3.7. О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ БИЗНЕСА НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры математической статистики и системного анализа;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры финансов и менеджмента

Тверской институт экологии и права

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Ранее нами изучался метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского процесса изменения цены акции. Броуновский процесс является примером непрерывного виннеровского процесса с независимыми приращениями, в определенном смысле единственного. Поэтому интересно обратится к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс, рассмотренный в предыдущей работе. Наконец, возникла мысль о таком же распределении, объединяющим виннеровский и пуассоновский процессы. Такая модель прогнозирования построена в настоящей работе.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости X_n бизнеса на конец последнего n -го прогнозного периода в методе дисконтирования доходов (***DDM***) в рамках доходного подхода для определения рыночной стоимости бизнеса. Один из способов определения величины X_n состоит в том, что за эту величину принимается прогноз цены продажи на конец последнего n -го периода [4, 5]. Однако этот способ определения продажной стоимости сталкивается с отсутствием соответствующих статистических данных для прогнозирования. Из обзоров рынка можно узнать в лучшем случае рост капитализации в отрасли за предыдущие годы, однако, экстраполяция этих данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. В работе [2] был предложен мультипликативный способ прогнозирования на базе стационарной лог-нормальной модели изменения стоимости. Он оказался применимым только в том случае, когда за основу берется изменение какого-нибудь экономического индекса, например, индекса Российской торговой системы и к тому же предполагает стационарность прогнозного периода, которая как раз и отсутствует в общем случае по определению прогнозного периода. Получается, что лог-нормальная стационарная модель хорошо подходит для прогнозирования экономических индексов, но фактически не применима для прогноза изменения рыночной стоимости бизнеса в будущем на основе ретроспективы изменения стоимости его акций. Поэтому, в работе [7] был предложен другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского движения цены акции, рассмотренной в [7]. Поскольку модель броуновского процесса является аддитивной [7], то и предложенный способ прогнозирования является аддитивным, т.е. постулирует независимость приращений. Аддитивный способ моделирования изменения стоимости бизнеса, как таковой, был нами рассмотрен в отдельной работе [6]. Нестационарности прогнозного периода, таким образом, предлагалось сопоставить нестационарную модель роста стоимости бизнеса, понимаемого как стоимость всей совокупности его голосующих акций. Виннеровский процесс является примером непрерывного, аддитивного процесса с независимыми приращениями. В определенном смысле единственным, как показано в [3]. Поэтому интересно было обратиться к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс, рассмотренный в [6], причем даже кусочно-постоянного. В пуассоновском процессе среднее значение приращения за время t линейно зависит от t с коэффициентом c , который может быть оценен статистически подобно тому, как это было сделано для единственного параметра виннеровского процесса в [8]. Кроме того, в отличие от стационарного процесса с независимыми реализациями с.в., изучавшегося нами в [1], пуассоновский процесс является нестационарным и построенная на его основе модель прогноза является дискретной нестационарной моделью постоянного роста. Наконец при построении переходной функции в [1] нами было получены смешанное условное дискретно-непрерывное распределение и возникла мысль о таком же распределении объединяющим виннеровский и пуассоновский процессы. Такая модель прогнозирования построена в настоящей работе. Она наиболее адекватно моделирует процесс изменения стоимости акций на бирже, являющийся кусочно-непрерывным, где отдельные скачки сменяются участком непрерывного изменения стоимости. И нормальный, и пуассоновский законы являются бесконечно-делимыми [3]. Поэтому построенная на основе их объединения передаточная функция будет пространственно-однородной [3], и, следовательно, приведет к процессу, удовлетворяющему условию независимости приращений [3]. Вот в чем состоит основная идея нашей новой работы. Она может быть полезной аналитикам фондового рынка, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области моделирования изменения цены акции на бирже и соответствующей стоимости бизнеса, понимаемой как совокупность всех его голосующих акций.

1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Будем отождествлять стоимость бизнеса со стоимостью всех его голосующих акций. Предположим, что эти акции котируются на бирже. Обозначим через $X(t)$ цену акции в момент времени $t \in [0,+\infty)$ и предположим, что в момент $t=0$ она приняла значение $u \in [0,+\infty)$ почти наверное (п.н.) :

$$X(0)=u. \qquad (1)$$

Предположим, что случайный процесс $X = X(t)$ адекватно описывается дискретным нестационарным пуассоновским процессом, задаваемым переходной функцией [3]:

$$p_t(u,E) = e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi ct}}\int_E e^{-(v-u)^2/2ct}dv + (1-e^{-\lambda t})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}\aleph(u+ma,E), \qquad (2)$$

где

$a \neq 0$ – пространственный дискрет, например, заданная точность вычислений;

$c, \lambda > 0$ – константы, которые оцениваются статистически.

