

4.2. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФИРМ ПО РАЗМЕРАМ И ЗАРАБОТНЫМ ПЛАТАМ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОТНИКОВ ПО НАКОПЛЕННЫМ АКТИВАМ И ЗАРАБОТНЫМ ПЛАТАМ

Соколов П.И., аспирант кафедры «Математические методы анализа экономики» экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В работе предлагается модель, описывающая взаимодействие большого числа неоднородных экономических агентов (фирм и индивидуумов) в динамике. Такой подход позволяет в явном виде описать взаимодействие микро- и макроуровней экономики. С другой стороны, данная модель может быть классифицирована как вычислимая, но, в отличие от прочих моделей такого рода, учитывает поведение отдельных экономических агентов в терминах распределений. Модель позволяет строить прогнозы по реальным данным, но с использованием не просто временных рядов, а более детальные, с использованием временных рядов панельных данных. Запись модельных соотношений в виде системы дифференциальных уравнений дает возможность для анализа модельной динамики методами теории динамических систем.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно модели макроэкономической динамики описывают изменение во времени некоторых агрегированных экономических показателей (ВВП, уровень цен и т.д.). Современные модели такого рода в изобилии встречаются в научной литературе (Занг, 1999; Николаев, 2003; Балацкий, 2005; Накоряков, Гасенко, 2002). Однако чтобы описать более тонкие экономические закономерности, необходимы более детализированные модели. Известны несколько направлений такой детализации.

Модели межотраслевого баланса описывают отраслевую структуру экономики и пригодны для практических расчетов (Пителин, 2007).

Развивается направление пространственного моделирования (Пу, 2000). Теоретические модели такого рода описывают распределение (в географическом смысле) экономической активности (в терминах цен, потоков товаров, интенсивности производственных процессов и т.д.) по некоей области. Следует отметить, что возможность практического применения таких моделей весьма спорна как в силу сугубо теоретической направленности этих работ, так и вследствие того, что существенность эффектов пространственного распределения ставится под сомнение соответствующими исследованиями по анализу реальных данных (Глущенко, 2001). Существуют также межотраслевые модели, учитывающие пространственное расположение субъектов экономической деятельности (Коваленко, 2001).

Весьма перспективными выглядят модели, учитывающие разнородность по какому-либо признаку группы экономических агентов, например распределение фирм по размерам (Мазуркин, 2001; Мустафин, Кантарбаева, 2000) или относительную численность возрастных групп на рынке труда (ван Виссен, Попков, Попков, 2004). Такие модели позволяют в явном виде описать конкуренцию разнородных агентов на каком-либо рынке.

Динамика конкретной экономики зависит, с одной стороны, от взаимодействия взаимосвязанных рынков (рынка потребительской продукции, рынка труда, рынка капитала и т.д.), а с другой – от взаимодействия разнородных экономических агентов (фирм и индивидуумов) на конкретных рынках. Модель, изложению которой посвящена данная работа учитывает оба этих взаимодействия. Подобный подход (моделирование «всего»)

представляется перспективным с теоретической точки зрения, так как такая модель фактически связывает описание микро- и макроуровней экономики, а также с практической, поскольку позволит учитывать в расчетах информацию по каждому рынку с произвольной степенью детализации.

Одной из актуальных проблем современной экономики является развитие методов, позволяющих определять последствия различных воздействий на конкретную экономическую систему. Эти методы требуют построения моделей, описывающих экономическую динамику на макроуровне, и в то же время способных учесть неоднородность экономических агентов. Такие модели получили название вычислимых моделей общего экономического равновесия (computable general equilibrium models). Основным недостатком имеющихся моделей такого рода является трудность формализации: модели, зачастую, не могут быть выражены в виде набора математических уравнений и требуют написания специальных компьютерных программ, что делает невозможным анализ моделей хорошо развитыми методами математической теории динамических систем. Модель, предлагаемая в данной работе, лишена этого недостатка, хотя уравнения модели и представляются весьма сложными для анализа.

1. МОДЕЛЬ

1.1. Схема воспроизводства

Опишем общее представление о функционировании экономики на макроуровне, которое лежит в основе предлагаемой модели. Рассматривается закрытая однопродуктовая экономика, состоящая из населения и фирм. Все население является трудоспособным. Численность населения не меняется со временем. Каждый индивидуум является собственником некоторого количества активов (сбережений). Предполагается, что эти активы можно без издержек преобразовать в оборудование или потратить на оплату труда работников. Активы распределяются между имеющимися в экономике фирмами, то есть каждый индивидуум получает долю собственности в производственном секторе. Каждая фирма принимает решения о том, какую часть полученных активов использовать в производстве в качестве оборудования, а какую – в качестве оплаты труда работников (то есть решает, сколько работников следует нанять и какую заработную плату им платить). С этими решениями фирмы выходят на рынок труда, где каждая фирма нанимает некоторое число работников. Рынок труда разделен по ставкам заработной платы, то есть спрос на труд и предложение труда рассматриваются отдельно для каждой ставки. При этом каждый работник регулярно принимает решение о том, на какой из этих рынков выходить. Определившись с числом нанятых работников, фирмы производят некоторое количество продукции, формируя тем самым предложение на рынке потребительской продукции. Суммарный платежеспособный спрос на этом рынке равен суммарному вознаграждению работников за труд. Спрос на продукцию каждой фирмы одинаков, цена продукции также одинакова для всех фирм и является экзогенным параметром модели. В зависимости от соотношения спроса и объема произведенной продукции, каждая фирма получает ту или иную выручку. Собственники активов, вложившие свои средства в фирмы, владеют и этой выручкой, и оборудованием, имеющимся у фирм. Они (собственники) перераспределяют свои активы в пользу наиболее эффективных фирм. Показателем эффективности деятельности фирм считается отношение выручки к капиталу, вложенному в фирму. То есть капитал перераспре-

деляется в пользу тех фирм, у которых наибольшее значение имеет отношение выручки к капиталу.

