10.7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЕКТА ГРУППОЙ ПРЕДПРИЯТИЙ

Романов Б.А., к.т.н., зав. кафедрой математических дисциплин Московского бухгалтерского института

Формулируется оптимизационная динамическая стохастическая модель реализации производственного проекта группой предприятий. В числе факторов формирования производственных мощностей рассматривается использование резервов, перепрофилирование части мощностей не загруженных предприятий, строительство новых предприятий и цехов, оптимальное распределение трудовых ресурсов. За основу взята модель межотраслевого баланса, в которую внесены поправки, учитывающие специфику модели группы предприятий. Разработан алгоритм решения поставленной задачи на основе методов декомпозиции общей задачи на комплекс частных взаимосвязанных задач, которые решаются методом последовательных приближений.

Введение

В условиях рыночной экономики, которая начала формироваться в России с начала 90-х годов, важное значение имеет проектирование организационных структур предприятий и организация производственных процессов с целью выпуска новой более конкурентно способной и эффективной продукции с низкой себестоимостью. Для этого необходимо применять научные, методологические и системотехнические принципы анализа проектируемых организационных структур предприятий и производственных процессов.

Особенно важное значение проектирование организационных структур и производственных процессов имеет при реализации крупных производственных проектов, связанных с большими инвестициями. Еще на стадии разработки проектов целесообразно провести математическое моделирование реализации проекта, которое включало бы максимальное количество факторов, влияющих на его реализацию, вскрывало возможные технические и экономические риски и позволило реально оценить требуемые материальные, финансовые и трудовые ресурсы, время выполнения заданного проекта и факторы, сдерживающие его выполнение.

Для проведения такого моделирования нужно разработать достаточно детальную математическую модель производственных процессов на предприятиях, включенных в реализацию проекта с учетом оптимизации этих процессов, включая издержки производства, затраты труда, затраты на перепрофилирование предприятий, осуществление строительства новых производственных мощностей. Эта модель должна позволить определить взаимосвязи между предприятиями, реализующими производственный проект, объемы и динамику взаимных поставок с учетом территориальной удаленности предприятий, динамику всех основных производственных процессов, процессов подготовки и распределения трудовых ресурсов и процессов подготовки и освоения производственных мощностей. Модель также должна отразить технические и экономические риски и их последствия при реализации заданного производственного проекта.

В данной работе сделана попытка решить, хотя бы частично, проблемы моделирования производственных процессов и организационных структур для повышения уровня организации производственной деятельности предприятий и ускорению их научно-технического прогресса.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ И ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУР

1.1. Постановка общей задачи моделирования производственных процессов и организационных структур

Организационные структуры производства, как и производственные процессы, в значительной степени определяются планами реализации производственных проектов. При планировании производственных проектов важным этапом является системный анализ возможностей их реализации. Один из вариантов системного анализа производственного проекта может быть сформулирован следующим образом.

Пусть задан проект производства некоторой продукции в заданном ассортименте. Требуется определить, какие ресурсы потребуются для реализации этого проекта, включая производственные мощности предприятий, выпускающих эту продукцию, производственные мощности обеспечивающих предприятий, кадровое обеспечение реализации заданного производственного проекта и т.д. При этом необходимо знать, сколько времени потребуется для его реализации, каков будет ход освоения выпуска продукции на производственных мощностях и когда предприятия выйдут на заданный уровень производства.

Может быть также поставлен вопрос о максимально возможном выпуске продукции на имеющихся производственных мощностях и, наоборот, какие потребуются производственные мощности и трудовые ресурсы необходимы для выпуска заданного объема продукции, какие ресурсы могут быть ограничивающими факторами и каково будет влияние этих факторов на реализацию проекта. Важно также оценить динамику во времени всех процессов, которые обеспечивают реализацию заданного проекта.

Современные производственные процессы протекают в условиях технических и экономических рисков. Эти риски можно в определенной степени учесть, считая, что параметры организационных структур и производственных процессов имеют отклонения от средних значений. Желательно учесть возможный разброс значений параметров и определить их влияние на основные выходные данные реализуемого проекта.

Чтобы ответить на эти вопросы необходимо использовать математические методы анализа организационных структур и производственных процессов. В настоящее время не существует универсальной модели производственных процессов, которая охватывала бы все стороны их функционирования.

