langle E, V', H\rangle$. Дуги $u \in V \setminus V'$, которые будем называть хордами, совместно с вершинами и дугами остова определяют фундаментальную систему циклов $G_u = \langle E_u, V_u, H\rangle$, $u \in V \setminus V'$. Для каждого такого цикла зададим направление обхода, совпадающего с направлением дуги u. Соответственно, для каждого цикла введем функцию $sgn_u(v)$, определенную на множестве V:

- $sgn_u(v)=1$, если направления дуг v и u совпадают;
- $sgn_u(v)=1$, если направления дуг v и u противоположны;
- $sgn_u(v)=0$, если дуга v вне множества V_u;

Очевидно, что

$$(P_{i2}-P_{i1})+(P_{i3}-P_{i2})+(P_{i4}-P_{i3})+\dots+(P_{ik}-P_{i1})=0,\quad u\in V\setminus V', \tag{19}$$

где $i1, i2, i3, \dots, ik$ – вершины цикла C_u, перечисленные в направлении дуги u. Аналогично для лагранжевых напоров:

$$(y_{i2}-y_{i1})+(y_{i3}-y_{i2})+(y_{i4}-y_{i3})+\dots+(y_{ik}-y_{i1})=0,\quad u\in V\setminus V'. \tag{20}$$

Для каждой дуги $v\in V$ обозначим $\Delta P_v=P_{h2(v)}-P_{h1(v)}$, $\Delta y_v=y_{h2(v)}-y_{h1(v)}$. Подставляя новые переменные в (12, 14, 19, 20), получаем

$$\Delta P_v=A_vQ_v\left|Q_v^{\alpha_v}\right|,\ v\in V; \tag{21}$$

$$\Delta y_v=-q_v(Q_v-Q_v^*)+x_v(a_v-1)A_v\left|Q_v\right|^{\alpha_v},\ v\in V; \tag{22}$$

$$\sum_{v\in V_u}sgn_u(v)\,\Delta P_v=0\,; \tag{23}$$

$$\sum_{v\in V_u}sgn_u(v)\,\Delta y_v=0\,. \tag{24}$$

Равенства (23) представляют собой второе правило Кирхгофа для продуктовых потоков. Равенства (24) – второе правило Кирхгофа для лагранжевых потоков. Если эти правила выполняются для системы фундаментальных циклов, то они выполняются и для любого цикла сети [4].

Зафиксируем в системе уравнений (13), (21), (23) значения переменных A_v, $v\in V$ и y_i, $i\in E$, тогда любым алгоритмом поконтурной увязки [2] из нее можно получить значения ΔP_v, Q_v, $v\in V$. Покажем, как можно с их помощью получить значения переменных P_i, $i\in E$. Зафиксируем в некоторой вершине $k\in E$ произвольное значение P_k. Тогда система уравнений

$$\Delta P_v=P'_{h2(v)}-P'_{h1(v)},\ v\in V',$$

(т.е. на остове) однозначно определяет значения P'_i во всех остальных вершинах $i\in E$. Однако эти значения, вообще говоря, могут не удовлетворять соотношению (18). Положим $P_i=P'_i+C$, $i\in E$, где:

$$C=\frac{\sum_{i\in E}p_i(P_i^*-P_i')}{\sum_{i\in E}p_i}.$$

Очевидно, что для любых i, $j\in E$ справедливо равенство $P_i-P_j=P'_i-P'_j$, т.е. для полученных таким образом значений переменных P_i выполняются равенства (12), а так же выполняется равенство (18), т.е. получаем решение системы уравнений (12, 13, 18).

Аналогично для системы (14, 15, 17), зафиксировав значения A_v, Q_v, $v\in V$, P_i, $i\in E$, любым алгоритмом поконтурной увязки получаем значения переменных x_v, Δy_v, $v\in V$. Фиксируя в произвольной вершине $k\in E$ произвольное значение y'_i, из системы уравнений

$$\Delta y_v=y'_{h2(v)}-y'_{h1(v)},\ v\in V,$$

находим значения y'_i во всех остальных вершинах. Полагая $y_i=y'_i+c$, $i\in E$, где $c=-\sum_{i\in E}\frac{y_i'}{c_i}+\frac{\sum_{i\in E}C_i^*}{\sum_{i\in E}1/c_i}$, получаем решение системы (14, 15, 17).

