8.2. К УСТОЙЧИВОСТИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМОЖНОГО ИЗМЕНЕНИЯ СТОИМОСТИ ДЕНЕГ

Беляков А.В., к.т.н., ведущий системный аналитик ОАО «Прайм групп», филиал в г. Тверь;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор кафедры финансов и менеджмента Тверского института экологии и права, академик РАЕН

Рассматривается задача исследования устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег. Стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска. Производные по направлениям можно интерпретировать как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Если параметр риска один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же их хотя бы два, то это гораздо более сложная задача, и она изучается в настоящей работе

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно [9; 6], что денежный поток (ДП) Q_t на собственный капитал X_t инвестора получается из денежного потока q_t на инвестированный капитал Y_t путем учета дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и изменения задолженности Z_t. Трудность практического применения модели ДП на собственный капитал инвестора связана с отсутствием удовлетворительных моделей прогнозирования задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1, 2, ..., n$. В [13] изучались проблемы учета структуры капитала в двух основных моделях ДП для собственного и инвестированного капитала с учетом рекомендации [6]. С другой стороны использование модели дисконтирования ДП на инвестированный капитал не позволяет оптимизировать финансирование ДП на собственный капитал. Поэтому возможны случаи, когда подсчитанная таким образом стоимость собственного капитала оказывается отрицательной, тогда как при оптимизации задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1, 2, ..., n$ она может стать положительной [1].

В работе [1] было показано, как смоделировать ДП на собственный капитал с учетом оптимизации остатков фактической задолженности Z_t с учетом оптимизации финансирования. В работе [2] нами исследована устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и показано, как использовать полученные результаты для анализа рисков, сопутствующих проекту. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было доказано, что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям [3], и предложен способ расчета соответствующих производных. Полученные производные были интерпретированы нами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как нам удалось показать, тоже можно соорудить нечто вроде дифференциала в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой.

Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же их хотя бы два, то это гораздо более сложная задача, и она изучается в настоящей работе. Такова суть нашей новой работы, которая может стать полезной банковским аналитикам, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области анализа рисков.

1. ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ НА СОБСТВЕННЫЙ И ИНВЕСТИРУЕМЫЙ КАПИТАЛ

Обозначим через $X_t, Y_t = X_t + Z_t, t = 0, 1, 2, ..., n,$ текущую стоимость собственного и инвестируемого в проект) капитала на конец t-го года.

Продажная стоимость собственного капитала получается обычно по формуле [13]:

$$X_n = (1 - w_n)Y_n. \tag{1}$$

Здесь $w = w_n$ – доля заемного капитала в инвестированном капитале компании на конец n-го года, которая рассчитываются на основе рыночных данных по отрасли. В результате получается как бы целевая структура капитала по методике [6].

Для фигурирующей здесь продажной стоимости инвестируемого капитала используется известная формула Гордона [6]:

$$Y_n = \frac{q_n(1 + v_{n+1})}{j_{n+1} - v_{n+1}}, \tag{2}$$

где j_{n+1}, v_{n+1} – соответственно постпрогнозные средневзвешенная стоимость инвестированного капитала и темп изменения денежного потока на инвестированный капитал, которые считаются постоянными в силу предположения о стационарности постпрогнозного периода. Обычно постпрогнозный темп v_{n+1} определяется по долгосрочным прогнозам темпа роста мировой экономики на уровне долгосрочной инфляции [6].

Платежей p_t по кредитной линии, включающих проценты и часть основного долга, можно представить в виде [2]:

$$\begin{aligned} p_t &= Z_{t-1}g(1 - c) - Z_t + Z_{t-1} = \\ &= Z_{t-1}(1 + g') - Z_t, t = 0,1,...,n. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь обозначено для краткости:

$g' = g(1 - c),$

где c – ставка налога на прибыль.

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ СТОИМОСТИ СОБСТВЕННОГО КАПИТАЛА ИНВЕСТОРА

Выпишем сначала рекуррентное уравнение для собственного капитала инвестора, следуя [13]:

$$X_{t-1} = \frac{q_t - p_t + X_t}{1 + i}, t = n, ..., 1, \tag{4}$$

где

$q_t, t = 1, 2, ..., n,$ – величина денежного потока, ожидаемая на инвестированный капитал проекта;

n – предполагаемая длительность проекта, выраженная в годах;

i – подходящая ставка дисконта на собственный капитал.

Ставка дисконта на собственный капитал представляет собой ставку дохода на вложенный капитал, достижение которой ожидает инвестор при принятии решения о приобретении будущих доходов (например, будущего денежного потока) с учетом риска их получения. При расчете ставки дисконта обычно используется модифицированная модель оценки капитальных активов CAPM [9].

Конечное условие для уравнения (4) определяются из (1). Платежи p_t определяются по формуле (3), где Z_t находятся по схеме, предложенной в [1], если считать, что задолженность Z_t представляет собой фактическую задолженность по кредитной линии объема $S_t, t = 0, 1, ..., n-1,$ на конец t-го года. В этом случае фактический остаток задолженности, определяется по рекуррентному уравнению:

$$Z_{t-1} = min\left(S_{t-1}; \frac{Z_t + q_t}{1+g'}\right), t = n, ..., 1. \qquad (5)$$

Остаток долга должен находиться в пределах:

$$0 \le Z_t, t = 0, 1, ..., n; \qquad (6)$$

$$Z_t \le S_t, t = 0, 1, ..., n. \qquad (7)$$

Связь между платежами и остатками долга имеет вид (3).