1.2. Основные переменные и уравнения

Для формального описания предложенной воспроизводственной схемы введем в рассмотрение распределение индивидуумов $I_s(a, w, t)$ по величине накопленных активов (сбережений) a и различным трудовым рынкам, каждому из которых соответствует своя ставка оплаты труда w . Будем рассматривать также распределение фирм $n(k, w, t)$ по величине имеющегося капитала k и уровню вознаграждения работников w .

Соответственно, $I_s(a, w, t)dadw$ – это численность тех индивидуумов, которые в момент t имеют характеристики в пределах области $(a, a + da] * (w, w + dw]$, то есть накопили активов не меньше a и не больше

$a + da$, и предлагают свои услуги на трудовых рынках, соответствующих ставкам оплаты труда не меньше w и не больше $w + dw$.

Предполагается, что характеристики любой фирмы или индивидуума a, w, k заведомо ограничены и принимают значения на множествах $A = (0; A)$, $W = (0; W)$, $K = (0; K)$, где A, W, K – положительные экзогенные параметры.

Для вывода уравнений, описывающих динамику распределений индивидуумов и фирм, воспользуемся двумерным вариантом метода, использованного в (Мустафин, Кантарбаева, 2000). Именно, обозначим скорость роста активов индивидуумов через $f_a(a, w, t)$, а скорость роста их заработной платы – через $f_w(a, w, t)$. При отсутствии роста и выбытия населения, изменение относительной численности индивидуумов, чьи активы и заработная плата находятся в пределах области $(a, a + da] * (w, w + dw]$, представляет собой разность между теми, кто «покинул» эту область вследствие роста заработной платы или активов (или и того и другого) и теми, кто «пришел» в нее:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} = & \left(\int_w^{w+dw} \int_a^{a+da} I_s(a, w, t) f_a(a, w, t) dw da \right) - \\ & - \left(\int_w^{w+dw} \int_a^{a+da} I_s(a + da, w, t) f_a(a + da, w, t) dw da \right) + \\ & + \left(\int_a^{a+da} \int_w^{w+dw} I_s(a, w, t) f_w(a, w, t) da dw \right) - \\ & - \left(\int_a^{a+da} \int_w^{w+dw} I_s(a, w + dw, t) f_w(a, w + dw, t) da dw \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Откуда:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} = & - \left(\int_a^{a+da} \int_w^{w+dw} \frac{\partial(I_s(a, w, t) f_a(a, w, t))}{\partial a} dw da \right) - \\ & - \left(\int_a^{a+da} \int_w^{w+dw} \frac{\partial(I_s(a, w, t) f_w(a, w, t))}{\partial w} dw da \right). \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, по смыслу, изменение относительной численности работников с заработной платой и активами в пределах рассматриваемой области можно записать иначе:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \int_a^{a+da} \int_w^{w+dw} \frac{\partial I_s(a, w, t)}{\partial t} dw da. \quad (3)$$

Приравнявая правую часть этого уравнения к правой части (2) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_s(a, w, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial(I_s(a, w, t) f_a(a, w, t))}{\partial a} - \\ & - \frac{\partial(I_s(a, w, t) f_w(a, w, t))}{\partial w}. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичным образом можно получить уравнение для распределения фирм по величине имеющегося капитала k и уровню вознаграждения работников w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(k, w, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial(n(k, w, t) g_k(k, w, t))}{\partial k} - \\ & - \frac{\partial(n(k, w, t) g_w(k, w, t))}{\partial w}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$g_k(k, w, t)$ – скорость роста капитала фирм;

$g_w(k, w, t)$ – скорость роста оплаты труда работников фирм.

Как видно из раздела 1.1, в модели рассматриваются рынок труда и рынок капитала. При этом для каждой ставки w рынок труда свой. Из введенных выше функций f_a, f_w, g_k, g_w , функция $f_w(a, w, t)$ отражает решения работников относительно того, на каком из трудовых рынков сосредоточить внимание, а $g_w(k, w, t)$ – решения фирм относительно того, как оплачивать труд нанимаемых работников. Что касается $f_a(a, w, t)$ и $g_k(k, w, t)$, то эти функции «отвечают» за процессы накопления и перераспределения капитала. Дальнейшие разделы будут посвящены последовательному выводу этих функций.