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

Для организации алгоритма решения системы уравнений (12-18) необходимо между итерациями также организовать пересчет значений A_v по формулам

$$A_v=A_v^*+x_vQ_v\left|Q_v\right|^{\alpha_v}/a_v,\ v\in V.$$

Эта процедура описывается в приводимом далее алгоритме. Введем следующие обозначения:

$AG(A_v, x_v, v\in V;\ y_i, i\in E)$ – алгоритм, позволяющий по значениям A_v, x_v, $v\in V$, y_i, $i\in E$ определять значения Q_v, $v\in V$, P_i, $I\in E$;

$AL(A_v, Q_v, v\in V;\ P_i, i\in E)$ – алгоритм, позволяющий по значениям A_v, Q_v, $v\in V$, P_i, $i\in E$ определять значения x_v, $v\in V$, y_i, $i\in E$.

Описание процедур, которые должны войти в эти алгоритмы, приведены выше. Тогда алгоритм решения системы уравнения (12-18) можно представить как следующий итерационный процесс.

Алгоритм

0-й шаг. Полагаем $A_v^{(0)}=A^*_v$, $x_v^{(0)}=0$, $v\in V$, $y_i^{(0)}=0$, $i\in E$.

k-й шаг ($k=1, 2, 3, \dots$).

1. Алгоритмом $AG(A_v^{(k-1)}, x_v^{(k-1)}, v\in V;\ y_i^{(k-1)}, i\in E)$ определяем значения $Q_v^{(k)}$, $v\in V$, $P_i^{(k)}$, $i\in E$.
2. Полагаем $A_v^{(k)}=A_v^*+x_v^{(k-1)}Q_v^{(k)}\left|Q_v^{(k)}\right|^{\alpha_v}/a_v$, $v\in V$.
3. Алгоритмом $AL(A_v^{(k)}, Q_v^{(k)}, v\in V;\ P_i^{(k)}, i\in E)$ определяем значения $x_v^{(k)}$, $v\in V$, $y_i^{(k)}$, $i\in E$.
4. Полагаем $A_v^{(k)}=A_v^*+x_v^{(k)}Q_v^{(k)}\left|Q_v^{(k)}\right|^{\alpha_v}/a_v$, $v\in V$.
5. Переходим к $(k+1)$-му шагу.

За критерий останова этого алгоритма можно принять одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\left|\sum_{v\in V_u}sgn_u(v)\,\Delta P_v\right|<\varepsilon_1\,;$$

$$\left|\sum_{v\in V_u}sgn_u(v)\,\Delta y_v\right|<\varepsilon_2\,.$$

Для всех $u\in V\setminus V'$, где ε_1, ε_2 – максимально допустимая величина невязки суммы изменений цен соответственно продуктовых и лагранжевых потоков по системе фундаментальных циклов.

В результате работы алгоритма, помимо значений продуктовых и лагранжевых потоков и цен, получаем:

1. По всей сети общую оценку F получившегося решения;
2. По дугам сети:

- значения параметров $A_v=A_v^*+x_vQ_v\left|Q_v\right|^{\alpha_v}/a_v$ и их отклонения $\left|x_vQ_v\left|Q_v\right|^{\alpha_v}/a_v\right|$ от заданных значений A_v^*, $v\in V$;
- значения продуктовых потоков Q_v и их отклонений $|Q_v-Q^*_v|$ от заданных значений Q^*_v, $i\in E$;

3. По вершинам сети:

- значение внешнеторгового сальдо $C_i=C^*_i+y_i/c_i$ и его отклонение $|y_i/c_i|$ от заданного значения C^*_i, $i\in E$;
- значения цен P_i и соответственн их отклонений $|P_i-P^*_i|$ от заданных значений P^*_i, $i\in E$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для задачи анализа однопродуктового рынка определяются понятия сосредоточенного и рассредоточенного рынков, ставится задача отыскания равновесного состояния рынка, которая описывается задачей потокораспределения в гидравлической сети.