Наибольшее приближение к реальному современному взаимосвязанному производству дает модель межотраслевого баланса. Эта модель в основных своих чертах отражает структуру современного производства и взаимосвязь всех отраслей экономики государства в процессе производства и распределения продукции [1-32].

Однако такая модель весьма обобщенно отражает производственные процессы. Тем не менее, эту модель можно принять за основу при моделировании производственных процессов, но затем изменить и дополнить элементами, которые в большей степени, чем модель межотраслевого баланса, отражают реальные производственные процессы. Для этого сначала рассмотрим модель межотраслевого баланса.

Ядро межотраслевой модели составляет система уравнений межотраслевого баланса, отражающая связь между валовым производством продукции отраслей и ее потреблением. Продукция для потребления включает промежуточную продукцию, предназначенную для внутреннего производственного потребления, и конечную продукцию, идущую на потребление внутри страны и на экспорт.

В состав конечной продукции также обычно включаются и производимые основные средства, которые, в определенном смысле, предназначены для внутрипроизводственного потребления, т.к. используются отраслями, производящими конечную продукцию в процессе обновления или создания новых производственных фондов [5, 16-20].

Процесс изменения уровня производства в отраслях наиболее полно отражается в рамках динамической модели межотраслевого баланса. Рассмотрим математическую формулировку этой модели. Пусть задано множество отраслей, обозначаемое через M_N. Тогда систему уравнений межотраслевого баланса в стоимостном выражении – классическую модель Леонтьева – можно записать в виде [5, 16-20]:

$$x_i(t) = \sum_{j \in M_N} a_{ij} x_j(t) + r_i(t) + y_i(t) + f_i(t),$$
$$i \in M_N, \qquad (1.1)$$

где

$x_i(t)$ – валовой выпуск продукции i-й отрасли;

a_{ij} – коэффициент прямых затрат промежуточной продукции или услуг i-й отрасли в j-й отрасли;

y_i – выпуск конечной продукции в i-й отрасли;

$f_i(t)$ – выпуск основных средств в i-й отрасли;

$r_i(t)$ – выпуск продукции i-й отрасли на экспорт.

Специфика производственных процессов на уровне предприятий заключается в том, что анализируется не экономика в целом, а некоторая ограниченная группа предприятий. Тем не менее и для отдельного предприятия также выполняется балансовое соотношение (1.1) затрат на производство и выпуск продукции. Поэтому эту систему, в принципе, можно использовать для построения балансовых соотношений производства и распределения продукции и для группы взаимосвязанных предприятий.

При использовании для моделирования производственной деятельности группы предприятий уравнений межотраслевого баланса следует учесть специфические особенности функционирования производства взаимосвязанной группы предприятий.

Рассмотрим группу взаимосвязанных предприятий, которые производят некоторую продукцию в заданном и свободном ассортименте. Задачу реализации производственного проекта можно сформулировать в следующем виде: пусть требуется в первую очередь увеличить выпуск продукции в заданном ассортименте, а во вторую очередь выпуск продукции в свободном ассортименте.

Следует отметить, что модель реализации производственного проекта группы предприятий может быть реализована в игровой постановке, учитывая возможную несогласованность цели и задач отдельных предприятий. В данной модели предполагается, что производственный проект, подлежащий реализации, одобрен и согласован всеми предприятиями, участвующими в его реализации. Более того, предполагается, что между этими предприятиями установлены договорные отношения, определяющие обязательства, связанные с реализацией производственного проекта, в частности, обязательства по объемам и срокам поставки продукции, по инвестициям в проект и т.д.

В этом случае реализация проекта осуществляется по заранее согласованному плану. В предлагаемой модели принят оптимизационный подход, позволяющий исследовать производственный проект с точки зрения оценки минимальных инвестиций и минимума времени на его реализацию.

Цель состоит в том, чтобы определить какие предприятия целесообразно использовать для реализации этого проекта, какие материальные и трудовые ресурсы потребуются для этого, сколько потребуется времени на реализацию проекта, какова будет динамика выпуска продукции, какие могут возникнуть ограничения при его реализации, какова будет стоимость реализации проекта и т.д.