2. РЫНОК ТРУДА

2.1. Взаимодействие спроса и предложения на рынке труда

В модели существует свой рынок труда для каждой ставки оплаты труда. Обозначим распределение рыночного предложения труда по трудовым рынкам, характеризующимся различными ставками w через $\bar{I}_s(w, t)$. Распределение $\bar{I}_s(w, t)$ получается, очевидно, суммированием всех работников, выбравших в данный момент данный трудовой рынок, независимо от величины накопленных ими активов:

$$\bar{I}_s(w, t) = \int_A I_s(a, w, t) da. \quad (6)$$

Обозначим распределение удельного спроса на труд со стороны фирм (то есть спроса на труд «единицы производственного сектора») через $I_D(k, w, t)$. Тогда для распределения общего спроса на труд $\bar{I}_D(w, t)$, справедливо

$$\bar{I}_D(w, t) = \int_K (n(k, w, t) * I_D(k, w, t) dk). \quad (7)$$

Обозначим распределение удельного предложения труда фирмам (то есть предложения труда на «единицу производственного сектора») через $I'_s(k, w, t)$. В реальности, рыночное предложение на трудовом рынке со ставкой w будет неким образом распределено между фирмами, готовыми платить w . На уровне данной

модели невозможно описать, сколько именно работников предложат свои услуги каждой отдельной фирме, поскольку это зависит от огромного числа факторов, рассмотрение которых выходит за рамки данной модели. Однако со статистической точки зрения обоснованным является допущение, согласно которому рыночное предложение на трудовом рынке со ставкой w будет распределено между фирмами, готовыми платить w равномерно, ведь для фирм все работники, желающие получать w , одинаковы, а для работников одинаковы все фирмы, готовые платить w . Это допущение будет использовано не только для вывода удельного предложения труда фирмам $I_s^f(k, w, t)$, но также и в других ситуациях, связанных с описанием перехода от рыночного спроса (предложения) к удельному (формула (12), разделы 3.1 и 4.1):

$$I_s^f(k, w, t) * n(k, w, t) = \frac{\bar{I}_s(w, t)}{I_d(w, t)}. \quad (8)$$

Из (8) с учетом (6) и (7) получим:

$$I_s^f(k, w, t) = \frac{\int_A I_s(a, w, t) da}{\int_K (n(k, w, t) * I_d(k, w, t) dk)} * \frac{1}{n(k, w, t)}. \quad (9)$$

Каждая фирма наймет работников не больше, чем ей предлагается, и не больше, чем она считает нужным. Поэтому фирмы, чьи характеристики находятся в пределах области $(k, k + dk] * (w, w + dw]$, за время $(t; t + dt)$ наймут

$$\min(I_s^f(k, w, t), I_d(k, w, t)) dk dw dt \quad (10)$$

работников.

Следовательно, распределение общего заработка работников по ставкам w описывается функцией

$$\int_K (\min(I_s^f(k, w, t), I_d(k, w, t)) * n(k, w, t) * w dk). \quad (11)$$

Так как в модели нет средств для проведения различий между работниками, желающими наняться по ставке w , а спрос на труд не обязательно будет равен предложению, примем в качестве модельного допущения, что общий заработок нанятых на рынке со ставкой w равномерно распределяется по всем работникам, предлагающим свой труд на этом рынке. Распределение этого заработка обозначим $v(a, w, t)$.

С учетом (11) имеем:

$$v(a, w, t) = \frac{\int_K (\min(I_s^f(k, w, t), I_d(k, w, t)) * n(k, w, t) * w dk)}{I_s(a, w, t)}. \quad (12)$$

Введенные в этом разделе распределения $I_s^f(k, w, t)$ и $v(a, w, t)$ будут использоваться при описании того, как фирмы меняют ставки оплаты труда и как решают вопрос об использовании привлеченных средств в производстве (разделы 2.2 и 2.3). Кроме того, распределение заработка населения $v(a, w, t)$ будет использоваться при описании механизма формирования сбережений населения и спроса на потребительскую продукцию (разделы 3.1 и 4.1).

Распределения совокупного спроса на труд и предложения труда $\bar{I}_s(w, t)$ и $\bar{I}_d(w, t)$ понадобятся при описании того, как формируется предложение труда на каждом конкретном трудовом рынке (раздел 2.4).

2.2. Механизм изменения фирмами ставки оплаты труда

Если спрос на труд со стороны данной фирмы превышает предложение ей труда, то фирма повысит заработную плату, и наоборот. При взаимодействии с рынком труда фирма проявляет определенную осторожность, поэтому изменение ставки заработной платы w в единицу времени не может превысить величины $a_w * w$, где $a_w \in (0; 1)$ – экзогенный параметр. При описании соотношения спроса и предложения (в частности, на рынке труда) удобно пользоваться следующим показателем:

$$c_i = \frac{I_d(k, w, t) - I_s^f(k, w, t)}{I_d(k, w, t) + I_s^f(k, w, t)}, \quad (13)$$

где: $I_s^f(k, w, t)$ – предложение труда данной фирме;

$I_d(k, w, t)$ – спрос на труд со стороны данной фирмы.

Преимущество этого показателя состоит в том, что при положительных I_s^f и I_d $c_i \in (-1; 1)$. Причем если предложение труда превышает спрос, $c_i \rightarrow 1$; если спрос на труд превышает предложение, $c_i \rightarrow -1$; если же рынок в равновесии, то $c_i = 0$. Используя c_i , решение фирмы относительно заработной платы можно выразить так:

$$g_w(k, w, t) = c_i * a_w * w \quad (14)$$

или (с учетом (14))

$$g_w(k, w, t) = \frac{I_d(k, w, t) - I_s^f(k, w, t)}{I_d(k, w, t) + I_s^f(k, w, t)} * a_w * w. \quad (15)$$

Функция g_w представляет собой распределение скорости роста заработной платы. Она показывает, как быстро и в каком направлении (увеличения или снижения) фирмы меняют ставку оплаты труда, в зависимости от своих характеристик (k и w). В разделе 6, при сведении всех промежуточных результатов в основные модельные уравнения, выражение (15) будет подставлено в уравнение (5).