В моделях рассредоточенного рынка ставится задача определения параметров кривых спроса, предложений, транспортных кривых по известным значениям потоков на дугах сети и ценам в вершинах. Она основана на минимизации суммы квадратов отклонения искомых величин от замеренных (заданных) при условиях, которым должны удовлетворять продуктовые потоки в сети.

- Показано, что необходимые условия минимума изучаемой задачи представляют собой суперпозицию задач потокораспределения:
  - продуктовых потоков;
  - лагранжевых потоков.
- Предложен алгоритм решения поставленной задачи, представляющий собой чередующуюся последовательность модификаций алгоритмов поконтурной увязки сети.

Идентификация моделей, алгоритмов отыскания равновесного состояния рассредоточенного рынка, описание поведения субъектов на нем позволят строить динамические модели рынка. Это в свою очередь позволит ответить на вопрос о возможности перехода рынков к условиям несовершенной конкуренции.

Значимость идентификации параметров модели отмечалась выше. Заметим, что идентификация осуществлялась по параметрам, которые линейно входят в зависимости модели, и не осуществлялась по параметрам α_v, $v \in V$, входящим нелинейно. Однако именно они определяют эластичность функций $f_v(Q_v)$, $v \in V$. В теории гидравлических сетей обычно $\alpha_v + 1 = 2$ (квадратичный режим течения жидкости). В моделях рассредоточенного рынка для оценивания параметров α_v, $v \in V$ необходимы дополнительные исследования. Формально их также можно было бы внести в процедуру поиска параметров задачи 3, но в этом случае после построения необходимых условий получается более сложная задача, чем исходная, оптимизационная.

Коваленко Алексей Гаврилович

Литература

1. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа [Текст] / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М., Наука, 1969. – 382 с.
2. Коваленко А.Г. О математическом моделировании рассредоточенного рынка [Текст] / А.Г. Коваленко // Экономика и математические методы. – 1999. – Т. 35 ; №3. – С. 108-115.
3. Коваленко А.Г. Математические модели межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка [Текст] / А.Г. Коваленко // Экономика и математические методы. – 2001. – Т. 37 ; №2. – С. 92-106.
4. Меренков А.П. Теория гидравлических цепей [Текст] / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. – М. : Наука, 1985. – 278 с.
5. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика [Текст] / Х. Никайдо. – М. : Мир, 1972. – 514 с.

Ключевые слова

Конкурентное равновесие; функция предложения, конкурентный рынок; функция спроса; рассредоточенный рынок; идентификация; поиск параметров; теория гидравлических сетей; поиск состояния равновесия.

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность работы. В работе рассматривается активно развиваемое в настоящее время направление современной экономической науки – модели пространственно-ценового рыночного равновесия. Для описания рассредоточенного рынка используются модели потокораспределения теории гидравлических сетей. Целью работы является задача поиска оценок параметров моделей – важнейшей задача любого моделирования.

Научная новизна и практическая значимость. Основные результаты работы получены лично автором впервые, используя сетевой вариант метода наименьших квадратов и решение оптимизационной задачи методом множителей Лагранжа, задача поиска параметров моделей сведена к задаче потокораспределения в гидравлической сети относительно множителей Лагранжа. Приведен алгоритм поиска параметров, совмещающий потокораспределение относительно продуктовых и лагранжевых потоков. Полученные значения параметров можно использовать как для решения различных оптимизационных и игровых задач влияния субъектов рынка, так и для аудита функционирующих систем.

Заключение. Считаю, что статья Коваленко А.Г. «Оценка параметров моделей субъектов и их взаимодействия в условиях рассредоточенного рынка совершенной конкуренции» отвечает требованиям, предъявляемым к научным публикациям, и может быть рекомендована к опубликованию.

Тюкавкин Н.М., д.э.н., зав. кафедрой экономики Самарского государственного университета