За основу модели реализации указанного проекта примем систему уравнений межотраслевого баланса, которая будет модифицирована с учетом поправок, отражающих специфику функционирования производственных процессов взаимосвязанной группы предприятий. Пусть задано множество предприятий, которые взаимодействуют между собой в процессе производства и распределения продукции в рамках реализуемого проекта. В модели межотраслевого баланса задается множество отраслей, которые полностью описывают экономику государства. Обозначим это множество также через M_N, но в предлагаемой модели будем рассматривать его как множество предприятий, непосредственно занятых реализацией заданного проекта.

В модели межотраслевого баланса связи между отраслями замкнуты, т.е. вся выпускаемая и распределяемая продукция отражена в системе его уравнений. Эта продукция подразделяется на:

- промежуточную, используемую другими предприятиям для производства собственной продукции;
- конечную продукцию, направляемую для внутреннего потребления;
- продукцию производимую на экспорт и производимые основные средства.

В рассматриваемой модели взаимосвязанной группы предприятий связи могут быть установлены как между предприятиями этого множества, так и с предприятиями вне этого множества.

Чтобы отразить это в предлагаемой модели группы предприятий дополнительно введем множество предприятий M_Q. Предприятия этого множества поставляют необходимую промежуточную продукцию на предприятия множества M_N. К таким условным предприятиям можно отнести, например, организации, снабжающие предприятия множества M_N теплом, электроэнергией, а также сырьем, материалами, комплектующими, если они сами не потребляют продукцию предприятий множества M_N. В последнем случае они должны быть включены в множество M_N. Если же предприятия множества M_Q потребляют промежуточную прдукцию, производимую предприятиями множества M_N, то поставки промежуточной продукции предприятий множества M_N на предприятия множества M_Q, а также и на другие предприятия вне множества M_N, можно представить в виде отдельного слагаемого в правой части уравнения (1.1), а закупки промежуточной продукции предприятиями множества M_N у предприятий множества M_Q будут учтены ниже при формировании соотношений, связывающих валовой выпуск предприятий множества M_N с затратами, необходимыми для создания собственной продукции.

В предлагаемой модели взаимосвязанной группы предприятий примем, что выпускаемая конечная продукция подразделяется на продукцию в заданном ассортименте, продукцию в свободном ассортименте, продукцию на экспорт и оборудование из состава основных средств. Кроме того, примем допущение, что выпускаемая каждым предприятием продукция представляет собой обобщенный монопродукт, специфичный для данного предприятия. В дальнейшем будет выполнено обобщение на случай выпуска продукции в виде набора различных товаров.

С учетом указанных замечаний можно рассматривать систему уравнений (1.1) как уравнение баланса выпуска и распределения продукции предприятиями множества M_N. Эту систему уравнений производства и распределения продукции на i-м предприятии множества M_N в момент времени t можно записать в виде:

$$x_i(t) = \sum_{j \in M_N} a_{ij} x_j(t) + \hat{y}_i(t) + r_i(t) +$$
$$+ a_{ij} x_j(t) + \hat{y}_i(t) + r_i(t) + y_i(t) + f_i(t) + w_i(t),$$
$$i \in M_N, \qquad (1.2)$$

где

$x_i(t)$ – валовой выпуск продукции на i-м предприятии;

a_{ij} – коэффициент прямых затрат промежуточной продукции или услуг i-го предприятия на j-м предприятии;

$y_i(t)$ – выпуск продукции в заданном ассортименте на i-м предприятии;

$\hat{y}_i(t)$ – выпуск продукции в свободном ассортименте на i-м предприятии;

$f_i(t)$ – выпуск оборудования на i-м предприятии;

$r_i(t)$ – выпуск продукции i-го предприятия на экспорт;

$w_i(t)$ – выпуск продукции i-го предприятия в качестве промежуточной продукции для предприятий вне множества M_N, задается экзогенно как функция времени.

Группа предприятий, которая рассматривается в данной модели должна иметь достаточное количество взаимных связей. Критерием этого количества является требование, чтобы матрица коэффициентов прямых затрат $\|a_{ij}\|$ $i, j \in M_N$ была продуктивной. Это означает, что система уравнений (1.2) относительно величины $x_i(t)$ при неотрицательных значениях величин в правой части этого уравнения должна иметь не отрицательное решение.