В отличие от [1] в [2] мы допускали переменный объем кредитной линии $S = S_t, t = 0, 1, ..., n,$ и ненулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (3):

$$Z_{-1} = Z^0_{-1}, Z_n = Z^0_n. \qquad (8)$$

Здесь Z^0_{-1} – фактический остаток долга на начало нулевого года прежнего владельца проекта, в отличие от планируемого остатка Z_0 – нового владельца. Он нужен для расчета платежа p_0 по формуле (7), а Z^0_n – планируемый остаток по кредитной линии на конец n-го года, полученный по формуле:

$$Z^0_n = Y_n w_n. \qquad (9)$$

Рассмотрим задачу оптимизации кредитной линии по критерию максимума текущей стоимости собственного капитала инвестора [4]:

$$X = \sum_{t=0}^{n} \frac{q_t - p_t}{(1+i)^t} \to max . \qquad (10)$$

Можно показать, что критерий (10) эквивалентен критерию [4]:

$$x = F(z,g) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i-g')Z_t}{(1+i)^t} \to max . \qquad (11)$$

Здесь z – n-мерный вектор с координатами $Z_t, t = 0, 1, ..., n.$

Таким образом, при условии положительного левереджа $i - g' > 0$ инвестор имеет на остатках заемных средствах маржу $i - g'$. Под $q_0 = -C < 0$ в [1] понимается начальные вложения капитала, складывающиеся из собственных средств инвестора $q_0 - p_0 < 0$ и стартового кредита $p_0 = -Y < 0$ в счет открытой кредитной линии. Предполагается, что выполнено условие, которое называется условием «консолидированных» затрат [1]:

$$q_t - p_t \ge 0; t = 1, 2, ..., n. \qquad (12)$$

При выполнении этого условия величины q_t, p_t могут иметь произвольные знаки. В этом случае дополнительные вложения в проект делаются не за счет инвестора, а за счет новых кредитов.

При $t = 0$ должно выполняться ослабленное условие [1]:

$$q_0 - p_0 \ge -H. \qquad (13)$$

Величина H интерпретируется в модели как величина собственных средств. Согласно формуле (3), для платежей по кредитной линии условие (13) будет иметь вид (15) в новых переменных, а условие консолидированных затрат (12) принимает форму:

$$(1+g')Z_{t-1} - Z_t \le q_t, t = 1, 2,..., n. \qquad (14)$$

В [1] изучалась задача максимизации (11) с ограничениями (6, 7, 8, 14, 15).

План, построенный по формуле (5), позволяет поддерживать остаток долга на максимальном уровне. Аналогично тому, как это было сделано в [1], доказывается, что если план (5,8) удовлетворяет условиям (6) и (12-17), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов рассматриваемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование):

$$Z'_t \le Z_t, t = 0, ..., n-1.$$

Для не пустоты множества допустимых планов в задаче с обобщенными условиями (13) «консолидированных» затрат, таким образом, необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$-H \le q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1}. \qquad (15)$$

Уравнение для оптимальных остатков Z^*_t по безлимитной кредитной линии будет иметь вид.

$$Z^*_{t-1} = \frac{Z^*_t + q_t}{1+g'}, t = n, ..., 1. \qquad (16)$$

Величину S^* показателя минимального безлимитного объема кредитной линии можно определить как максимальное значение безлимитных остатков, определенных по формуле (16).

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКТА: ОБЩАЯ СХЕМА

В [2] была предложена общая схема исследования устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег на рынке, заданных кредитной ставкой g. Сначала рассмотрим однопараметрическую задачу максимизации (11) с ограничениями (6, 7, 8, 14, 15):

$$x^* = f(g) = \max_{z \in Z(g)} F(z,g). \qquad (17)$$

Здесь $Z(g)$ – множество допустимых решений задачи.

Заметим, что задача (17) при заданном g представляет собой задачу линейного программирования (ЛП) специального вида, типа задачи дискретного оптимального управления с интегральным функционалом. Таким образом, задача (17) является параметрической задачей ЛП специального вида, и текущая стоимость $f(g)$ проекта определена нами в [2] как функция максимума со связанными переменными с учетом действующей на рынке средней стоимости заемных средств $g\%$, выделенных для финансирования аналогичных проектов. В момент заключения реального договора о предоставлении инвестору кредитной линии рыночная стоимость заемных средств может составить величину:

$$a = g + \Delta g,$$

где Δg – малый параметр, представляющий собой консолидированный процентный риск.

Необходимо исследовать устойчивость максимальной стоимости от заданного параметра. Если бы в точке $a = g$ функция (17) была бы дифференцируема, то поставленная задача свелась бы к нахождению дифференциал $df(g) = f'(g)\Delta g$ от стоимости (17). В самом деле, тогда было верно бы представление:

$$\Delta f(g) = f'(g)\Delta g + o(\Delta g), \tag{18}$$

где величина $o(\Delta g)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\Delta g)}{\Delta g} \to 0, \Delta g \to 0. \tag{19}$$

Из (19) следовало бы, что справедливо приближенное равенство:

$$\Delta f(g) \approx f'(g)\Delta g.$$

И производную $f'(g)$ можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности. Его величина и знак и определяли бы, какое изменение скорректированной стоимости проекта соответствовало бы малому изменению базовой ставки по кредитам. Вот статическая модель такого исследования. Динамическая, состоит в том, что параметр $a = g_t$ представляет собой функцию времени $t = 1, 2, ..., n,$ т.е. n-мерный вектор. Например, в договоре о кредитной линии предусмотрено возможность ежегодного изменения базовой ставки по кредитам, в случае изменения соответствующих ставок, действующих на рынке. В этом случае, следовало бы построить дифференциал функции n переменных:

$$df(g) = \langle f'(g), \Delta g \rangle, \tag{20}$$

где

$f'(g)$ – это вектор частных производных $f'_{g_t} = \partial f / \partial g_t$ функции f по переменным $g_t, t = 1, 2, ..., n,$ а $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение двух n-мерный векторов a, b.

Тогда частную производную f'_{g_t} можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности по параметру $a = g_t$. И все остальное осталось бы без изменения в предлагаемой модели исследования устойчивости.

