

3.7. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

Егорова С.Е., к.э.н., доцент кафедры бухгалтерского учета и аудита

Псковский государственный политехнический институт

Наличие статистической информации о рыночной конъюнктуре позволяет провести моделирование потребительского спроса и выявить его важнейшие закономерности. Анализ бюджетов обследования домашних хозяйств по Псковской области с использованием MS Excel подтвердил выявленные закономерности потребительского спроса.

Рыночная конъюнктура зависит от целого комплекса факторов – как социально-экономических и демографических, так и естественно-природных. Рынок чутко реагирует на внешние воздействия. Благоприятное влияние заставляет рынок оживляться и расширяться, а негативное – наоборот. Наибольшему влиянию на изменение рыночной конъюнктуры подвержены такие экономические категории как спрос и предложение, т.е. основные элементы рыночного механизма.

В условиях жесткой конкуренции управление спросом позволяет снизить риск появления невостребованной рынком продукции и увеличить объемы продаж, а соответственно, и прибыль предприятия.

Заметим, что изменение цен на товары, входящие в бюджет потребителей, приводит к изменению их реального дохода при постоянном номинальном. Причем для потребителей с различным уровнем денежных доходов одно и то же изменение цен товаров вызывает неодинаковые сдвиги реальных доходов. Такой сдвиг реального дохода потребителей с денежным доходом s при изменении цен товаров может быть измерен индексом реального дохода $I(p, s)$ (индекс Ласпейреса) [1].

Пусть $y_j(s)$ – расход потребителей с доходом s на товары группы j , а $\sum y_j(s) = s$ (здесь мы не рассматриваем механизм образования сбережений и s интерпретируется как доход, целиком идущий на потребление – при подобной трактовке мы вправе не учитывать таких категорий теории потребления, как неудовлетворенный спрос). Тогда если обозначить через p вектор цен на товары, при которых определены кривые Энгеля $y_j(s)$ [2], и перейти к долям расхода:

$$\varphi_j(s) = \frac{y_j(s)}{s},$$

то $I(p, s)$ определяется соотношением

$$I(p, s) = \frac{1}{\sum \frac{p_j \cdot \varphi_j(s)}{p_j^0}},$$

т.е. относительными изменениями цен (индексами). Поэтому в дальнейшем удобнее пользоваться индексами цен, сохраняя прежние обозначения и полагая $p^0 = 1$. Кроме того, для краткости под термином «цена» будем понимать индекс цен.

Теперь предположим, что потребители со среднедушевым денежным доходом s при векторе цен p , т.е. при сдвиге реального дохода в $I(p, s)$ раз, будут иметь такую же структуру расходов, какую имели потребители со среднедушевым денежным доходом $sl(p, s)$ до изменения цен, т.е. при векторе цен p^0 . Это предположение назовем гипотезой устойчивости структуры расходов. Тогда структуру спроса потребителей с доходом s при ценах p можно описать соотношением

$$\varphi_j(p, s) = \varphi_j(sl(p, s)). \tag{1}$$

Гипотеза, определяемая (1), представляется не лишней смысла при условиях малых изменений цен и большой агрегации статей расхода потребителей. Однако по поводу ее достоверности могут быть высказаны сомнения в случае, когда первое условие не выполняется. Пусть цены на товары группы j , для которой $y_j(s) \neq 0$, заметно изменились, например, повысились.

Тогда реальный доход потребителей с доходом s снизился. Согласно гипотезе устойчивости структуры расходов, потребители с доходом s приобретут товаров группы j на сумму $\varphi_j(p, s) \cdot \varphi_j(s)$. Учитывая, что цены на товары группы j увеличились существенно, натуральное потребление товаров этой группы должно значительно уменьшиться. Однако можно назвать ряд товарных групп, натуральное потребление которых при существенном росте цен может снизиться не очень значительно. Например, если цены на хлеб выросли в несколько раз, то маловероятно, что покупка хлеба также уменьшится, по крайней мере, во столько же раз. Согласно принятой гипотезе, это уменьшение должно быть еще больше. Кроме того, сомнение возникает в связи с существованием парадокса Гиффена и Веблена [3] для некоторых товаров. Сомнения в достоверности гипотезы устойчивости структуры расходов подтверждаются зависимостью поведения потребителей только от общего уровня цен, а не от их структуры.

Исходя из сказанного, можно выдвинуть альтернативную гипотезу поведения потребителей. Предположим, что потребители с доходом s при изменении цен p будут иметь структуру натурального потребления такую же, какую имели потребители с доходом $sl(p, s)$ до изменения цен. Это предположение назовем гипотезой устойчивости структуры потребления. Тогда с учетом нормировки структуры спроса потребителей с доходом s при ценах p может быть определена как

$$\varphi_j(p, s) = \frac{p_j \cdot \varphi_j}{\sum_{k=1}^n p_k \cdot \varphi_k(p, s)}. \tag{2}$$

Заметим, что нормировочный множитель

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n p_k \cdot \varphi_k(p, s)}$$

является индексом Паше [1], так как взвешивание цен производится по новой структуре расходов $\varphi_j(p, s)$.

Обозначив индекс Пааше $I(p, s)$, можно переписать

$$\varphi_j(p, s) = p_j \cdot \varphi_j(p, s) I(p, s). \tag{3}$$

По поводу гипотезы устойчивости структуры потребления в свою очередь возникают сомнения в ее достоверности. Один из аргументов может быть сформулирован с помощью понятия необходимости товаров (товарных групп).

Пусть для некоторых j и k $d\varphi_j(\mathbf{s})d\varphi_k(\mathbf{s})$. Тогда будем говорить, что товар k более необходим, чем j . Если $d\varphi_j(\mathbf{s}) = d\varphi_k(\mathbf{s})$, то необходимость этих товаров одинакова. Исходя из этого, все товары (товарные группы) можно частично упорядочить по степени необходимости, определение которой, естественно, иллюстрируется с помощью статистики бюджетов населения. Например, с ростом дохода доля расходов на хлеб и хлебобулочные изделия, сахар, картофель падает, а на фрукты, культурно-бытовые товары, транспортные средства – растет. Очевидно, что при снижении (росте) цен на товары первой группы их натуральное потребление увеличится (уменьшится) несущественно. Другими словами, спрос на эти товары мало зависит от уровня цен на них, а на товары второй группы является эластичным по цене. Отсюда следует предположение о том, что структура расходов потребителей при изменении цен товаров зависит от упорядочения товаров по степени их необходимости: чем нужнее товар, тем стабильнее натуральное потребление при изменении уровня и структуры цен. Это предположение будем использовать как третью гипотезу для определения структуры расходов потребителей при сдвиге цен. Назовем ее смешанной, поскольку она может быть представлена как линейная выпуклая комбинация двух предшествующих.