Здесь $\aleph(u,E)$ - функция инцидентности точки u множеству $E \subset R_1$, равная единице, если точка принадлежит множеству и нуль, в противном случае. Напомним, что переходная функция представляет по определению вероятность принадлежности с.в. $X(t)$ измеримому по Лебегу множеству E на действительной прямой R_1 . Плотность $p_t(u,v)$ условного распределения $X(t)$ при условии (1) выражается соответственно формулой:

$$p_t(u,v)=e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi ct}}e^{-(u-v)^2/2ct}+ \\ +(1-e^{-\lambda t})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}\delta(u+ma-v), \tag{3}$$

где $\delta(u-v)$ – δ – функция, т.е. обобщенная функция, удовлетворяющая для любой непрерывной функции $\varphi(v)$ условию:

$$\varphi(u)=\int_E \varphi(v)\delta(u-v)dv. \tag{4}$$

Функция $\delta(u-v)$ – представляет собой обобщенную плотность вероятности дискретной с.в. сидящей в точке u. В частности, ее математическое ожидание тоже равно u:

$$u=\int_E v\delta(u-v)dv.$$

2. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УСЛОВНОГО МАТОЖИДАНИЯ ЦЕНЫ

Таким образом, предельная плотность условного распределения (3) представляет собой плотность распределения смешанной дискретно-непрерывной с.в. Переходя к среднему, с помощью полученной плотности условного распределения (3), получим формулу для условного среднего:

$$m_u(t)=e^{-\lambda t}u+(1-e^{-\lambda t})* \\ *(u+\lambda t)=u+(1-e^{-\lambda t})\lambda t. \tag{5}$$

Из этой формулы следует в частности, что,

$$m_u(0)=u, \tag{6}$$

$$m_u(t)\to\infty, t\to\infty \tag{7}$$

и имеет асимптоту $u+\lambda t$.

Таким образом, относительное среднее процесса:

$$\overline{m}_u(t)=[m_u(t)-u]/t=(1-e^{-\lambda t})\lambda$$

есть величина, стремящаяся к λ при $t\to\infty$, что позволяет аппроксимировать сверху этот процесс нестационарной моделью постоянного роста [8] при $a>0$, или уменьшения при $a<0$.

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Константы $c,\lambda>0$ следует оценивать статистически отдельно друг от друга. Константу $c>0$ – на непрерывных участках процесса, а константу $\lambda>0$ – по моментам скачков $t_1,t_2,...$ и их величинам $\Delta X_k=\Delta X(t_k)$. Рассмотрим их оценку последовательно.

3.1. Непрерывный участок процесса

По определению единственного параметра c броуновского процесса, для любых $l,t\ge 0$ приращение $\Delta x=x(t+l)-x(t)$ распределено нормально со средним $M_{\Delta x}(l)=0$ и дисперсией $D_{\Delta x}(l)=cl$. Поэтому для оценки неизвестного параметра c необходимо получить статистическую оценку дисперсии $D_{\Delta x}(l)$ при $l=1,2,...,L$.

Пусть $x_1,...,x_N$ – полученные в ходе наблюдения значения с.в. $x(1),...,x(N)$ на каком-то непрерывном участке процесса. Положим

$$m_N(l,x)=\frac{1}{N-l}\sum_{k=1}^{N-l}(x_{n+k}-x_k). \tag{8}$$

Тогда она является несмещенной оценкой среднего приращения $\Delta x=x(t+l)-x(t)$, т.е.

$$M(m_N(l,x))= \\ =M\left(\frac{1}{N-l}\sum_{k=1}^{N-l}(x_{n+k}-x_k)\right)= \\ =\frac{1}{N-l}\sum_{k=1}^{N-l}M(x_{n+k}-x_k)=0.$$

Поскольку

$$D_{\Delta x}(l)=M(x(t+l)-x(t)- \\ -M(x(t+l)-x(t))^2=M[x(t+l)-x(t)],$$

то в качестве оценки этой величины по результатам N наблюдений $x_1,...,x_N(N>l\ge 0)$ естественно взять величину

$$d_N(l,x)=\frac{1}{N-l}\sum_{k=1}^{N-l}(x_{n+k}-x_k-m_N(l,x))^2. \tag{9}$$

или даже

$$d_N(l,x)=\frac{1}{N-l}\sum_{k=1}^{N-l}(x_{n+k}-x_k)^2. \tag{10}$$

Последняя является несмещенной в том смысле, что $M(d_N(l,x))=D_{\Delta x}(l), 0\le l<N-K=L.$