К сожалению, функция $f(g)$ связанного максимума (17), вообще говоря, не дифференцируема (см., например, [3], [7]). Но она будет при определенных условиях дифференцируемой по любому направлению l в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Рассмотрим сначала модельный пример, когда функция $f(g)$, есть конечный максимум от дифференцируемых функций $f_k(g), k = 1, 2, ..., m,$ с распадающимися переменными:

$$f(g) = \max_{k=1,2,...,m} f_k(g), \tag{21}$$

а потом вернемся к общему случаю. Тогда ее производная:

$$\partial f(g) / \partial l = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(g + \lambda l) - f(g)}{\lambda}, \tag{22}$$

по любому направлению l в n-мерном евклидовом пространстве E_n определяться формулой [3]:

$$\partial f(g) / \partial l = \max_{k \in N(g)} \langle f'_k(g), l \rangle, \tag{23}$$

где $N(g)$ – подмножество множества индексов $N = \{1, 2, ..., n\}$, в которых достигается максимум в (21). В [3] это множество в виду важности имеет специальное обозначение:

$$N(g) = \operatorname*{Arg\,max}_{k \in N} f_k(g). \tag{24}$$

Для производной по направлению (22) имеет место аналог соотношения (18) [3]:

$$\Delta_l f(g) = f(g + \lambda l) - f(g) = \lambda \frac{\partial f(g)}{\partial l} + o(\lambda), \tag{25}$$

где величина $o(\lambda)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\lambda)}{\lambda} \to 0, \lambda \to +0, \tag{26}$$

равномерно по $l \in E_n, |l| = 1.$ Здесь $|l|$ – норма вектора l в E_n. В частности, при $l = \Delta g / |g|$ получим из (25):

$$\begin{aligned} f(g + \lambda l) - f(g) &= |\Delta g| \frac{\partial f(g)}{\partial l} + o(|\Delta g|) = \\ &= |\Delta g| \max_{k \in N(g)} \left\langle f'_k(g), \frac{\Delta g}{|\Delta g|} \right\rangle + o(|\Delta g|) = \\ &= \max_{k \in N(g)} \langle f'_k(g), \Delta g \rangle + o(|\Delta g|). \end{aligned} \tag{27}$$

Это позволяет нам назвать обобщенным дифференциалом функции максимума (21) выражение:

$$Df(g) = \max_{k \in N(g)} \langle f'_k(g), \Delta g \rangle. \tag{28}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского:

$$|\,\langle f'_k(g), \Delta g \rangle\,| \le |f'_k(g)| * |\Delta g|,$$

из (28) следует неравенство:

$$-\min_{k \in N(g)} |f'_k(g)| * |\Delta g| \le Df(g) \le \max_{k \in N(g)} |f'_k(g)| * |\Delta g|. \tag{29}$$

Введем обозначения:

$$K_0 = K_0(g) = \min_{k \in N(g)} |f'_k(g)|; \tag{30}$$

$$K_1 = K_1(g) = \max_{k \in N(g)} |f'_k(g)|.$$

Тогда неравенство (29) можно записать в следующем виде:

$$-K_0 * |\Delta g| \le Df(g) \le K_1 * |\Delta g|. \tag{31}$$

Величины (30) можно интерпретировать, как два обобщенных коэффициента эластичности – верхний и нижний – по векторному параметру $a = g$, но уже в ослабленном смысле неравенства (31). Эти коэффициенты имеют ясный геометрический смысл и представляют собой соответственно минимум и максимум нормы градиентов функций, доставляющих при данном g максимум в (21). При этом обобщенный дифференциал $Df(g)$ представляет собой по сути максимум из некоторых обычных дифференциалов

$df_k(g)=\langle f_k'(g),\Delta g\rangle$. И все остальное остается без изменений в предлагаемой модели исследования устойчивости.

Поскольку для дифференцируемых функций $f_k(g), k=1, 2, ..., m,$ справедлива формула [2]:

$$\partial f_k(g)/\partial l=\langle f_k'(g),l\rangle, k=1, 2, ..., m, \qquad (32)$$

То формуле (23) можно придать вид:

$$\partial f(g)/\partial l=\max_{k\in N(g)}\partial f_k(g)/\partial l. \qquad (33)$$

В таком виде формула (32) допускает обобщение на дифференцируемые по направлению функции $f_k(g), k=1, 2, ..., m.$ Например, тоже некоторые функции максимума от дифференцируемых функций. Это и понятно, поскольку тогда можно представить итоговую функцию $f(g)$ в форме единого максимума типа (21).

Далее следует отметить, что все сказанное остается справедливым и для функции минимума, поскольку любой минимум можно представить как минус максимум от функций, взятых со знаком минус [2]. При этом оператор взятия максимума в (32), естественно, заменяется на оператор взятия минимума.

Таким образом, исследование устойчивости критерия сводится к задаче построения обобщенного дифференциала.

4. СВЯЗЬ С ИСЧИСЛЕНИЕМ КВАЗИГРАДИЕНТОВ СЛАБОВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Напомним, что функция $f(g)$ от n переменных называется слабо выпуклой [4], если для любого g не пусто множество $G_r(g)$ n-мерных векторов h (квазиградиентов), удовлетворяющих, неравенству:

$$f(a)-f(g)\ge\langle h,a-g\rangle+r(a,g), \qquad (34)$$

где

$$r(a,g)/|a-g|\to 0, \qquad (35)$$

когда $|a-g|\to +0,$ равномерно по a,g на любом компакте, причем функция $r(a,g)$ – полунепрерывна снизу по a,g.

Для любого $\varepsilon\ge 0$ по аналогии с (34) ε-квазиградиентом слабовыпуклой функции называется любой n-мерный вектор h, удовлетворяющий, неравенству:

$$f(a)-f(g)\ge\langle h,a-g\rangle-\varepsilon+r(a,g), \qquad (36)$$

для той же функции $r(a,g)$. Множество всех ε-квазиградиентов, построенных по функции $r(a,g)$, обозначим через $G_r^\varepsilon(g)$. Отображение $G_r^\varepsilon(g)$ называется ε-квазиградиентным. Очевидно, что выполняются включения:

$$G_r(g)=G_r^0(g)\subseteq G_r^\varepsilon(g). \qquad (37)$$

Можно показать, что множество $G_r(g)$ не зависит от функции $r(a,g)$, участвующих в ее определении. Это множество называется квазидифференциалом слабо выпуклой функции $f(g)$ в точке g и обозначается через $\partial f(g)$. Таким образом, справедливо равенство:

$$\partial f(g)=G_r(g).$$

В отличие от квазидифференциала $\partial f(g)$ определение множества ε-квазиградиентов зависит от функции $r(a,g)$. Тем не менее, мы будем обозначать его через $\partial^{(\varepsilon)}f(g)$ имея в виду любое ε-квазиградиентное отображение $G_r^\varepsilon(g)$. Любое точечно-множественное ε-квазиградиентное отображение $\partial^{(\varepsilon)}f(g)$ замкнутозначно, выпуклозначно, локально ограничено и полунепрерывно сверху по совокупности переменных (ε,g) [4]. Отсюда, в частности, вытекают аналогичные свойства для точечно-множественного квазиградиентного отображения $\partial^{(\varepsilon)}f(g)$. В силу (37, 38) любое ε-квазиградиентное отображение $\partial f(g)$ аппроксимирует сверху квазидифференциал $\partial f(g)$ слабо выпуклой функции $f(g)$ в точке g.