Структура спроса потребителей с доходом \mathbf{s} при ценах \mathbf{p} с использованием этой гипотезы определяется как

$$\varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = L(\mathbf{p}, \mathbf{s}) * [\alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) * \varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) + \beta_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) * \varphi_k(\mathbf{p}, \mathbf{s})], \quad (4)$$

где коэффициенты

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left[\sum (\alpha_k(\mathbf{p}, \mathbf{s}) * \varphi_k(\mathbf{p}, \mathbf{s}) + \beta_k(\mathbf{p}, \mathbf{s}) * \varphi_k(\mathbf{p}, \mathbf{s})) \right]^{-1}$$

является нормировочным;

$\alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ – устойчивости структуры расходов;

$\beta_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ – устойчивости структуры потребления;

$$\alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \geq 0, \beta_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \geq 0, \alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) + \beta_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 1.$$

Из формальной записи смешанной гипотезы поведения потребителей можно видеть, что проблема выбора вида и вычисления параметров функции полезности в нашем случае трансформируется в проблему определения значений $\alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$. При спецификации коэффициентов устойчивости структуры расходов возникают сложные вопросы. Например, значения $\alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ существенно зависят от условий переключения спроса на другие товары, входящие в состав группы. Не лишено основания предположение, что эти возможности тем шире, чем больше разнообразие товаров в группе. На данном этапе исследований вопрос об оценке разнообразия товаров в группах и определении зависимости коэффициента устойчивости структуры расходов от показателя разнообразия товаров может быть только поставлен. Однако представляется полезным проведение имитационных экспериментов с различными способами формирования коэффициентов $\alpha_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$.

Исходя из выдвинутых гипотез поведения потребителей, можно поставить задачу отыскания таких цен, при которых прогнозируемый спрос на товары будет совпадать с предложением этих товаров. Конечно,

было бы наивным утверждать, что установление подобных цен привело бы к точному балансу между спросом и предложением. Но рассчитанные цены равновесия могут оказаться полезным «начальным приближением». Кроме того, характер зависимости этих цен от параметров прогнозируемого спроса даст возможность получить важные качественные выводы о самих гипотезах поведения потребителей. И наконец, в рамках подобной постановки вопроса можно рассматривать различные варианты совместного изменения цен и предложения товаров. С формальной точки зрения цены равновесия – такие, при которых функции избыточного спроса обращаются в нуль. В наших условиях эти функции имеют вид

$$F_j(\mathbf{p}) = \frac{\left(\int_0^{\infty} \varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \mathbf{s} \mu(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \right)}{p_j} - V_j,$$

где

V_j – предложение товаров группы j ;

$\mu(\mathbf{s})$ – функция плотности распределения населения по уровню доходов.

Тогда \mathbf{p}^* – цены равновесия – являются решением системы

$$p_j V_j = \int_0^{\infty} \varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \mathbf{s} \mu(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (5)$$

или неподвижной точкой отображения

$$R(\mathbf{p}) = \{R_1(\mathbf{p}), \dots, R_n(\mathbf{p})\},$$

где

$$R_j(\mathbf{p}) = \frac{\int_0^{\infty} \varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \mathbf{s} \mu(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{V_j}.$$

Так как для второй и смешанной гипотез функции $\varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ не обладают условием непрерывности в нуле, то нельзя утверждать существование решения системы (5). То, что требование непрерывности $\varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ существенно, можно проиллюстрировать следующим простым примером. Пусть

$$\varphi_j(\mathbf{s}) = \lambda_j, (\lambda_j) \mathbf{0}, \sum \lambda_j = 1.$$

Тогда, согласно второй гипотезе,

$$\varphi_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \lambda_j p_j / \sum \lambda_k p_k;$$

$$F_j(\mathbf{p}) = \lambda_j M / \sum \lambda_k p_k - V_j,$$

где

$M = \int \mathbf{s} \mu(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$ – суммарный доход.

Очевидно, в этих условиях система (5) имеет решение только в том случае, если λ_j пропорциональны V_j .

В то же время в рамках классической теории обычно рассматривается вопрос о существовании таких цен (равновесных), при которых все функции избыточного спроса неположительны. При этом необходимо выполнение условий типа заменимости, что в нашем случае не имеет места.

В практических расчетах для нахождения приближенного решения системы (5) можно использовать стандартный итеративный процесс, который может быть записан в виде

$$\mathbf{p}^{n+1} = \gamma_n \mathbf{p}^n + (1 - \gamma_n) R(\mathbf{p}^n),$$

где

p^n – вектор цен, полученный на итерации n ;

γ_n – последовательность демпфирующих параметров.

В практических расчетах часто оказывается полезным упростить функции избыточного спроса за счет замены функции на ее среднее значение M , функций $\varphi_j(p, s)$ – на $\bar{\varphi}_j(p, \bar{s})$, где \bar{s} – среднедушевой доход.

В упрощенном виде система (5) примет вид

$$p_j V_j = \bar{\varphi}_j(p, \bar{s}) M, \tag{5^*}$$

При проведении вариантных расчетов упрощенная система (5*) оказывается полезной. Для анализа же социальных функций цен необходимо использовать более точную систему (5), так как в ней учитывается социально-экономическая дифференциация потребителей.

Далее рассмотрим один из подходов к изучению эластичности спроса, используя гипотезы поведения потребителей. Если считать указанные гипотезы справедливыми при небольших изменениях цен, то можно построить предельные функции спроса, укладывающиеся в рамки классической теории. Таким образом, некоторые постулаты рациональности поведения потребителей (сохранение устойчивости структуры расходов или натурального спроса) можно связать с его описанием, основанным на предположении о наличии системы потребительских предпочтений относительно товаров. Кроме того, при таком подходе получается возможность дать интерпретацию реакции потребителей на изменение цен и доходов.

Начнем с анализа первой гипотезы.