2.3. Формирование спроса на труд

Предполагается, что каждая фирма самостоятельно выбирает, какое количество трудового ресурса ей нужно в данный момент времени. Этот выбор является частью более общей задачи фирмы. Задача фирмы заключается в том, что имея в качестве входных параметров привлеченный капитал k и выбранную указанным в предыдущем разделе способом ставку оплаты труда w , фирма должна выбрать желаемое количество работников I_d и решить, какую часть k_n имеющегося капитала задействовать в производстве в качестве основных средств. Ограничение фирмы по издержкам имеет вид:

$$k = k_n + I_d * w. \quad (16)$$

Считая, что фирма стремится увеличить свою долю на рынке и действует технологически эффективно, выбор k_n и I_d можно представить как решение следующей оптимизационной задачи:

$$F(k_n, I_D) \rightarrow \max_{k_n, I_D}; \quad (17)$$

$$k = k_n + I_D * w. \quad (18)$$

Для производственной функции Кобба-Дугласа вида $F(k_n, I_D) = (k_n)^\alpha (I_D)^\beta$, функция Лагранжа задачи (17)–(18) имеет вид:

$$L = (k_n)^\alpha (I_D)^\beta + \lambda (k - k_n - I_D * w). \quad (19)$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial k_n} = \alpha (k_n)^{\alpha-1} (I_D)^\beta - \lambda = 0; \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial I_D} = \beta (k_n)^\alpha (I_D)^{\beta-1} - \lambda w = 0. \quad (21)$$

Поделив (20) на (21), получим:

$$\frac{\alpha I_D}{\beta k_n} = \frac{1}{w}; \quad (22)$$

$$k_n = \frac{\alpha}{\beta} I_D w. \quad (23)$$

Из (18) с учетом (23) получаем:

$$k = \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) I_D w; \quad (24)$$

$$I_D w = k \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \quad (25)$$

Из (24) получаем (непосредственно, и подставляя в (18)):

$$k_n = k \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad I_D = \frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \quad (26)$$

Поскольку предложение труда данной фирме в общем случае не совпадает с ее спросом на труд, фирма фактически наймет не желаемое количество работников I_D , а $\min(I_D, I_s^f)$. В случае $I_D > I_s^f$ у фирмы, согласно формулам (26), появляется излишек ресурса k . При предположении о технологической эффективности фирма использует в производстве все доступные ей ресурсы, следовательно, формулы (26) нужно изменить с учетом того факта, что спрос фирмы на труд может не совпасть с предложением ее труда. Для этого используем ограничение (18), подставив в него $\min(I_D, I_s^f)$

вместо I_D :

$$k_n = k - \min(I_D, I_s^f) * w. \quad (27)$$

Эта формула дает выражение для k_n , при известном спросе на труд I_D . Выражение же для I_D не меняется:

$$I_D = \frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \quad (28)$$

Уравнения (27)–(28) описывают выбор фирмой желаемой комбинации факторов производства. С точки зрения всей модели, этот выбор представляет собой два распределения: распределение используемых в производстве основных средств $k_n(k, w, t)$ и распределение спроса фирм на труд $I_D(k, w, t)$:

$$I_D(k, w, t) = \frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta}; \quad (29)$$

$$k_n(k, w, t) = k - \min\left(\frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta}, I_s^f(k, w, t)\right) * w. \quad (30)$$

Спрос фирм на труд, определяемый выражением (29), уже использовался ранее. Что касается (30), то описываемое этой формулой распределение $k_n(k, w, t)$ будет использовано при описании процесса перераспределения капитала в разделе 4.2.

2.4. Формирование предложения труда

Предполагается, что привлекательность для работника данной ставки w связана, во-первых, с самой величиной w , а во-вторых – с тем, насколько легко устроиться на работу с данной ставкой (то есть с соотношением спроса на труд и предложения труда при данной ставке). При этих предположениях можно считать, что распределение «привлекательности» рынков труда с точки зрения работников определяется некоей функцией

$$g(w) = g\left(\frac{\bar{I}_D(w, t)}{\bar{I}_S(w, t)}, w\right). \quad (31)$$

При конкретной ставке w , эта функция зависит от рыночного предложения труда ($\bar{I}_S(w, t)$), рыночного спроса на труд ($\bar{I}_D(w, t)$) и от самой

этой ставки. Чем больше величина $\frac{\bar{I}_D(w, t)}{\bar{I}_S(w, t)}$, то есть чем

сильнее на трудовом рынке со ставкой w рыночный спрос превышает предложение, и чем выше сама ставка w , тем большим должно быть значение $g(w)$. Эта естественная закономерность будет иметь место, если по-

требовать, чтобы функция $g\left(\frac{\bar{I}_D(w, t)}{\bar{I}_S(w, t)}, w\right)$ возрастала по

обоим аргументам.