Напомним заодно, что вектор h называется условным ε-квазиградиентом слабо выпуклой функции $f(g)$ в точке $g\in G$ относительно выпуклого множества $G\subset E_n$, если для любых $a\in G$ справедливо неравенство (35). Пусть диаметр множества G не превосходит некоторого числа $d>0$, $h\in\partial f(g)$ – квазиградиент $f(g)$ в точке g и $|g'-g|\le\varepsilon/d.$

Тогда, очевидно, h' – условный ε-квазиградиент слабо выпуклой функции $f(g)$ в точке $g\in G$ относительно выпуклого множества $G\subset E_n$. Смысл введения такого определения состоит в возможности более простой аппроксимации квазидифференциала $\partial f(g)$, чем построение какого-то ε-квазиградиентного отображения $\partial^{(\varepsilon)}f(g)$.

Для нас важно, что есть функция $f(g)$ конечного максимума (21) от дифференцируемых функций $f_k(g), k=1, 2, ..., m$ с распадающимися переменными является слабо выпуклой [4].

Далее следует отметить, что точно так же вводится понятие слабо вогнутой функции и ее квазиградиентов и квазидифференциалов. При этом неравенство (34) в определении квазиградиентов меняется на противоположное, а в формуле (31) верхний и нижний обобщенные коэффициенты эластичности меняются местами, т.е. верхний становится нижним, и наоборот. Функция $f(g)$ конечного минимума от дифференцируемых функций $f_k(g), k=1, 2, ..., m,$ с распадающимися переменными является слабо вогнутой со всеми вытекающими отсюда возможностями, которыми мы собираемся воспользоваться ниже при анализе устойчивости основного рекуррентного уравнения (5), отягощенного оператором взятия минимума в правой части.

5. СВЯЗЬ С ИСЧИСЛЕНИЕМ СУБГРАДИЕНТОВ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Отметим тут же, что для выпуклых функций $f(g)$ векторы h, удовлетворяющие неравенству (34) при $r(a,g)\equiv 0$, называются субградиентами, а их множество – субдифференциалом выпуклой функции [14]. Таким образом понятие слабой выпуклости обобщает понятие выпуклости функций, а понятие квазиградиента обобщает понятие субградиента, и поэтому их можно обозначать одинаково. Приведем без доказательства необходимые нам для дальнейшего основные формулы исчисления субградиентов, следуя [14].

Пусть $f(g)$ – выпуклая функция на открытом выпуклом множестве G в E_n и $g \in G$. Тогда для любого направления $l \in E_n$:

$$\partial f(g)/\partial l = \max_{h \in \partial f(g)} \langle h, l \rangle. \quad (38)$$

Пусть $f(g)$ – выпуклая функция на открытом выпуклом множестве G в E_n и $g \in G$. Тогда, если $f(g)$ – дифференцируема в данной точке $g \in G$, то:

$$\partial f(g) = \{f'(g)\},$$

т.е. градиент $f'(g)$ является единственным субградиентом $f(g)$. Верно и обратное утверждение.

Пусть G – открытое выпуклое множество в E_n, B-компакт, $F(g,b)$ – функция на $G * B$, выпуклая по g на G при любом $b \in B$ и непрерывная по совокупности аргументов на $G * B$. Тогда субдифференциал функции максимума:

$$f(g) = \max_{b \in B} F(g,b) \quad (39)$$

имеет вид:

$$\partial f(g) = conv\left(\bigcup_{b \in B} \partial F(g,b)\right), g \in G, \quad (40)$$

где

$conv$ – обозначает выпуклую оболочку множества и

$$B(g) = \underset{b \in B}{Arg\max}\, F(g,b), \quad (41)$$

а $\partial F(g,b)$ – субдифференциал функции $F(g,b)$ по g на G при данном $b \in B$.

В частности, когда функция $f(g)$ есть конечный максимум (21) от выпуклых функций $f_k(g), k = 1, 2, ..., m,$ то формула (40) приобретает вид:

$$\partial f(g) = conv\left(\bigcup_{k \in N(g)} \partial f_k(g)\right), g \in G \quad (42)$$

В частности, если функции $f_k(g), k = 1, 2, ..., m,$ дифференцируемы, то формула (42) приобретает вид:

$$\partial f(g) = conv\left(\bigcup_{k \in N(g)} \{f_k'(g)\}\right) = \\ = \left\{ h \in E_n \middle| h = \sum_{k \in N(g)} \lambda_k f_k'(g), \lambda_k \ge 0, k \in N(g), \sum_{k \in N(g)} \lambda_k = 1 \right\}, \quad (43)$$

и из формулы (38) получим, в частности, уже знакомую формулу (23) в выпуклом случае. Таким образом в этом случае задача построения обобщенного дифференциала (28) функции $f(g)$ сводится к построению всех угловых точек ее субдифференциала, или, по крайней мере, какого-то конечного множества точек, содержащего наверняка в себе все угловые. В данном случае это было подмножество $\{f_k'(g), k \in N(g)\}$ градиентов дифференцируемых выпуклых функции $f_k(g), k = 1, 2, ..., m.$

Пусть $f_1, ..., f_m$ – выпуклые функции на открытом выпуклом множестве G в E_n, $\alpha_1, ..., \alpha_m$ – неотрицательные числа. Тогда субдифференциал функции:

$$f(g) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(g)$$

имеет вид:

$$\partial f(g) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \partial f_i(g). \quad (44)$$

В частности, это верно для суммы выпуклых функций.