Пусть $q_j(p, s)$ – система функций натурального спроса, удовлетворяющая бюджетному ограничению, т.е. $\sum p_j q_j(p, s) = s$ и $\varphi_j(p, s)$ – соответствующие доли расходов. Будем говорить, что эта система удовлетворяет первой гипотезе при малых изменениях цен, если

$$\varphi_j(p + \Delta p, s) = \varphi_j(p, s) + o(\Delta p),$$

где $\Delta p = \{\Delta p_1, \dots, \Delta p_n\}$ – малое изменение цен.

$$I = \left(\frac{p_k + \Delta p_k}{p_k} \varphi_k(p, s) \right)^{-1}, \quad \Delta p = \sum |\Delta p_k|$$

и

$$\frac{o(\Delta p)}{\Delta p}$$

стремится к нулю при Δp , стремящемся к нулю. Покажем, что при этих условиях выполнено соотношение:

$$\frac{d\varphi_j}{dp_k} = -s \frac{\varphi_k}{p_k} \frac{d\varphi_j}{ds} = -q_k \frac{d\varphi_j}{ds}. \tag{6}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_j}{dp_k} &= \\ &= \lim_{\Delta p_k \rightarrow 0} \frac{\varphi_j(p_1, \dots, p_k + \Delta p_k, \dots, p_n, s) - \varphi_j(p_1, \dots, p_n, s)}{\Delta p_k}. \end{aligned}$$

В то же время, согласно первой гипотезе:

$$\begin{aligned} \varphi_j(p_1, \dots, p_k + \Delta p_k, \dots, p_n, s) &= \\ &= \varphi_j \left(p, s \left[1 + \frac{\Delta p_k}{p_k} \varphi_k(p, s) \right]^{-1} \right) + o(\Delta p_k). \end{aligned}$$

Здесь I представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{p_1}{p_1} \varphi_1 + \frac{p_2}{p_2} \varphi_2 + \dots + \frac{p_k + \Delta p_k}{p_k} \varphi_k + \dots + \frac{p_n}{p_n} \varphi_n \right]^{-1} = \\ &= \left[\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k + \dots + \varphi_n + \frac{\Delta p_k}{p_k} \varphi_k \right]^{-1} = \\ &= \left[1 + \frac{\Delta p_k}{p_k} \varphi_k \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\Delta p_k}{p_k} \varphi_k \right]^{-1} &= \frac{p_k + \Delta p_k \varphi_k - \Delta p_k \varphi_k}{p_k + \Delta p_k \varphi_k} = \\ &= 1 - \frac{\Delta p_k \varphi_k}{p_k + \Delta p_k \varphi_k} = 1 - \frac{\Delta p_k}{p_k} \varphi_k + o(\Delta p_k). \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_j \left(p, s - s \frac{\Delta p_k}{p_k} \varphi_k(p, s) + so(\Delta p_k) \right) &= \\ &= \varphi_j(p, s) - \frac{s \Delta p_k}{p_k} \frac{d\varphi_j}{ds} \varphi_k(p, s) + o(\Delta p_k). \end{aligned}$$

Подставляя окончательное выражение

$$\varphi_j(p_1, \dots, p_k + \Delta p_k, \dots, p_n, s)$$

в предельное соотношение для частной производной получаем (6).

Теперь от долей расхода перейдем к натуральному спросу. Учтывая, что $\varphi_j = \frac{q_j p_j}{s}$, получаем:

$$\frac{d\varphi_j}{dp_k} = \frac{1}{s} \left(\frac{dq_j}{dp_k} p_j + q_j \right) = \begin{cases} \frac{dq_j p_j + q_j}{dp_k s} - n_{pu_k=1} \\ \frac{dq_j p_j}{dp_k s} - n_{pu_k \neq 1} \end{cases}; \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi_j}{ds} = \frac{p_j}{s} \frac{dq_j}{ds} + \frac{p_j q_j}{s^2}. \tag{8}$$

Используя полученные соотношения, имеем:

$$\frac{dq_j}{dp_k} = \begin{cases} \frac{q_j q_k}{s} - q_k \frac{dq_j}{ds}, k \neq 1 \\ \frac{q_j^2}{s} - q_j - q_k \frac{dq_j}{ds} \end{cases}. \tag{9}$$

Как видно из (19),

$$\frac{dq_j}{dp_k} + q_k \frac{dq_j}{ds} = \frac{dq_k}{dp_j} + q_j \frac{dp_k}{ds}.$$

Далее проанализируем вторую гипотезу. Будем считать, что вторая гипотеза выполняется при малых изменениях цен:

$$\varphi_j^*(p + \Delta p, s) = p_j \varphi_j(p + \Delta p, s) I,$$

где

$\Delta p = \{\Delta p_1, \dots, \Delta p_n\}$ – малое изменение цен;

$\Delta p = \sum \Delta p_k$;

$$I = \left(\sum \frac{p_j + \Delta p_j}{p_j} \varphi_j \right)^{-1};$$

φ_j^* – новая доля j -той группы товаров в общем объеме потребления.

$$\frac{d\varphi_j}{dp_k} = \lim_{\Delta p_k \rightarrow 0} \frac{p_j \varphi_j(p + \Delta p, s) I_H - p_j \varphi_j(p, s) I}{\Delta p_k}$$

Рассмотрим два случая:

1) $k \neq j$.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_j}{dp_k} &= \\ &= p_j \lim_{\Delta p_k \rightarrow 0} \left(\left(\varphi_j I_H - \frac{s \Delta p_k}{p_k} \frac{d\varphi_j}{ds} \varphi_k(p, s) I_H - \varphi_j I \right) / \Delta p_k \right) = \\ &= p_j \lim_{\Delta p_k \rightarrow 0} \frac{\varphi_j (I_H - I)}{\Delta p_k} - p_j \lim_{\Delta p_k \rightarrow 0} \left(\left(\frac{s \Delta p_k}{p_k} \frac{d\varphi_j}{ds} \varphi_k I \right) / \Delta p_k \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_H - I &= \frac{1}{\sum p_i \varphi_i + \Delta p_k \varphi_k} - \frac{1}{\sum p_i \varphi_i} = \\ &= \frac{\sum p_i \varphi_i - \sum p_i \varphi_i - \Delta p_k \varphi_k}{(\sum p_i \varphi_i + \Delta p_k \varphi_k) \sum p_i \varphi_i} = \\ &= \frac{-\Delta p_k \varphi_k}{(\sum p_i \varphi_i + \Delta p_k \varphi_k) \sum p_i \varphi_i}. \end{aligned}$$

Учитывая выражение для $I_H - I$, получим:

$$\frac{d\varphi_j}{dp_k} = -p_j \varphi_k \varphi_j I^2 - p_j \frac{s}{p_k} \frac{d\varphi_j}{ds} \varphi_k I = -\frac{\varphi_j \varphi_k}{p_k} - q_k \frac{d\varphi_j}{ds}.$$

Таким образом, мы вывели следующее равенство:

$$\frac{dq_j}{dp_k} = -q_k \frac{dq_j}{ds} \quad (10)$$

2) $k = j$.