При таком подходе распределение предложения труда по рынкам с различными ставками $\bar{I}_S(w, t)$ должно, очевидно, стремиться стать идентичным распределению $g(w)$. Это должно иметь место, так как работники будут «перетекать» с менее привлекательных трудовых рынков на более привлекательные. Математически эту закономерность можно выразить уравнением, в котором для любой ставки w предложение труда в области $(w; w + dw]$ равно $\bar{I}_S(w, t)dw$,

изменяется так, чтобы доля $\frac{\bar{I}_S(w, t)dw}{\int_w \bar{I}_S(w, t)dw}$ стала равной

соответствующей доле «привлекательности» $\frac{g(w)dw}{\int_w g(w)dw}$. Этим соображениям отвечает уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}_S(w, t)}{dt} = \\ = \left(\frac{g(w)}{\int_w g(w)dw} * \int_w \bar{I}_S(w, t)dw - \bar{I}_S(w, t) \right) \eta_w. \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку это верно для любой ставки w , можно записать:

$$f_w(a, w, t) = \left(\frac{g(w)}{\int_w g(w)dw} * \int_w (I_s(w, t)dw) - I_s(w, t) \right) \eta_w. \quad (32)$$

Введенная в этом разделе формула (32) описывает перераспределение работников между различными трудовыми рынками. Функция f_w представляет собой распределение скорости роста (или падения) той ставки оплаты труда, на которую претендует соответствующая часть работников. Формула (32) будет использоваться в разделе 6, для подстановки в основное модельное уравнение (4).

3. РЫНОК ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ ПРОДУКЦИИ

3.1. Спрос на потребительскую продукцию

В модели рассматривается однопродуктовая экономика. Поскольку предполагается, что цена продукции p задается экзогенно, одинакова для каждой фирмы и постоянна во времени, для потребителей нет признаков, по которым они могут проводить различия между фирмами. В таких условиях естественным модельным допущением будет предположение о равномерном распределении спроса по всему производственному сектору. Обозначим общий спрос через $\bar{D}(t)$. Тогда:

$$\bar{D}(t) = \int_{KW} d(t) * n(k, w, t) dkdw, \quad (33)$$

где

$d(t)$ – удельный спрос (не зависящий от фирмы);

$n(k, w, t)$ – распределение фирм.

Из (33) следует:

$$d(t) = \frac{\bar{D}(t)}{\int_{KW} n(k, w, t) dkdw}. \quad (34)$$

Общий объем платежеспособного спроса $\bar{D}(t)$ равен общему заработку работников, за вычетом сбережений. При экзогенной норме сбережения s , имеем:

$$\bar{D}(t) = (1 - s) \int_{AW} v(a, w, t) * I_s(a, w, t) dadw. \quad (35)$$

Следовательно, с учетом (33):

$$d(t) = \frac{(1 - s) \int_{AW} v(a, w, t) * I_s(a, w, t) dadw}{\int_{KW} n(k, w, t) dkdw}. \quad (36)$$

Формула (36), описывающая удельный спрос на продукцию фирм, будет использоваться для определения выручки фирм в разделах 3.2 и 5.

3.2. Предложение на рынке потребительской продукции

Выручка репрезентативной фирмы (k, w, t) зависит от спроса на ее продукцию и от величины ее выпуска:

$$B(k, w, t) = \min(d, p * Q(k, w, t)), \quad (37)$$

где

d – спрос на продукцию соответствующей фирмы (одинаков для всех фирм);

$Q(k, w, t)$ – распределение выпуска фирм.

Выпуск зависит от производственной функции (F) и доступных фирме ресурсов:

$$Q(k, w, t) = F(k_n, \min(I_d(k, w, t), I'_s(k, w, t))). \quad (38)$$

Подставляя это в (37), получим:

$$B(k, w, t) = \min(d, p * F(k_n, \min(I_d(k, w, t), I'_s(k, w, t)))). \quad (39)$$

Последняя формула описывает распределение выручки фирм и будет использоваться при описании динамики активов населения и перераспределения капитала в разделе 5.

4. РЫНОК КАПИТАЛА

4.1. Активы населения

В модели предполагается, что все активы населения вложены в производственный сектор. Взаимоотношения собственников активов (населения) с фирмами строятся по следующей схеме: собственники вкладывают свои активы в фирмы; затем фирмы используют эти активы в производстве, возвращая собственникам активов всю выручку; затем собственники снова вкладывают свои активы в фирмы и так далее. При такой схеме на изменение во времени общего объема активов населения влияет, во-первых, изменение во времени выручки производственного сектора, а во-вторых – сбережений населения.

Для суммарной выручки всего производственного сектора $\bar{B}(t)$ справедливо:

$$\bar{B}(t) = \int_{KW} n(k, w, t) * B(k, w, t) dkdw. \quad (40)$$

Совокупные активы населения обозначим через $\bar{a}(t)$.

При этом:

$$\bar{a}(t) = \int_{AW} a * I_s(a, w, t) dadw. \quad (41)$$

При экзогенной норме сбережения s и распределении заработка населения, описываемом функцией $v(a, w, t)$, совокупные сбережения населения равны:

$$\bar{S}(t) = s * \int_{AW} v(a, w, t) * I_s(a, w, t) dadw. \quad (42)$$

Изменение общего объема активов населения совпадает с изменением суммарного капитала производственного сектора. Обозначим этот суммарный капитал через $\bar{K}(t)$. Тогда:

$$\bar{K}(t) = \int_{KW} k * n(k, w, t) dkdw; \quad (43)$$

$$\frac{d\bar{K}(t)}{dt} = (1 - \delta)\bar{K}(t) + \bar{B}(t) + \bar{S}(t). \quad (44)$$