Пусть $r_1, ..., r_m$ – выпуклые функции на открытом выпуклом множестве G в E_n, $r = (r_1, ..., r_m)$ – образованная из них вектор-функция, φ – монотонно неубывающая (по совокупности переменных) выпуклая функция на открытом выпуклом множестве U в E_m, причем $r(G) \subset U.$ Тогда субдифференциал функции $f(g) = \varphi(r(g))$ имеет вид:

$$\partial f(g) = \bigcup_{p \in \partial\varphi(u)} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \partial r_i(g)\right), g \in G, \quad (45)$$

где $u = r(g).$

В частности, если функция φ – дифференцируема в точке $u = r(g),$ то формула (45) принимает вид:

$$\partial f(g) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_i} \partial r_i(g). \quad (46)$$

Если, кроме того, функции $r_1, ..., r_m$ дифференцируемы в $g,$ то получаем отсюда известную формулу для градиента суперпозиции дифференцируемых функций:

$$f'(g) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_i} r_i'(g). \quad (47)$$

Остается заметить, что все формулы остаются справедливыми, если выпуклость заменить на слабую выпуклость, а субдифференциалы выпуклых функций – на квазидифференциалы слабо выпуклых функций [4].

6. СВЯЗЬ С ИСЧИСЛЕНИЕМ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИГРАНДИЕНТОВ РЕГУЛЯРНЫХ ЛОКАЛЬНО ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Отметим тут же, следуя [5], что для локально липшицевой, дифференцируемой по любым направлениям $l \in E_n$, функции $f(g)$ обобщенным ε-квазиградиентом в точке $g \in E_n$ называется любой вектор $h \in E_n$, удовлетворяющий условию:

$$f(g + \lambda l) - f(g) \ge \lambda \langle h, l \rangle + r(g, \lambda, l), \quad (48)$$

где функция $r(g, \lambda, l)$ является полунепрерывной снизу по g при фиксированных $l \in E_n, \lambda > 0$, локально ограничена и удовлетворяет условию:

$$r(g, \lambda, l)/\lambda \to 0, \quad (49)$$

когда $\lambda \to +0,$ при любых фиксированных g, l. Множество всех обобщенных ε-квазиградиентов будем обозначать через $G_r^{(\varepsilon)}(g)$.

Сравнивая это определение с (35, 36) ε-квазидифференцируемости, убеждаемся, что ε-квазиградиенты являются обобщенными ε-квазиградиентами и их множество $G_r^{(0)}(g)$ при $\varepsilon = 0$ не зависит от выбора функции $r(g,\lambda,l)$ в (48). Это множество называется обобщенным квазидифференциалом локально липшицевой, дифференцируемой по направлениям функции $f(g)$ обобщенным ε-квазиградиентом в точке $g \in E_n$, и обозначается через $\partial f(g)$.

Разница состоит в том, что в определении обобщенных квазиградиентов не требуется равномерности по g,l в условии (49). Но для нас последнее обстоятельство как раз фатально, поскольку не позволяет построит обобщенного дифференциала, основанного на этом свойстве. Тем не менее, мы продолжаем изложение основных правил обобщенного квазиградиентного исчисления локально липшицевых, дифференцируемых по направлениям функций (далее для краткости – регулярных по Кларку или просто регулярных), поскольку, как мы увидим далее, функция связанного максимума в общем случае не является слабо выпуклой. Таким образом понятие регулярности обобщает понятие слабой выпуклости локально липшицевых функций. С учетом этого замечания обобщенные квазиградиенты будем иногда назвать просто квазиградиентами. Для нас важно, что все формулы (38-47) исчисления квазидифференциалов из предыдущего пункта остаются справедливыми и для обобщенных квазидифференциалов [5].

Для полноты изложения заметим, что имеется еще один класс обобщенно дифференцируемых функций, дифференцируемых по направлениям, это так называемый класс полугладких функций. Напомним, что функция называется полугладкой [11], если:

1. $f(g)$ – локально липшицевая функция;
2. Для любых $g \in E_n$ и любых таких последовательностей $a^n \to g$, что:

$$\frac{a^n - g}{\left|a^n - g\right|} \to d, h^n \in \partial f(a^n), n = 1, 2, ...,$$

существует предел скалярных произведений

$$\lim_{n\to+\infty}\langle h^n, d\rangle.$$

В классе полугладких функций удается доказать все те же основные факты про функцию связанного максимума, что и в классе регулярных. Известно, что классы полугладких и регулярных функций пересекаются, но не содержат друг друга. Поэтому замена класса регулярных на класс полугладких функций никакого выигрыша в смысле поставленных нами целей изучения устойчивости функции связанного максимума специального вида не дают. Поэтому мы переходим к изложению дифференциальных свойств функции связанного максимума, оставаясь в классе регулярных функций, следуя [10].

7. РЕГУЛЯРНОСТЬ ФУНКЦИИ СВЯЗАННОГО МАКСИМУМА

Рассмотрим функцию максимума со связанными переменными:

$$f(g) = \max_{b\in B(g)} F^0(g,b), g \in E_n, \tag{50}$$

где

$$B(g) = \left\{b \in E_m \middle| F^j(g,b) \le 0, j = 1, 2, ..., k\right\}. \tag{51}$$

Предположим, что точечно-множественное отображение $B(g)$ локально ограничено, функции F^j непрерывны вместе с F_g^j, F_b^j на $G' * E_m$, где $G' \subset E_n$ – некоторое открытое множество.

Предположим, что выполнено условие регулярности [7]:

$$F_b^j(g,b), j \in J_0(g,b), \tag{52}$$

линейно-независимы при любых $g \in G', b \in \overline{B}_0(g)$.