В результате аналогичных рассуждений получаем:

$$\frac{dq_j}{dp_k} = -q_k \frac{dq_j}{ds} - \frac{q_j}{p_j}. \quad (11)$$

Формулы (9), (10), (11), описывающие предельные изменения функции спроса при вариации цен, позволяют уточнить содержательную интерпретацию гипотез. Рассмотрим случай, когда изменения цен компенсируются дополнительным доходом. Пусть Δp_k – абсолютное изменение цены на товар и $\Delta s = \sum \Delta p_k q_k$ – компенсирующий доход. Тогда для произвольной системы функций спроса $q_j(p, s)$ линейная часть приращения (дифференциал) в спросе на товар j dq_j будет равна:

$$\sum \left(-\frac{dq_j}{dp_k} + q_k \frac{dq_j}{ds} \right) \Delta p_k.$$

Из формул (10) и (11) автоматически следует равенство нулю dq_j , т.е. при компенсированном изменении цен и дохода натуральный спрос является постоянным. Это свойство – основная характеристика гипотезы устойчивости натурального спроса.

Аналогично можно проверить эквивалентность формулы (9) неизменности в том же смысле долей расходов при компенсированном изменении цен и доходов, что полностью характеризует гипотезу устойчивости расходов.

Система функций спроса, удовлетворяющая при всех p и s соотношению (11), обладает отличительной особенностью. А именно, можно показать, что при не-

которых дополнительных предположениях такая система порождена максимизацией функции вида

$$\Phi(q_1, \dots, q_n) = \min(U_j(q_j))$$

при бюджетном ограничении $\sum p_j q_j = s$.

Для начала проверим справедливость обратного утверждения в предположении строгой монотонности функций $U_j(Q_j)$. Задача максимизации $\Phi(q_1, \dots, q_n)$

эквивалентна задаче:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \max, \\ U_j(q_j) &\leq \sigma, \\ \sum p_j q_j &= s. \end{aligned} \quad (12)$$

Обращая функции $U_j(q_j)$ и пользуясь бюджетным ограничением, приходим к неравенству $s \geq \sum W_j(\sigma) p_j$.

Пусть $(\sigma^*, q_1^*, \dots, q_n^*)$ – решение задачи (11). Так как $W_j(\sigma)$ (обратные к $U_j(q_j)$) монотонно возрастают, то

σ^* – решение уравнения $\sum W_j(\sigma) p_j = s$ и $q_j = W_j(\sigma^*)$.

Дифференцируя обе части уравнения последовательно по s и p_k , получаем $\frac{d\sigma^*}{dp_k} = -W_k(\sigma^*) \frac{d\sigma^*}{ds}$ и, следовательно, выполнены соотношения (10) и (11).

Предположим, что для всех j справедливы неравенства $\frac{dq_j}{ds} > 0$ в некотором диапазоне изменения s . Соотношения (10) и (11) влекут пропорциональность градиентов функций $q_j(p, s)$

$$\frac{dq_i}{dp_k} / \frac{dq_j}{dp_k} = \frac{dq_i}{ds} / \frac{dq_j}{ds} = \Psi_{i,j}(p, s),$$

причем $\Psi_{i,j}(p, s) > 0$.

Но пропорциональность градиентов функций $q_j(p, s)$ равносильна существованию функциональной зависимости

$$q_j = W_j(\sigma),$$

где $W_j(\sigma)$ – монотонно возрастающие функции одного переменного.

Здесь существенно предположение $\frac{dq_j}{ds} > 0$.

Так как $q_j(p, s)$ удовлетворяют бюджетному ограничению, то σ^* – решение уравнения $\sum p_j W_j(\sigma) = s$, единственное в силу монотонности $W_j(\sigma)$. Повторяя теперь вышеприведенные рассуждения в обратном порядке, получим требуемый результат.

Сделанное нами предположение о ценности всех товаров ($\frac{dq_j}{ds} > 0$) является, конечно, нереалистичным.

Но, разделяя все товары на две группы по знаку $\frac{dq_j}{ds}$, можно в каждой из них установить жесткие зависимости потребления от одного из представителей группы.

В пределах каждой группы отношение $\frac{dq_i}{ds}$ к $\frac{dq_j}{ds}$ положительно и существуют функциональные связи ме-

жду $q_j(p, s)$ и $q_j(p, s)$. Именно возможность выделения двух комплектов и является характеристическим признаком поведения потребителей, описываемого гипотезой сохранения структуры натурального спроса.

Первая гипотеза может быть выражена теми же терминами, только разделение происходит на группы необходимых ($\frac{dq_j}{ds} < 0$) и не необходимых ($\frac{dq_j}{ds} > 0$) товаров. Соотношение (6) также определяет пропорциональность градиентов функций $\varphi_j(p, s)$, причем везде коэффициент пропорциональности положителен. Следовательно, в пределах каждой из групп расходы на один из товаров однозначно обуславливают расходы и на другие, т.е. существуют два комплекта, определяющих структуру расходов.

Связь для обеих гипотез между долями расхода или натуральным спросом на различные товары находится в полном соответствии с (6), (10) и (11). Действительно, в обоих случаях отсутствует «эффект замены», и изменение расходов (спроса) зависит только от «эффекта дохода» – для поддержания структуры расходов или возможности купить тот же набор товаров потребитель нуждается лишь в дополнительном доходе. Разумеется, можно предположить различные способы объяснения рациональности такого поведения. Если снова обратиться к предельным изменениям спроса при сдвигах цен, то можно показать, что

$$\frac{dq_j}{dp_k} = -q_k \frac{dq_j}{ds} + \frac{q_j q_k}{s} \alpha_j(s) + \alpha_k(s) - \sum_{r=1}^n \alpha_r(s) \varphi_r(p, s),$$

где $\alpha_j(s)$ [$0 \leq \alpha_j(s) \leq 1$] – коэффициенты устойчивости структуры расходов, в данном случае не зависящие от цен.