Следовательно, изменение общего объема активов населения составляет:

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = (1 - \delta) \int_{KW} k * n(k, w, t) dkdw + \bar{B}(t) + s * \int_{AW} v(a, w, t) * I_s(a, w, t) dadw. \quad (45)$$

В целях упрощения предположим, что активы каждого собственника равномерно распределены по производственному сектору. Это допущение позволяет говорить о том, что изменения общей выручки производственного сектора не влияют на долю любого человека в общих активах населения, вложенных в производство. То есть уравнение (45) справедливо также и для распределения скорости роста активов населения (с заменой суммарной выручки $\bar{B}(t)$ и суммарного капитала $\bar{K}(t)$ на соответствующие доли). Имеем:

$$f_a(a, w, t) = \frac{a}{\bar{a}(t)} \left((1 - \delta) \bar{K}(t) + \bar{B}(t) \right) + s * v(a, w, t); \quad (46)$$

$$f_a(a, w, t) = \left\{ a \left(\frac{(1 - \delta) \left(\int_{KW} k * n(k, w, t) dk dw \right) + \left(\int_W n(k, w, t) * B(k, w, t) dk dw \right)}{\int_{AW} a * I_s(a, w, t) da dw} \right) + s * v(a, w, t) \right\}. \quad (47)$$

4.2. Перераспределение капитала в производственном секторе

Население, естественно, хочет вкладывать свои активы в те фирмы, которые возвращают большую выручку на единицу вложенного капитала. При этом показателем эффективности деятельности фирм служит отношение выручки к имеющемуся капиталу:

$$\frac{B(k, w, t)}{k - \delta k_n(k, w, t)}. \quad (48)$$

Распределение капитала по фирмам должно, очевидно, стремиться к идентичности с распределением по фирмам показателя эффективности (48), поскольку инвесторы стремятся вкладывать в более эффективные фирмы, а также стремятся к диверсификации активов. Это означает, что уравнение, описывающее процесс перераспределения капитала между фирмами, аналогично уравнению (32). Следовательно, динамика распределения капитала по фирмам имеет вид:

$$g_k(k, w, t) = \left(\frac{\int_{KW} (k - \delta k_n(k, w, t)) dk dw}{\int_{KW} \left(\frac{B(k, w, t)}{k - \delta k_n(k, w, t)} dk dw \right) * \eta_k} \right) * \eta_k. \quad (49)$$

5. СВОДКА УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

Подставляя (32) и (47) в (4), а (15) и (49) в (5), и используя (9), (12), (29), (30), (36), (39) и обозначив для краткости $I_s = I_s(a, w, t)$, $n = n(a, w, t)$, получим:

$$\frac{\partial I_s}{\partial t} = \frac{\partial (I_s * f_a(a, w, t))}{\partial a} - \frac{\partial (I_s * f_w(a, w, t))}{\partial w}; \quad (50)$$

$$f_a(a, w, t) = \frac{\left(\frac{(1 - \delta) \left(\int_{KW} k * n * dk dw \right) + \left(\int_W n * B(k, w, t) dk dw \right)}{\int_{AW} a * I_s * da dw} \right) + s * \frac{\int_K \min \left(I_s^f, \frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) * n * w dk}{I_s}}{I_s}; \quad (51)$$

$$f_w(a, w, t) = \left(\frac{g(w)}{\int_W g(w) dw} * \frac{\int_{WA} I_s da dw - \int_A I_s da}{\int_W I_s da} \right) * \eta_w; \quad (52)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial (n * g_k(k, w, t))}{\partial k} - \frac{\partial (n * g_w(k, w, t))}{\partial w}; \quad (53)$$

$$g_w(k, w, t) = \frac{k \beta - I_s^f * w * (\alpha + \beta)}{k \beta + I_s^f * w * (\alpha + \beta)} * a_w * w; \quad (54)$$

$$g_k(k, w, t) = \left(\frac{\int_{KW} (k - \delta k_n(k, w, t)) dk dw}{\int_{KW} \left(\frac{B(k, w, t)}{k - \delta k_n(k, w, t)} dk dw \right) * \eta_k} \right) * \eta_k; \quad (55)$$

$$B(k, w, t) = \min \left(d(t), p * (k_n)^\alpha \left(\min \left(\frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta}, I_s^f \right) \right)^\beta \right); \quad (56)$$

$$I_s^f(k, w, t) = \frac{\int_A I_s da}{\int_K n * k * \beta / (w(\alpha + \beta)) dk} * \frac{1}{n}; \quad (57)$$

$$k_n(k, w, t) = k - \min \left(\frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta}, I_s^f \right) * w; \quad (58)$$

$$d(t) = \frac{(1 - s) \int_{AW} \left(\int_K \min \left(I_s^f, \frac{k}{w} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) * n * w dk \right) da dw}{\int_{KW} n * dk dw}. \quad (59)$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Чтобы получить общее представление о динамике системы (50)-(53), рассмотрим пример численного решения системы при следующих значениях параметров. Цена – $p = 1$; параметры производственной функции – $\alpha = 0.6$; $\beta = 0.4$; норма сбережения – $s = 0.5$; скорости соответствующих процессов – $\eta_w = 1$; $\eta_k = 1$; норма амортизации – $\delta = 0.1$; функция «притягательности» различных заработных плат: $g(w) = 3 * w$ (выбрана простая функция, не зависящая от соотношения спроса и предложений на трудовых рынках).