Для того, чтобы отразить затраты промежуточной продукции предприятий множества M_N, поставляемых предприятиями множества M_Q, запишем следующую систему уравнений:

$$\omega_k(t) = \sum_{j \in M_N} \zeta_{kj} x_j(t), \quad k \in M_Q, \qquad (1.3)$$

где

ζ_{kj} – коэффициенты удельных затрат промежуточной продукции j-го предприятия множества M_N на k-м предприятии множества M_Q;

$\omega_k(t)$ – объем поставок промежуточной продукции k-го предприятия множества M_Q на предприятия множества M_N.

На предприятиях в качестве промежуточной продукции, поставляемой из других предприятий, в принципе могут использоваться также импортные товары. Для того, чтобы учесть их затраты, введем элемент матрицы затрат импортных товаров на единицу валового выпуска продукции предприятия, обозначаемый u_{nj}, который показывает долю товаров не конкурирующего импорта с индексом n, требуемую для выпуска продукции j-го предприятия множества M_N. Элементы этой матрицы являются составной частью общей матрицы затрат, которая включает элементы матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|u_{nj}\|$.

Обозначим через $z_n(t)$ объем импорта не конкурирующих товаров n-го типа, принадлежащих множеству M_U. Тогда уравнение, связывающее объем импорта не конкурирующего товара n-го типа с валовым выпуском продукции j-го предприятия в момент времени t можно записать в виде:

$$z_n(t) = \sum_{j \in M_N} u_{nj} x_j(t), \quad n \in M_U. \qquad (1.4)$$

Система уравнений (1.1) вместе с системами (1.3); (1.4) образуют полную система балансовых уравнений материальных затрат и выпуска продукции на предприятии. В этих уравнениях затраты на предприятии описываются матрицами коэффициентов прямых материальных затрат $\|a_{ij}\|$ и $\|u_{nj}\|$ аналогично тому, как это принято в модели межотраслевого баланса. В последней модели коэффициенты рассчитываются на основе построения материальных балансов всего хозяйства страны [1-18, 21, 22]. Однако использование значений этих коэффициентов в модели функционирования группы предприятий весьма проблематично, т.к. отраслевые коэффициенты представляют собой усреднения по отраслям и зависят от уровня агрегации отраслей не говоря уже о приближенности представления экономики в отраслевом разрезе. Поэтому для применения в данной модели эти коэффициенты целесообразно рассчитывать на основе данных о затратах на конкретных предприятиях.

Одной из характеристик приближения межотраслевых моделей является представление выпуска продукции в отраслях в виде монопродукта [3,5,15]. Хотя существуют теоретические разработки много продуктовых отраслевых балансов, однако в реальной практике они не получили широкого распространения[11]. Представление выпуска продукции на предприятиях в виде монопродукта снижает точность модели, поэтому в данной модели принят много продуктовый подход.

В классической модели межотраслевого баланса понятия «продукт», «технологический способ производства» и «организационная форма деятельности» тождественны. В связи с этим структура производственного процесса отражена в форме матрицы $\left\| a_{ij} \right\|$. При моделировании деятельности предприятий нельзя признать тождественность указанных понятий, т.к. принципиально надо отразить выпуск предприятиями нескольких видов продукции.

Существуют различные подходы к трансформации классической модели в многопродуктовую. В [11, 16, 22] рассмотрены следующие виды трансформации. В работе [11] приводится модель с выпуском в дополнение к основному виду продукции еще дополнительного (сопряженного) продукта. Такая модель имеет ограниченный круг применения. В другом варианте многопродуктовой трансформации этой же работы рассматривается множество матриц технологических вариантов производств. Однако большое количество этих матриц приводит к сильному усложнению модели и необходимости вводить экзогенные переменные в виде удельных весов различных производств.

В работе [11] также описывается подход к трансформации в многопродуктовую модель на основе прямоугольной матрицы затрат. Однако в этой модели также нужно задавать экзогенные величины – удельные веса видов выпускаемой продукции, которые фиксируются на весь период расчета на модели. Это также является сильным ограничением при использовании данного подхода для трансформации в многопродуктовую модель.

В той же работе рассматриваются подходы к трансформации в многопродуктовую модель без введения экзогенных параметров на основе оптимизации технологических вариантов производств. Задачи такого типа, называемые теоремами о замещении рассматривались в [9] и были направлены на выбор оптимальной структуры межотраслевых пропорций.