В этой формуле уже присутствует «эффект замены» и в долях расхода, и в натуральном спросе, и нет комплексной связи между ними. Далее выясним, насколько общей является рассматриваемая ситуация, т.е. при каких условиях воздействие изменения цен на спрос можно представить в виде выпуклой комбинации влияния, обусловленного стремлением сохранения структуры, во-первых, натурального спроса и, во-вторых, расходов.

Выведенные формулы для частных производных $\frac{dq_j}{dp_k}$ дают возможность провести для обеих гипотез сравнительный анализ изменения спроса при малых изменениях цен. Для удобства обозначим выражения для частных производных в соотношении (9) через $(\frac{dq_j}{dp_k})_1$, а в (10) и (11) – через $(\frac{dq_j}{dp_k})_2$. Легко заметить, что

$$\left(\frac{dq_j}{dp_k}\right)_1 > \left(\frac{dq_j}{dp_k}\right)_2 \text{ при } k \neq j; \tag{13}$$

$$\left(\frac{dq_j}{dp_j}\right)_1 < \left(\frac{dq_j}{dp_j}\right)_2.$$

Если товар j является ценным ($\frac{dq_j}{ds} > 0$), то в случае второй гипотезы его потребление упадет при увеличении цены на любой товар, т.е. $(\frac{dq_j}{dp_k})_2 < 0$. Для первой гипотезы это произойдет только тогда, когда

товар j не является необходимым ($\frac{dq_j}{ds} < 0$). В последнем случае для обеих гипотез повышение цены на какой-нибудь товар ($k \neq j$) приводит к сокращению потребления товара j , но для первой гипотезы величина изменения будет меньше, чем для второй. При повышении цены на товар j ситуация обратная, как следует из (13).

Таким образом, если потребители склонны к поддержанию структуры расходов, то спрос на какой-нибудь товар (если исключить необходимое потребление) более чувствителен (по сравнению со стремлением к поддержанию структуры натурального потребления) к изменению цены на этот товар, чем на другие, т.е. проявляется ценовая эластичность.

Анализ бюджетов обследования домашних хозяйств (БОДХ) по Псковской области с использованием MS Excel позволил подтвердить закономерности потребительского спроса.

1. Устойчивость структуры всех расходов потребителей, при условии, что доходы полностью идут на потребление. Анализ расходов домохозяйств по 10%-м группам обследуемого населения показал, что в группах с наименьшими доходами (в которых доходы практически равны расходам) структура расходов является практически неизменной. Из рис. 1 и табл. 1 видно, что в 2003-2005 гг. структура расходов 1-й децильной группы в Псковской области оставалась без изменений.

Данная закономерность объясняется тем, что в основе характеристик спроса лежит поведение потребителя. В этой связи весьма важными представляются предложения выдающегося психолога XX в. А. Маслоу [4]. По его мнению, как только у потребителя появляется какой-либо доход (в денежной или натуральной форме), он сразу получает возможность удовлетворить частично или полностью любую свою потребность и, естественно, удовлетворяет наиболее значимую для него в данный момент потребность. Если данная потребность полностью удовлетворена, а у индивидуума продолжает увеличиваться доход, он начинает удовлетворять следующую потребность за счет тех средств, которые находятся в его распоряжении.

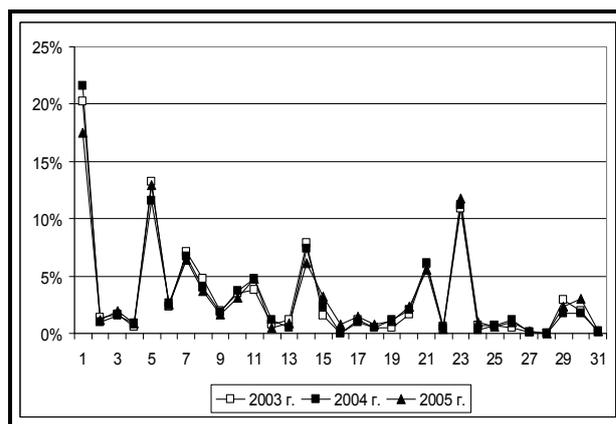


Рис. 1. Структура расходов 1-й децильной группы

Очевидно, что в группах с наименьшими располагаемыми доходами не происходит полного удовлетворения потребностей в используемых продуктах при ограниченных бюджетных возможностях. Поэтому потребители в этих группах не могут позволить себе существенного изменения структуры расходов.

Таблица 1

ПЕРЕЧЕНЬ РАСХОДОВ ДОМОХОЗЯЙСТВ

№	Продукт
1	Хлеб и хлебные продукты
2	Картофель
3	Овощи и бахчевые
4	Фрукты и ягоды
5	Мясо и мясные продукты
6	Рыба и рыбные продукты
7	Молоко и молочные продукты
8	Сахар и кондитерские изделия
9	Яйца
10	Масло растительное и другие жиры
11	Чай, кофе, безалкогольные напитки и др.
12	Питание вне дома
13	Расходы на покупку алкогольных напитков
14	Одежда, обувь, белье и ткани
15	Телерадиоаппаратура, предметы для отдыха, увлечений
16	Транспортные средства
17	Мебель, домашнее оборудование, предметы для ухода за домом
18	Строительные материалы
19	Топливо
20	Табачные изделия
21	Медицинские товары, предметы гигиены
22	Другие непродовольственные товары
23	Жилищно-коммунальные услуги
24	Другие бытовые услуги
25	Услуги учреждений культуры
26	Услуги в системе образования
27	Медицинские услуги
28	Санаторно-оздоровительные услуги
29	Услуги пассажирского транспорта
30	Услуги связи
31	Прочие услуги

2. В потребительском спросе по характеру его поведения выделяются две группы продуктов. Для их классификации можно использовать выводы Ф. Герцберга [5]. Он разделил факторы, мотивирующие человека к производительному труду, на две группы: гигиенические факторы и факторы мотивации. Первая группа факторов обеспечивает нормальный уровень условий труда и не носит мотивирующего характера. А вторая группа – мотивирует к производительному труду.