Начальные распределения $I_s(a, w, t = 0)$ и $n(k, w, t = 0)$ выбраны гауссовскими и одинаковыми. Распределение $I_s(a, w, t = 0)$ изображено на рис. 1.

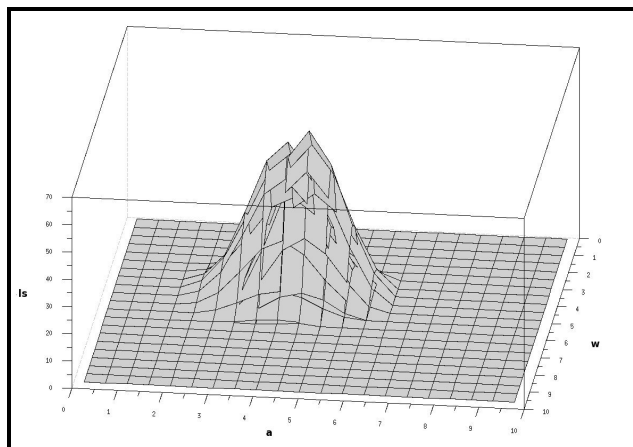


Рис. 1. Начальное распределение $I_s(a, w, t = 0)$

Следует отметить, начальное распределение следует выбирать так, чтобы большая его часть целиком лежала в рассматриваемой области. При аналитическом решении модели это не имеет такого большого значения, так как в качестве области можно рассматривать $(0, +\infty) * (0, +\infty)$. При численных расчетах рассматриваемая область заведомо ограничена, поэтому следует останавливать счет, как только значительная часть распределения «подойдет» к границам области.

Распределения $I_s(a, w, t = 5)$ и $n(k, w, t = 5)$ представлены на рис. 2 и 3.

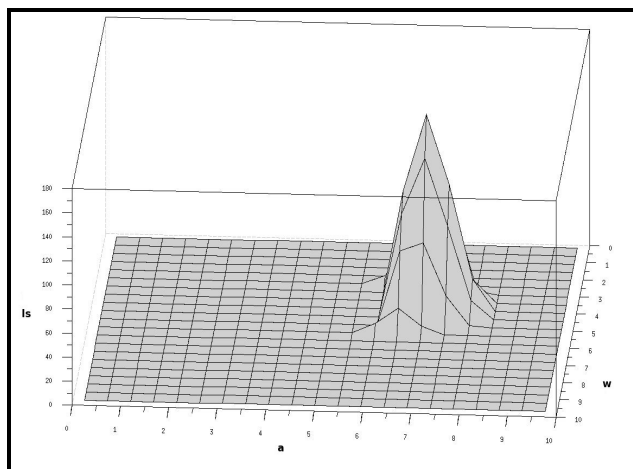


Рис. 2. Распределение $I_s(a, w, t = 5)$

Из рис. 2 видно, что распределение $I_s(a, w)$ за прошедшее время «подшло» к верхней границе рассматриваемой области по активам a . Следовательно, за это время экономика была прибыльной, и активы населения возросли. В результате этого распределение $I_s(a, w)$ «сдвинулось» вправо вдоль оси oa . В то же время не видно сколько-нибудь заметного изменения распределения $I_s(a, w)$ по оси ow (по сравнению с начальным распределением $I_s(a, w, t = 0)$).

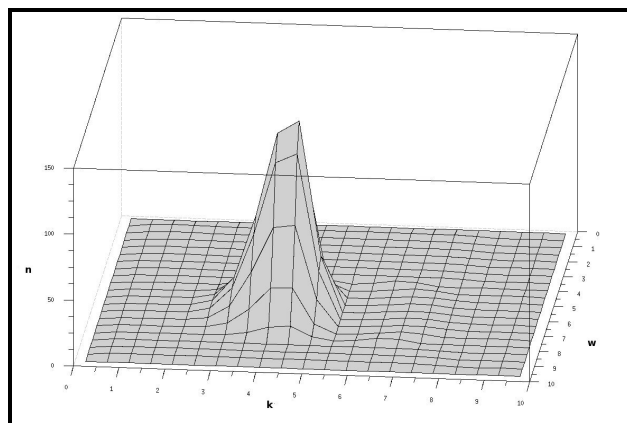


Рис. 3. Распределение $n(k, w, t = 5)$

Рис. 3 показывает, как изменилось распределение $n(k, w)$. Видно, что по сравнению с начальным (а оно совпадало с $I_s(a, w, t = 0)$, изображенным на рисунке 1) $n(k, w)$ «сдвинулось» влево вдоль оси ok . Это говорит о том, что средний размер фирм уменьшился. Что касается распределения по ставкам заработной платы w , то оно, как и в случае с $I_s(a, w)$, не претерпело заметных изменений по сравнению с начальным.

На рисунках 4 и 5 изображена дальнейшая эволюция распределений $I_s(a, w)$ и $n(k, w)$.