Здесь K – минимальный объем представительной выборки по которой практически допустимо рассчитывать среднее в (8-10). После статистической оценки дисперсии $y_l=d_N(l,x), 0\le l<N-K=L,$ неизвестную величину параметра c в регрессии $D_{\Delta x}(l)=cl$ можно оценить методом наименьших квадратов по формуле:

$$c=\frac{\sum_{l=1}^{L} l y_l}{\sum_{l=1}^{L} l^2}. \tag{11}$$

3.2. Скачки процесса

Константу $\lambda>0$ – по моментам скачков $t_1,t_2,...$ и их величинам $\Delta X_k=\Delta X(t_k), k=1,2,...,K,$ можно оценить, как неизвестную величину параметра λ в регрессии $y_k=\Delta X_k=\lambda t_k$, методом наименьших квадратов по формуле:

$$c=\frac{\sum_{k=1}^{K} t_k y_k}{\sum_{k=1}^{K}(t_k)^2}. \tag{12}$$

После этого прогнозирование условного среднего значения с.в. $X=X(t)$ можно осуществить по формуле (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что переходная функция построенного смешанного дискретно-непрерывного процесса для любого $\varepsilon>0$ удовлетворяет условию:

$$p_t(x,E_1-[x-\varepsilon,x+\varepsilon])=o(1), \tag{13}$$

равномерно по x. Для точек разрывов это следует из того, что пуассоновская переходная функция удовлетворяет этому условию [3, с. 150]. А для точек непрерывности виннеровская переходная функция удовлетворяет усиленному условию (8), в котором правая часть можно заменить на $o(t)$ [3, с. 149]. Поскольку нормальное и пуассоновское распределение бесконечно-делимое, то построенная на его основе передаточная функция (2) приводит к пространственно-однородной марковской переходной функции [7], т.е. такой, что

$$p_t(u,E) = p_t(u+v, v+E) \tag{14}$$

для всех вещественных v. А это вместе с (13-8) гарантирует согласно теореме Кинни (см. [3, с. 150]), что существует кусочно-непрерывный, непрерывный справа и имеющий предел слева, процесс, который имеет независимые приращения (основное свойство аддитивных процессов, которое постулируется априорно). В частности, траектории построенного смешанного дискретно-непрерывного процесса можно считать непрерывными справа и имеющими предел слева.

В более ранних наших работах (см., например, [7]), мы высказывали предположение, что от процесса с независимыми реализациями нужно переходить к процессам с независимыми приращениями, удовлетворяющими условиям типа (8). Таким образом, главная ценность обращения к классической теории пространственно-однородных передаточных функций, приводящих к процессам с независимыми приращениями [7], состоит в подтверждении и уточнении этой догадки. Так, если бы усилить условие (8), чтобы правая часть вела себя как $o(t)$, то получились бы непрерывные процессы, в частности для виннеровской переходной функции, рассмотренной в [7], – броуновский процесс. А если бы ослабить условие в (8), чтобы правая часть вела себя как $O(1)$ (т.е. не налагать никаких дополнительных условий, поскольку вероятность и так ограничена единицей), то сюда вошел бы стационарный процесс с независимыми выбрасываниями с.в., изученный нами в [7].

Вот какая классификация процессов возникает в зависимости от правой части в условии (8), которая и привела в настоящей работе к смешанной дискретно-непрерывной модели нестационарного роста стоимости бизнеса, позволяющей наиболее адекватно передать свойства процесса реального изменения стоимости акции на бирже.

Литература

1. Басангов Ю.М. К обоснованию модели изменения стоимости акции на основе СМО типа рождения-гибели [Текст] / Ю.М. Басангов, А.Г. Перевозчиков // Финансовая аналитика. – 2010.
2. Батурина О.Ю. и др. Прогнозирование изменения чистого операционного дохода от аренды недвижимости в зависимости от предполагаемого изменения ее стоимости [Текст] / О.Ю. Батурина, Ю.М. Басангов, А.Г. Перевозчиков // Финансовая аналитика. – 2007. – №5. – С. 42-46.
3. Ламперти Дж. Вероятность [Текст] / Дж. Ламперти. – М. : Наука, 1973. – 184 с.
4. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] // Deloitte&Touche. – декабрь 2003-март 2005.
5. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
6. Перевозчиков А.Г. К аддитивной форме рекуррентного уравнения для дисконтирования денежного потока [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – №4. – С. 105-108.
7. Перевозчиков А.Г. О прогнозировании изменения цены бизнеса в рамках аддитивной модели скачков на базе броуновского процесса [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №3. – С. 200-203.