Безусловно, продукты и факторы – это совершенно разные понятия, которые нельзя смешивать. Тем не менее, в данном случае параллели при классификации групп продуктов являются весьма уместными. Продукты первой группы могут быть различными по своему составу и структуре, но они необходимы всем группам населения. Продукты этой группы удовлетворяют первичные потребности и их можно назвать «гигиеническими», а саму группу определить как группу продуктов первой необходимости.

Продукты второй группы не являются жизненно необходимыми. Структура и объем их потребления отражают социальный статус потребителя. Поэтому данная группа продуктов определяется как продукты социального статуса.

3. В структуре расходов населения четко прослеживается действие закона Энгеля: по мере роста дохода сокращается удельный вес продуктов первой необходимости и растет удельный вес продуктов социального статуса (рис. 2 и табл. 1).

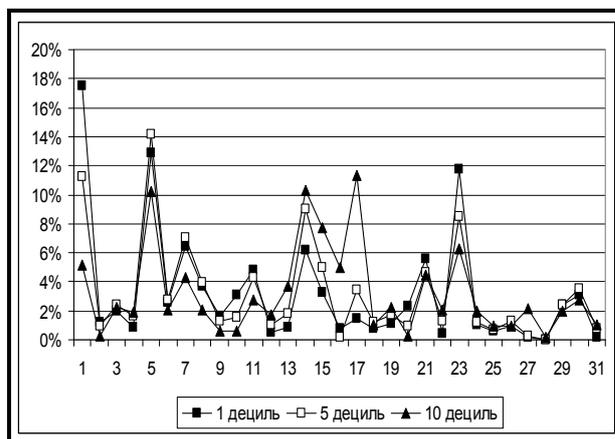


Рис. 2. Структура расходов в 2005 г.

Однако этот рост не беспределен, т.к. сумма долей на все продукты не может быть больше единицы, а на отдельные продукты социального статуса данный предел может соответствовать величине параметра a для уравнения вида

$$d = a - \frac{b}{x},$$

где

d – доля расходов на продукты социального статуса;
 x – доходы.

Правомерность использования равнобочной гиперболы $d = a - \frac{b}{x}$ для кривой Энгеля довольно легко доказать [6]. Соответственно можно определить границу величины дохода, дальнейшее увеличение которого не приводит к росту доли расходов на отдельные продукты социального статуса.

4. Продукты первой необходимости удовлетворяют базовые потребности, присутствующие в совокупности потребностей индивидуума постоянно. После появления возможности их полного удовлетворения объемы приобретения данных групп продуктов стабилизируются на некотором уровне, определяемом рациональной потребностью. Из рис. 3 видно, что с ростом доходов потребление картофеля сначала возрастает, а затем слабо зависит от дохода. Точками показаны результаты выборочных наблюдений.

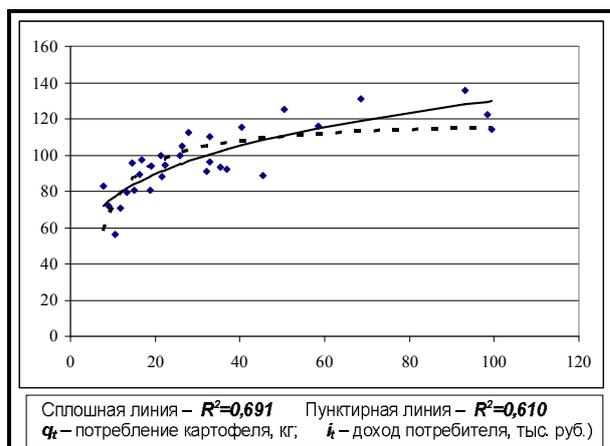


Рис. 3. Зависимость потребления картофеля от дохода потребителя

Сплошная линия на рис. 3 соответствует регрессионной зависимости с постоянной эластичностью потребления по доходу

$$q_t = 2,19 * i_t^{0,233},$$

где q_t – потребление картофеля, кг;
 i_t – дефлированный к 2003 г. доход, тыс. руб. Пунктирная линия соответствует равносторонней гиперболе

$$q_t = 119,8 - 482,3 / i_t.$$

Регрессия с постоянной эластичностью потребления картофеля по доходу лучше аппроксимирует данные наблюдений.

5. С ростом дохода потребителя начинает расти и объем приобретения продуктов социального статуса. Потребитель вполне может прожить без этих продуктов, т.к. они не затрагивают его физиологические потребности. В то же время эти продукты удовлетворяют потребности другого уровня иерархии – их потребление способствует более комфортной жизни, они определяются социальными установками потребителя, в частности, его принадлежностью к определенному социуму. Поэтому приобретение этих продуктов способствует удовлетворению возникших потребностей и возникновению других потребностей более высокого уровня. Потребление продуктов социального статуса связано с существованием альтернативы выбора, что объясняет изменение спроса на эти продукты. Из рис. 4 и табл. 1 видно, что потребители, которые не имеют бюджетных ограничений, сохраняют постоянными расходы только на продукты первой необходимости, оставшаяся часть подвержена значительным колебаниям.

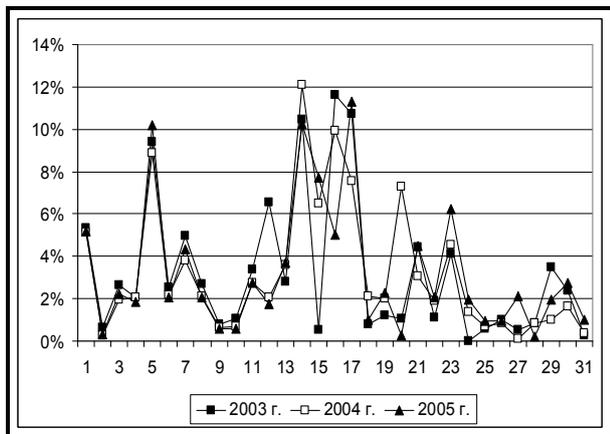


Рис. 4. Структура потребления 10-й децильной группы

6. Показателем силы связи между спросом и определяющими его факторами является коэффициент эластичности, определяемый в процентах. При изучении эластичности спроса наиболее удачной является степенная функция, поскольку ее параметры представляют собой коэффициенты эластичности по разным факторам.