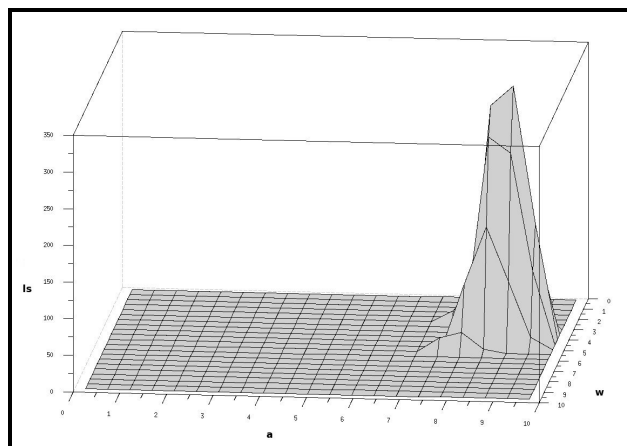


Рис. 4. Распределение $I_s(a, w, t = 10)$

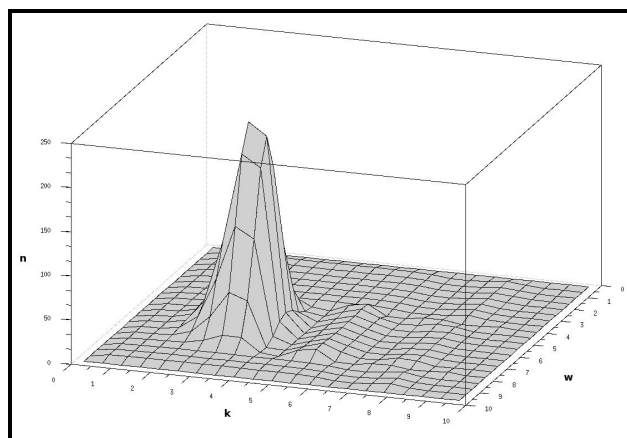


Рис. 5. Распределение $n(k, w, t = 10)$

Рис. 4 показывает дальнейшее движение $I_s(a, w)$ вправо вдоль оси oa , что и можно было ожидать. На рис. 5 изображена более интересная картина: падение среднего размера фирм остановилось, и начался рост числа больших фирм определенных размеров. Кроме того, можно заметить предпосылки к формированию двух наиболее распространенных ставок оплаты труда: два небольших «холмика» в правой части картинки говорят о том, что рынки труда, на которых оперируют наиболее крупные фирмы, формируются вокруг двух сильно отличающихся ставок оплаты труда.

Литература

1. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Москва, Мир, 1999.
2. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Москва-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
3. Николаев Л.К. О циклах экономической активности в процессе роста капитала. Экономика и математические методы, №1, 2003.
4. Балацкий Е.В. Рыночное ценообразование и производственные циклы. Экономика и математические методы, №1, 2005.
5. Накоряков В.Е., Гасенко В.Г. Математическая модель плановой макроэкономики. Экономика и математические методы, №2, 2002.
6. Пителин А.К. Межотраслевая имитационная модель экономики РФ. Экономика и математические методы, №3, 2007.
7. Коваленко А.Г. Математические модели межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка. Экономика и математические методы, №2, 2001.
8. Глушенко К.П. Пространственное поведение уровней цен. Экономика и математические методы, №3, 2001.
9. Мазуркин П.М. Популяционная модель распределения предприятий, Экономика и математические методы, №2, 2001.
10. Мустафин А.Т., Кантарбаева А.К. О распределении фирм по размерам, Экономика и математические методы, №3, 2000.
11. Л. ван Виссен, Попков А.Ю., Попков Е.Ю., Попков Ю.С. Модель рынка труда с энтропийным оператором (конкуренция когорт). Экономика и математические методы, №2, 2004.

Соколов Павел Иванович

РЕЦЕНЗИЯ

В статье предлагается модель экономической динамики, описывающая взаимодействие большого числа фирм и индивидуумов. Большая часть статьи посвящена выводу уравнений модели, соответствующих принятой автором воспроизводственной схеме. Предлагаемая модель представляет теоретический интерес, поскольку описывает динамику распределений, а не обобщенных показателей, как это обычно принято в экономико-математической литературе.

С практической точки зрения модель позволяет проводить расчеты по реальным данным, причем, в силу специфики модели, в качестве исходной информации могут быть использованы панельные данные, а не просто набор показателей. В завершающей части статьи демонстрируется численный пример использования модели для случая, когда распределения начальных условий подчиняются нормальному закону.

К недостаткам работы можно отнести достаточно высокую сложность модельных уравнений, практически не позволяющую исследовать поведение модели аналитическими методами, а также наличие в модели слишком упрощающих допущений, например, экзогенной нормы сбережений.

Несмотря на указанные недостатки, считаю, что статья может быть рекомендована к публикации в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Турмачев Е.С., д.э.н., директор Центра исследований инвестиционного рынка (ЦИИР)

4.2. ECONOMIC DYNAMICS MODEL WITH FIRMS DISTRIBUTION OVER CAPITAL AND WAGE LEVELS AND WITH INDIVIDUALS DISTRIBUTION OVER CUMULATIVE SAVINGS AND WAGE LEVELS

P.I. Sokolov, the Post-graduate Student of Chair
«Mathematical Methods of the Analysis of Economy»
of Economic Faculty of the Moscow State University
of M.V. Lomonosova

This paper suggests model, which describes dynamic interaction of large quantity of heterogeneous economic agents (firms and individuals). Such approach lets explicit description of micro and macro economic levels interaction. On the other side, this model could be classified as computable general equilibrium model, but unlike other such a models, describes individual agents behavior in terms of distributions. Model could produce predictions, but using time-series panel data, instead of just time series. The fact, that model is expressed in a form of system of differential equations, lets using of dynamic systems theory methods in model dynamics analysing.