Ключевые слова

Оценка бизнеса; доходный подход; метод дисконтирования доходов; продажная стоимость бизнеса; ставка дисконта; инвестированный капитал; собственный капитал; выручка; денежный поток (ДП); темп изменения изменения ДП.

Лесик Александра Ильинична

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Известно, что, экстраполяция статистических данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. Поэтому в предшествующих работах авторами изучался другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса, основанный на нестационарной модели броуновского процесса изменения цены акции. Броуновский процесс является примером непрерывного виннеровского процесса с независимыми приращениями, в определенном смысле единственного. Поэтому интересно обратится к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс, рассмотренный в предыдущей работе.

Наконец при построении переходной функции в предыдущей работе авторами было получены смешанное условное дискретно-непрерывное распределение и возникла мысль о таком же распределении, объединяющим виннеровский и пуассоновский процессы. Такая модель прогнозирования построена в настоящей работе. Она наиболее адекватно моделирует процесс изменения стоимости акций на бирже, являющийся кусочно-непрерывным, где отдельные скачки сменяются участком непрерывного изменения стоимости. И нормальный, и пуассоновский законы являются бесконечно-делимыми. Поэтому построенная на основе их объединения передаточная функция будет пространственно-однородной и, следовательно, приведет к процессу, удовлетворяющему условию независимости приращений. Вот в чем состоит основная идея новой работы авторов. Она может быть полезной аналитикам фондового рынка, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области моделирования изменения цены акции на бирже и соответствующей стоимости бизнеса, понимаемой как совокупность всех его голосующих акций.

Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, А.И. Лесик «О прогнозировании изменения цены бизнеса на основе смешанного дискретно-непрерывного нестационарного процесса» является новой и актуальной, и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н.., профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и права, декан факультета экономики и менеджмента

3.7. ABOUT THE PROGNOSTICATION OF BUSINESS PRICE ON THE BASE OF MIXED DISCRETE-CONTINUOUS NON-STATIONARY PROCESS

A.I. Lesik, Doctor of Science, Assistant Professor of Mathematical Statistics and System Analysis Department;
A.G. Perevozchikov, Doctor of Economics, Professor of the Economics Department

Tver Institute of Ecology and Law

The task of calculating the prognostication of business sale value within the framework of income approach is regarded. Earlier we regarded the prognostication method of business sale value based on non-stationary model of Brown's process of share price change. Brown's process is a unique example of the continuous Winner's independent increments. Thus, it would be interesting to consider

the discrete processes which meet the needs of increments independence but they are only piecewise continuous functions. The example of such process is given by Poison's process which was regarded in our previous work. Eventually, the idea of the same distribution combining the Winner's and Poison's processes occurred. Such prognostication model is given in this work.

Literature

1. Valuation of Business: A Manual. Edited by A.G.Gryaznova, M.A. Fedotova – M.: Finance and Statistics. – 2002.
2. Methodology and Manual on Conducting Valuation of Business and Assets of Public Limited Company «United Energy Systems of Russia». – Deloitte & Touche. – Dec.2003-March 2005.
3. O.U. Baturina, U.M. Basaganov, A.G. Perevozchikov. The Prognostication of the Net Operational Income from the Real Estate Rent Depending on its Expected Cost Exchange. Financial Analytics. 2007, №5, p. 42-46.
4. A.G.Perevozchikov, A.I. Lesik. About the Prognostication of Business Value Change within the Framework of Additive Jumps Model on the Base of Brown's Process. Audit and Financial Analysis. 2011,№3, p. 200-203.
5. A.G.Perevozchikov, A.I. Lesik. About the Additive Form of Recurrent
6. Equation for Cash Flow Discounting. . Audit and Financial Analysis. 2010,№4, p. 105-108.
7. A.G. Perevozchikov. About the Prognostication of Business Value Change within the Framework of Additive Jumps Model on the Base of Brown's Process. Audit and Financial Analysis. 2011,№3, p. 200-203.

Keywords

Real estate evaluation; income approach; income discounting method; business sale value; discount rate; invested capital; equity; revenue; cash flow; cash flow change rate.