Здесь

$$J_\tau(g,b) = \left\{j \in J \middle| F^j(g,b) \ge -\tau\right\}, \quad J = \{1, 2, ..., k\}, \tau \ge 0; \tag{53}$$

$$\overline{B}_\gamma(g) = \left\{b \in B(g) \middle| F^0(g,b) \ge \max_{b\in B(g)} F^0(g,b) - \gamma\right\}, \gamma \ge 0. \tag{54}$$

Предположим дополнительно, что точечно-множественное отображение $B(g)$ непрерывно по Хаусдорфу [7]. В этих условиях в [7] было доказано существование производной по любому направлению $l \in E_n$ функции $f(g)$ на G', причем

$$\partial f(g)/\partial l = \max_{h\in D(g)} \langle h, l\rangle, \tag{55}$$

где

$$D(g) = conv\left\{h \in E_n \middle| \begin{array}{l} h = F_g^0(g,b) + \\ + A^*(g,b)F_b^0(g,b), b \in \overline{B}_0(g) \end{array}\right\}, \tag{56}$$

а $A(g,b): E_n \to E_m$ – линейный оператор, удовлетворяющий равенству [7]:

$$F_g^{J_0} \bullet (g,b) + F_b^{J_0} \bullet (g,b)A(g,b) = 0. \tag{57}$$

Здесь • – означает знак сопряжения, и обозначено для краткости:

$$J_\tau = J_\tau(g,b), F^{J_\tau}(g,b) = \left(F^j(g,b), j \in J_\tau\right). \tag{58}$$

Имеется в виду для определенности, что вектор $F^{J_\tau}(g,b)$ представляет собой вектор-строку.

В [10] было показано, что определение вектора h в (56) не зависит от выбора линейного оператора $A(g,b)$, удовлетворяющего равенству (57), и что векторы $h \in D(g)$ в (56) представляют собой проекцию

$$h = \pi_{E_n}^{L(g,b)} \nabla F^0(g,b) \tag{59}$$

«полного» градиента функции $F^0(g,b)$:

$$\nabla F^0(g,b) = (F_g^0 *(g,b), F_b^0 *(g,b))^* \in E_{n+m} = E_n * E_m, \tag{60}$$

на E_n вдоль подпространства

$$L(g,b) = Lin\left(\nabla F^j(g,b), j \in J_0(g,b)\right), \tag{61}$$

натянутого на «полные» градиенты функций задающих активные ограничения, т.е. в виде так называемого приведенного градиента, относительно активных ограничений.

Если векторы $\left(\nabla F^j(g,b), j \in J_0(g,b)\right)$ линейно независимы, то как показано в [10], оператор

$$A^* = A_\tau^*(g,b) = -F_g^{J_\tau}\left[F_b^{J_\tau} * F_b^{J_\tau}\right]^{-1} F_b^{J_\tau *} \tag{62}$$

удовлетворяет условию (57) при $\tau = 0$, т.е. решает задачу проектирования (59) в определение вектора h в (56).

Если же векторы $\left(\nabla F^j(g,b), j \in J_0(g,b)\right)$ линейно зависимы, то следует их предварительно «проредить», оставив любую базисную для подпространства $L(g,b)$. Тогда формула, построенная по схеме (62), останется верной и в этом случае.

Если потребовать дополнительно, чтобы точечно-множественное отображение $B(g)$ было липшицевым на G' в метрике Хаусдорфа ρ, то функция связанного максимума $f(g)$ также будет липшицевой функцией. Если, кроме того, отображение $B(g)$ удовлетворяет дополнительному условию регулярности, в смысле [15], т.е. существуют такие $\delta > 0, \beta > 0,$ что:

$$\rho(b,B(g)) \le \beta F(g,b), b \in O_\delta(B(g)) / D(g), g \in G',$$

то, как было показано в [10], $\partial f(g) = D(g)$, т.е. множество $D(g)$ векторов h, определенное формулой (56), представляет ее обобщенный квазидифференциал. Здесь $O_\delta(B(g))$ – δ -окрестность множества $B(g)$.

Обобщенные квазиградиенты функции максимума не всегда можно вычислить точно, поэтому в [12] были предложены различные способы аппроксимации обобщенных квазиградиентных отображений функции связанного максимума. В [11] эти конструкции были перенесены на стохастические функции связанного максимума, возникающие когда функция связанного максимума в критерии стоит под знаком интеграла или суммы в дискретном случае, как в критерии (11) с учетом рекуррентного уравнения (5), определяющего его единственную точку связанного максимума. Это открывает возможность впрямую строить его обобщенное квазиградиентное отображение $\partial f(g)$, необходимое для построения обобщенного дифференциала типа (28) с использованием его угловых точек. Более того, в следующем пункте мы покажем, что функция связанного максимина, определенная соотношениями (5, 11) является слабо вогнутой, и, следовательно, для нее обобщенное квазиградиентное отображение $\partial f(g)$ совпадает с квазиградиентным отображением слабо вогнутой функции. Для решения задачи построения ее обобщенного дифференциала типа (28) это принципиально, поскольку в классе регулярных локально липшицевых функций он, вообще говоря, не существует в силу отсутствия равномерности выполнения условия (49) по $l \in E_n, |l| = 1.$ Более того будет показано, что функция, определенная соотношениями (5, 11) не является ни выпуклой, ни даже слабо выпуклой. Таким образом, для решения поставленной задачи построения ее обобщенного дифференциала, класса выпуклых функций было бы недостаточно, а в объемлющем классе регулярных локально липшицевых функций обобщенного дифференциала в общем случае не существует. Это показывает, что найденный класс слабо вогнутых функций чрезвычайно удачен для поставленных нами целей и позволяет полностью решить задачу построения обобщенного дифференциала для функции связанного максимума, определенной соотношениями (5, 28), что называется на пределе.

8. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКТА: ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Предположим, что множество допустимых решений $Z(g)$ задачи (11) не пусто и оптимальное решение $Z_t = Z_t(g), t = 0, 1, ..., n-1,$ находится из рекуррентного уравнения (5). В силу единственности решения рекуррентного уравнения (5), которое для векторного параметра $g \in E_n$ принимает вид:

$$Z_{t-1} = min\left(S_{t-1}; \frac{Z_t + q_t}{1 + g'_t}\right), t = n, ..., 1, \tag{63}$$

с конечным условием (8):

$$Z_n = Z_n^0,$$

задача (11) также имеет единственное решение $Z_t, t = 0, 1, ..., n-1,$ и функция максимума $f(g)$ получается из общего выражения (11) подстановкой в него, полученного оптимального решения:

$$x^* = f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i - g'_t) Z_t(g)}{(1+i)^t}. \tag{64}$$

Заметим, что функция под знаком минимума в (63) является дифференцируемой по $g_t, t = 1, 2, ..., n,$ и, следовательно, по $g \in E_n$. Отправляясь от граничного условия (8), нетрудно доказать методом математической индукции по $t = 0, 1, ..., n-1,$, что функция $Z_t = Z_t(g), t = 0, 1, ..., n-1,$ является минимумом из $n - t + 1$ функции, обладающей таким же свойством. То есть дифференцируемых по $g \in E_n$ функций.