В общем случае степенная функция имеет вид

$$y = a * x_1^{b_1} * x_2^{b_2} * ... * x_n^{b_n} * \epsilon.$$

Эластичность спроса по отдельным факторам определяется через частную производную как

$$\mathcal{E}_i = f'(x_i) \frac{x_i}{y}$$

для степенной функции $f'(x_i) = a * b_i * x_i^{b_i-1}$. Соответственно, частный коэффициент эластичности равен

$$\mathcal{E}_i = a * b_i * x_i^{b_i-1} * \frac{x_i}{a * x_i^{b_i}} = b_i.$$

Экономический смысл имеют не только коэффициенты b каждого фактора, но и их сумма, т.е. сумма эластичности: $B = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$. Эта величина характеризует обобщенную характеристику эластичности спроса.

Используя данные БОДХ и возможности MS Excel, в табл. 2 определены коэффициенты эластичности по цене и доходу по отдельным продуктам первой необходимости. Анализ данных табл. 2 показывает, что для количественной оценки спроса фактор дохода потребителя играет отнюдь не меньшую роль, чем цена.

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ПО ЦЕНЕ И ПО ДОХОДУ ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ ПЕРВОЙ НЕОБХОДИМОСТИ (по данным БОДХ в Псковской области)¹

Продукт	Эластичность по цене	Ст. откл.	Критерий Стьюдента	Эластичность по доходу	Ст. откл.	Критерий Стьюдента	Козфф. детерминации R ²
	Ep	Sep	t	Ei	Sei	t	
Картофель	-0,226	0,099	-2,277	0,306	0,051	5,977	0,577
Масло	-0,260	0,158	-1,651	0,294	0,022	13,121	0,867
Яйца	-0,568	0,180	-3,148	0,449	0,030	14,751	0,899
Хлеб	0,035	0,030	1,174	0,194	0,020	9,879	0,838
Фрукты	-0,991	0,078	-12,690	1,236	0,072	17,241	0,918
Сахар	-0,387	0,123	-3,139	0,551	0,044	12,625	0,904
Рыба	-0,351	0,241	-1,459	0,674	0,071	9,490	0,921
Овощи	-0,046	0,162	-0,287	0,491	0,088	5,590	0,892
Мясо	-1,031	0,036	-28,922	0,834	0,030	27,951	0,982
Молоко	-0,116	0,058	-1,983	0,553	0,040	13,753	0,876

Для сравнения в табл. 3 показана сила зависимости спроса от цены в Болгарии. Из табл. 3 видно, что все продукты являются неэластичными, но этнические особенности оказывают влияние на их значения.

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕНОВОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ПРОДУКТАМ ПЕРВОЙ НЕОБХОДИМОСТИ В БОЛГАРИИ [7]

Группы продуктов	Хлеб	Картофель	Овощи	Фрукты	Мясо	Молоко	Яйца	Сахар	Масло	Прочие
Хлеб	-0,13	0,00	-0,01	-0,01	-0,03	-0,02	0,00	-0,01	-0,01	-0,02
Картофель	-0,07	-0,38	-0,04	-0,03	-0,11	-0,07	-0,02	-0,03	-0,03	-0,06
Овощи	-0,06	-0,01	-0,33	-0,02	-0,09	-0,06	-0,01	-0,03	-0,02	-0,05
Фрукты	-0,06	-0,01	-0,04	-0,34	-0,09	-0,06	-0,01	-0,03	-0,02	-0,05
Мясо	-0,04	0,00	-0,03	-0,02	-0,30	-0,04	-0,01	-0,02	-0,02	-0,04
Молоко	-0,02	0,00	-0,01	-0,01	-0,03	-0,12	0,00	-0,01	-0,01	-0,02
Яйца	-0,03	0,00	-0,02	-0,01	-0,05	-0,03	-0,017	-0,02	-0,01	-0,03
Сахар	-0,03	0,00	-0,02	-0,01	-0,05	-0,03	-0,01	-0,17	-0,01	-0,03
Масло	-0,02	0,00	-0,01	-0,01	-0,03	-0,02	0,00	-0,01	-0,10	-0,02
Прочие	-0,06	-0,01	-0,04	-0,02	-0,10	-0,06	-0,01	-0,03	-0,02	-0,37

Далее проанализируем силу связи между спросом и ценой более детально (табл. 4). Из табл. 4 видно, что наиболее чувствительны к изменениям цен группы с низкими доходами.

¹ Расчеты автора.

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ПО ЦЕНЕ ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ ПЕРВОЙ НЕОБХОДИМОСТИ (по данным БОДХ в Псковской области)²

Группы продуктов	Группы населения, имеющие доходы					
	Низкие		Средние		Высокие	
	Эласт.	Критерий Стьюдента, t	Эласт.	Критерий Стьюдента, t	Эласт.	Критерий Стьюдента, t
Картофель	-0,411	-2,229	-0,297	-1,922	0,239	2,873
Масло	-0,771	-2,323	-0,451	-1,618	0,061	0,200
Яйца	-0,325	-1,199	-0,009	-0,085	-1,250	-3,004
Хлеб	-0,371	-2,924	-0,582	-2,611	0,051	1,569
Фрукты	-0,998	-8,824	-0,982	-12,506	-0,972	-12,599
Сахар	-0,633	-3,270	-0,461	-2,724	-0,198	-1,253
Рыба	-0,622	-1,560	0,009	0,022	-0,813	-1,029
Овощи	-0,509	-4,195	0,127	0,431	0,201	0,780
Мясо	-0,704	-0,956	-0,986	-41,091	-0,117	-0,390
Молоко	-1,636	-5,460	-0,055	-1,448	-0,542	-1,499

В табл. 5 показана сила зависимости между спросом и доходом потребителей в разрезе разных социальных групп.

Таблица 5

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ПО ДОХОДУ ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ ПЕРВОЙ НЕОБХОДИМОСТИ (по данным БОДХ в Псковской области)³

Группы продуктов	Группы населения, имеющие доходы					
	Низкие		Средние		Высокие	
	Эласт.	Кoeff. детерминации, R ²	Эласт.	Кoeff. детерминации, R ²	Эласт.	Кoeff. детерминации, R ²
Картофель	0,483	0,557	0,328	0,272	0,080	0,733
Масло	0,353	0,88	0,248	0,532	0,361	0,605
Яйца	0,925	0,964	0,336	0,860	0,540	0,783
Хлеб	0,381	0,94	0,181	0,449	0,273	0,744
Фрукты	1,903	0,958	1,149	0,941	1,281	0,988
Сахар	0,667	0,929	0,513	0,636	0,465	0,947
Рыба	1,011	0,931	0,404	0,520	1,248	0,891
Овощи	0,955	0,979	0,150	0,274	0,282	0,847
Мясо	1,036	0,968	0,968	0,995	0,550	0,948
Молоко	1,141	0,967	0,386	0,632	0,769	0,902

Для сравнения в табл. 6 показаны коэффициенты эластичности спроса по доходу в Болгарии.