Итак, мы убедились, что все функции $Z_t = Z_t(g), t = 0, 1, ..., n-1,$ являются слабо вогнутыми по $g \in E_n$ функциями. Коэффициент $i - g'$ в выражении (65), представляющий положительную дифференцируемую функцию, можно мысленно внести под знак минимума, если бы мы подставили в (64) выражение для $Z_t = Z_t(g)$, полученное согласно последнему утверждению. Тогда критерий (64) стал бы суммой слабо вогнутых функций конечных минимумов и следовательно сам является слабо вогнутым. Тем самым установлена слабая вогнутость критерия (64), которому всегда можно придать форму:

$$x^* = f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k=0,...,n-t} f_k^t(g), \tag{65}$$

где все функции $f_k^t(g), k \in K^t = \{0, 1, ..., n-t\}, t = 0, 1, ..., n,$ являются дифференцируемыми в положительном ортанте E_n^+ пространства E_n. Можно было бы выписать их в явном виде, но для нас важнее показать в данном случае, как строится обобщенный дифференциал.

В соответствии с формулами (43, 44), которые остаются с соответствующими изменениями справедливыми и для слабо вогнутых функций, квазидифференциал функции (65) будет иметь вид:

$$\partial f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} conv(\nabla f_k^t g), k \in K^t(g)), \tag{66}$$

где обозначено:

$$K^t(g) = \underset{k \in K^t}{Arg\,min} f_k^t(g). \tag{67}$$

Угловые точки квазидифференциала (66) лежат среди всевозможных наборов:

$$\left(\nabla f^t_{k_t}, t = 0,...,n-1\right), k_t \in K^t(g). \quad (68)$$

Обобщенный дифференциал функции $f(g)$ соответствующий конечному множеству точек (68), содержащему все угловые точки квазидифференциала $\partial f(g)$, будет иметь вид:

$$Df(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g)} \left\langle \nabla f^t_k(g), \Delta g \right\rangle . \quad (69)$$

Так получается, потому что минимум $\langle h, \Delta g \rangle$ по всем $h \in \partial f(g)$ можно заменить на минимум по конечному множеству (68), а минимум суммы

$$\left\langle h, \Delta g \right\rangle = \sum_{t=0}^{n-1} \left\langle \nabla f^t_{k_t}(g), \Delta g \right\rangle, \quad (70)$$

в силу независимости выбора компонент вектора $h \in \partial f(g)$ равняется сумме минимумов (70) [15].

Таким образом, в этом случае задача построения обобщенного дифференциала (28) функции $f(g)$ сводится к построению всех угловых точек ее квазидифференциала, или, по крайней мере, какого-то конечного множества точек, содержащего наверняка в себе все угловые. В данном случае это было подмножество (69).

Для построенного обобщенного дифференциала слабо вогнутой функции $f(g)$ имеет место неравенство (31):

$$-\underset{k \in N(g)}{K_0} * \left|\Delta g\right| \le Df(g) \le \underset{k \in N(g)}{K_1} * \left|\Delta g\right|,$$

Величины обобщенных коэффициентов эластичности – верхний и нижний – по векторному параметру $a = g$, но уже в ослабленном смысле неравенства (31), можно подсчитать по формулам:

$$K_0(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \max_{k \in K^t(g)} \left|\nabla f^t_k(g)\right|; \quad (71)$$

$$K_1(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g)} \left|\nabla f^t_k(g)\right|. \quad (72)$$

Как видим, они и в этом случае не совпадают, что обобщает известный эффект для однопараметрической задачи, отмеченный в литературе, имеющий место в силу возможного несовпадения левой и правой производной по направлению для недифференцируемых функций одной переменной.

Важно отметить, что внутренняя функция под знаком минимума в основном рекуррентном уравнении (64) не монотонна как функция от (g_t, Z_t), а это значит, что формула (46) для ее квазидифференциала типа производной сложной функции неверна, и значит, уравнение в вариациях для квазидифференциалов не проходит, т.е. нельзя взять квазидефференциалы от правой и левой части (64) и получить рекуррентное уравнение для квазидифференциалов $\partial Z_t(g)$, как это было сделано в работе [2] для производных по направлению. Дело в том, что в работе [2] нам было достаточно аналога следствия (47) формулы (46) для производных по направлению:

$$\partial f(g)/\partial l = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_i} \partial r_i(g)/\partial l, \quad (73)$$

который справедлив без условия монотонности функции $\varphi(u)$ по u, где $u = r(g)$.

Это замечание показывает, что предложенный способ построения обобщенного градиента в данном случае является, по-видимому, единственно возможным. Хорошо, что функцию связанного максимума (64) удалось представить в виде суммы (65) конечных минимумов от дифференцируемых функций, что обеспечило ее слабую вогнутость, а этого достаточно для построения обобщенного дифференциала, как суммы обобщенных дифференциалов функций конечного минимума и тем самым решить исходную задачу во всей полноте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что априорно для решения нашей задачи построения обобщенного дифференциала класс выпуклых и даже слабо выпуклых функций не подошел, а в объемлющих их классе локально липшицевых, диффренцируемых по направлению функций не выполняется принципиальное для поставленных нами целей условие равномерной малости остатка от приращения. Нетривиальность результата работы состоит поэтому в том, что была доказана принадлежность функции связанного максимума к классу даже не слабо выпуклых, как можно было бы надеяться, поскольку это функции, хоть и связанного, но максимума, а слабо вогнутых функций. Что позволило ограничиться ее квазиградиентами и квазидифференциалами для построения ее обобщенного дифференциала. Вот в чем внутренний смысл нашей работы.