Таблица 6

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА ПО ДОХОДУ ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ ПЕРВОЙ НЕОБХОДИМОСТИ В БОЛГАРИИ [7]

Группы продуктов	Все население		Группы населения, имеющие доходы					
			Низкие		Средние		Высокие	
	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²
Хлеб	0,396	0,766	0,411	0,806	0,437	0,596	0,369	0,397
Картофель	1,395	0,698	1,517	0,785	1,447	0,744	1,116	0,548
Овощи	1,116	0,836	1,400	0,880	0,996	0,911	0,872	0,818
Фрукты	1,176	0,921	1,437	0,934	1,098	0,978	0,935	0,953
Мясо	0,862	0,959	0,911	0,983	0,665	0,973	0,447	0,870

² Расчеты автора.

³ Расчеты автора.

Группы продуктов	Все население		Группы населения, имеющие доходы					
			Низкие		Средние		Высокие	
	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²	Эласт.	Кoeff. детерм., R ²
Молоко	0,389	0,652	0,518	0,658	0,125	0,145	-0,114	0,171
Яйца	0,62	0,653	0,542	0,523	0,400	0,376	0,406	0,223
Сахар	0,569	0,388	0,561	0,693	0,379	0,538	0,516	0,055
Масло	0,365	0,584	0,432	0,583	0,263	0,354	0,213	0,177
Прочие	1,183	0,982	1,236	0,985	1,177	0,986	1,118	0,979

Поскольку связь между спросом и определяющими его факторами – ценой и доходами – описывается при помощи степенной функции, которая имеет вид, представленный на рис. 3 (сплошная линия), то можно говорить, что, начиная с некоторых значений, предельное потребление по доходу стремится к нулю при увеличении дохода.

Литература

1. Липе П. Экономическая статистика. – Висбаден: Федеральное статистическое управление, 1995.
2. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика. – 2-е изд., испр. – СПб.: Экономическая школа, 1996.
3. Беляевский И.К. Маркетинговые исследования: информация, анализ, прогноз. – М.: Финансы и статистика, 2004.
4. Маслоу А. Мотивация и личность. – СПб.: Евразия, 1999.
5. Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. – М.: Дело, 1993.
6. Лизер С. Эконометрические методы и задачи: Пер. с англ. – М.: Статистика, 1971.
7. Mishev P., Tzoneva M., Ivanova N. Food Demand in Bulgaria over the Transition Period. Options Méditerranéennes – Série B – n°22, Agricultural price reform under transition in Bulgaria, Romania and Slovenia, p. 109-119, 1996.

Егорова Светлана Евгеньевна

РЕЦЕНЗИЯ

Для качественного обоснования прогнозных значений спроса субъектам рыночных отношений необходима достоверная информация о текущем состоянии конъюнктуры рынка. Она складывается из множества единичных элементов и действий, развитие которых подчиняется вероятностным законам, и характеризуется определенным кругом качественных и количественных признаков, поддающихся измерению и оценке. Эти особенности конъюнктуры делают результативным широкое использование соответствующей статистической информации.

Обработка статистической информации позволила провести автору моделирование потребительского спроса и выявить его важнейшие закономерности: устойчивость структуры всех расходов потребителей, при условии, что доходы полностью идут на потребление; выделение в потребительском просе двух групп продуктов – продуктов первой необходимости и продуктов социального статуса; действие закона Энгеля в структуре расходов населения; продукты первой необходимости удовлетворяют базовые потребности, присутствующие в совокупности потребностей индивидуума постоянно, и после появления возможности их полного удовлетворения объемы приобретения данных групп продуктов стабилизируются на некотором уровне, определяемом рациональной потребностью; с ростом дохода потребителя начинает расти и объем приобретения продуктов социального статуса; показателем силы связи между спросом и определяющими его факторами является коэффициент эластичности.

К числу достоинств статьи можно отнести сочетание как достаточно высокого уровня использования экономико-математических методов для изучения потребительского спроса, так и наличие анализа бюджетов обследования домашних хозяйств (БОДХ) по Псковской области с использованием MS Excel.

Считаю, что данная статья выполнена на высоком профессиональном уровне. Настоящую рукопись статьи целесообразно рекомендовать к изданию.

Николаев М.А., д.э.н., профессор, зав. кафедрой финансов и кредита Псковского государственного политехнического института

3.7. THEORETICAL AND PRACTICAL ASPECTS OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL ANALYSIS OF CONSUMER DEMAND

S.E. Egorova, Candidate of Science (Economic), Docent, the Pskov State Polytechnic Institute, Accounting and Audit Department

The availability of the statistical information on a market situation makes it possible to simulate the consumer demand and find out the most important objective laws governing the demand. The MS Excel-aided analysis of the Pskov Region household budgets has confirmed the objective laws governing the consumer demand revealed by the survey.

Literature

1. Lipe Piter. Economic Statistics. – Visbaden: Federal Statistic Administration, 1995, p.516-517.
2. V.M. Galperin, S.M. gnatyev, V.I. Morgunov. Microeconomics. Second edition, revised.- St.Petersburg: Economicheskaya shkola, 1996, p.125-128.
3. I.K. Belyaevsky. Marketing Research: Information, Analysis, Forecast. – M.: Financy and statistika, 2004, p. 220.
4. A. Maslow. Motivation and Personality. St. Petersburg : Evraziya, 1999, p.77-96.
5. M.Meskon, M.Albert, F.Hedowry. Fundamentals of Management. M.: Delo, 1993.
6. S. Lizer Econometric Methods and Tasks : Translated from English. – M.: Statistika, 1971. – p.94.
7. P. Michev, M. Tzoneva, N. Ivanova. Food Demand in Bulgaria over the Transition Period. Options Medeterraneennes – Serie B – n^o 22, Agricultural price reform under transition in Bulgaria, Romania and Slovenia, p. 109-119, 1996.