Литература

1. Беляков А.В. Об оптимизации использования заемных средств в ходе осуществления инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков // Финансы и кредит. – 1999, – №7. – С. 2-7.
2. Беляков А.В. Устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и анализ рисков [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2009. – №2.
3. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
4. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования [Текст] / Ю.М. Ермольев. – М. : Наука, 1976. – 239 с.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ [Текст] / Ф. Кларк. – М. : Наука, 1988.
6. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст]. – Deloitte&Touche. – декабрь 2003 – март 2005.
7. Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях [Текст] / Л.И. Минченко // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24, №2. – С. 210-217.
8. Михалевич В.С. и др. Методы невыпуклой оптимизации [Текст] / В.С. Михалевич, А.М. Гупал, В.И. Норкин. – М. : Наука, 1987. – 278 с.
9. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
10. Перевозчиков А.Г. Метод стохастического обобщенного градиента для решения минимаксных задач со связанными переменными [Текст] / А.Г. Перевозчиков, С.К. Завриев // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30, №4. – С. 491-500.
11. Перевозчиков А.Г. Об аппроксимации обобщенных стохастических градиентов случайных регулярных функций [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31, №5. – С. 681-688.
12. Перевозчиков А.Г. Об одном способе аппроксимации псевдоградиентного отображения функции связанного максимума [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31, №3. – С. 353-362.

13. Перевозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 163-166.
14. Сухарев А.Г. и др. Курс методов оптимизации [Текст] / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
15. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 280 с.

Ключевые слова

Оценка бизнеса; рыночная стоимость; доходный подход; метод дисконтирования доходов; ставка дисконта; инвестированный капитал; структура инвестируемого капитала; стоимость денег; анализ рисков; коэффициенты эластичности.

Беляков Александр Викторович

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было показано, что тем не менее указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и предложен способ их расчета. Полученные производные интерпретировались авторами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как было показано ими ранее, также можно сконструировать обобщенный дифференциал в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой. Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же их хотя бы два, то это гораздо более сложная задача, и она изучается авторами в настоящей работе.

Тем самым предложенная ими ранее методика анализа рисков получила дальнейшее развитие в виде перехода от производных по направлениям изменения параметров риска к обобщенному дифференциалу не дифференцируемой функции собственного капитала проекта. Это позволяет оценить ее приращение в произвольном направлении одновременного изменения параметров риска, и тем самым служить математической моделью оценки влияния рисков на стоимость проекта. Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.В. Белякова, А.Г. Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и менеджмента, декан факультета экономики и менеджмента

8.2. ABOUT THE INVESTMENT PROJECT STABILITY WITH RESPECT TO A POSSIBLE CASH VALUE CHANGE AND RISKS ANALYSES

A.V. Belaykov, Candidate of Science (Technical), the Chief Systems Expert of PLC «Prime Group» Branch in Tver;
A.G. Perevozchikov, Doctor of Economics, the Professor of the Economics Department of Tver Institute of Ecology and Law

The investigation task of investment project stability in respect to a possible cash value change is regarded. In general case the value of the actual project capital is not the differentiated function of consolidated risk. In the suggested methods of risks analyzes the derivatives on directions can be interpreted as flexibility rates. If there is only one risk parameter, the task of finding the generalized differential can be completely done. If there are at least two of them, the task is much more sophisticated and it is studied in the article.

Literature

1. Valuation of Business: A Manual. Edited by A.G.Gryaznova, M.A. Fedotova – M.: Finance and Statistics. – 2002.
2. Methodology and Manual on Conducting Valuation of Business and Assets of Public Limited Company «United Energy Systems of Russia.» – Deloitte & Touche. – Dec.2003-March 2005.
3. A.G. Perevozchikov. Calculation of Capital Structure in Cash Flow Models for Personal and Invested Capital. Audit and Financial Analyses, 2006, №1, p. 163-166.
4. A.V. Belyakov. About Optimization of Borrowed Funds Use in Investing Project Realization. Finance and Credit. – 1999, №7, p. 2-7.
5. A.V. Belyakov, A.G. Perevozchikov. The Investment Project Stability with Respect to a Possible Cash Value Change and Risks Analyses. Audit and Financial Analises. – 2009, №2.
6. V.F. Demyanov, V.N. Malozemov. The Main Editorial Office of Physical-mathematical literature of the Publishing House «Nauka», 1972, 368 p.
7. L.I. Minchenko. Differential Characteristics of Maximum Function at Connected Limits. Journal of Calculative Mathematics and Mathematical Physics, 1984, v.24, №2, p. 210-217.
8. U.M. Ermoliev. Methods of Stochastic Programming. M.: «Nauka», 1976, 239 p.
9. A.G. Suharev, A.V. Timohov, V.V. Fedorov. The Course of Optimization Methods.- M.: «Nauka», 1986, 328 p.
10. F. Clark. Optimization and Non-smooth Analyses. M.: «Nauka», 1988.
11. V.S. Mihalevich, A.M. Gupal, V.I. Norkin. The Methods of Non-prominent Optimization. – M.: «Nauka», 1987, 278 p.
12. A.G. Perevozchikov, S.K. Zavriev. The Method of Stochastic Summarized Gradient for Solving Minimax sums with Connected Variables. Journal of Calculative Mathematics and Mathematical Physics, 1990, v. 30, №4, p. 491-500.
13. V.V. Feodorov. The Numeral Methods of Maximine. M.: «Nauka»,1979,280 p.
14. A.G. Perevozchikov. About the Method of Approximation of Pseudo gradient Reflection of the Connected Maximum Function. Journal of Calculative Mathematics and Mathematical Physics, 1991, v. 31, №3, p. 353-362.
15. A.G. Perevozchikov. About the Approximation of Generalized Gradients of Casual Regular Functions. Journal of Calculative Mathematics and Mathematical Physics, 1991, v. 31, №5, p. 681-688.

Keywords

Business assessment; market value; income approach; income discounting method; discount rate, invested capital; structure of invested rate; cash value; risks analysis; flexibility rate.