В работе [16] трансформация классической модели межотраслевого баланса в многопродуктовую осуществляется на основе введения матрицы выпуска продукции в дополнение к матрице затрат. Модель этого типа в более общем виде известна как модель Неймана по имени ее автора. Обобщением модели Неймана является модель Гейла. Эти модели служат больше для теоретических исследований динамики развития экономики, чем для практического применения. Одним из ограничений для практического применения является необходимость каким-то способом расчета матриц выпуска продукции.

Анализ имеющихся методов трансформации классической модели межотраслевого баланса в многопродуктовую модель показывает, что их применение или сильно ограничено или сопряжено со значительными и даже непреодолимыми трудностями. Поэтому автор данной работы предлагает собственный подход к трансформации в многопродуктовую модель, заключающийся в следующем. Каждое предприятие может выпускать несколько видов продукции из заданного множества. При этом разные предприятия могут выпускать формально одинаковую продукцию. Однако формально одинаковая продукция может иметь различия, не учитываемые в классификации, но учитываемые тем, что выпускаются на разных предприятиях.

Трансформация классической модели в многопродуктовую в данном подходе осуществляется посредством преобразования матрицы затрат в 3-х мерный массив затрат с учетом вида выпускаемой продукции.

Для того, чтобы представить уравнение (1.2) в многопродуктовом виде, введем множество продуктов, которые выпускаются предприятиями или затрачиваются ими при производстве своих продуктов, обозначаемое через M_R. Тогда матрицы коэффициентов затрат $\left\| a_{ij} \right\|$, $\left\| u_{nj} \right\|$ и $\left\| \zeta_{kj} \right\|$ преобразуются к массивам вида $\left\| a_{ijr} \right\|$, $\left\| u_{njr} \right\|$ и $\left\| \zeta_{kjr} \right\|$ $r \in M_R$, а уравнения (1.2-1.4) примут вид:

$$x_{ir}(t) = \sum_{j \in M_N} a_{ijr} x_{jr}(t) + \hat{y}_{ir}(t) + r_{ir}(t) + y_{ir}(t) + f_{ir}(t) + w_{ir}(t), \quad i \in M_N, r \in M_R; \qquad (1.5)$$

$$\omega_k(t) = \sum_{r \in M_R} \sum_{j \in M_N} \zeta_{kjr} x_{jr}(t), \quad k \in M_Q; \qquad (1.6)$$

$$z_n(t) = \sum_{j \in M_R} \sum_{j \in M_N} u_{njr} x_{jr}(t), \quad n \in M_U. \qquad (1.7)$$

Оценка коэффициентов прямых затрат представляет собой отдельную задачу. Наиболее точно эти коэффициенты можно получить исходя из данных о затратах на предприятиях, участвующих в реализации производственного проекта или на аналогичных предприятиях.

Известно, что коэффициенты прямых затрат зависят от объема выпуска продукции. Если такие зависимости известны, то данная модель может быть адаптирована применительно к использованию таких зависимостей.

Предлагаемый подход интересен также тем, что при суммировании уравнения (1.5) по индексу $r \in M_R$ оно превращается в исходное классическое уравнение. Это свойство в дальнейшем будет использовано при разработке методов решения задачи, поставленной в конце данного раздела.

При разработке данной модели на уровне предприятия целесообразно, наряду с материальными, затратами учитывать также и остальные затраты, в первую очередь, затраты труда. Обозначим через $\hat{h}_i(t)$ количество занятых на i-м предприятии в момент времени t, а через μ_i отношение среднего ежемесячного фонда оплаты труда к ежемесячному валовому выпуску продукции, производимой на i-м предприятии. Тогда затраты труда можно выразить в виде слагаемого $\hat{h}_i(t)\mu_i$, которое следует включить в правую часть уравнения (1.2).

В принципе, в числитель коэффициента μ_i можно включать не только оплату труда, но и другие не материальные расходы, например, плату за землю, амортизацию основных средств, налоги, кредиты и т.д. Тогда это будет коэффициент, отражающий помимо материальных и все остальные расходы.

Слагаемое $\hat{h}_i(t)\mu_i$ можно преобразовать, выразив количество занятых на предприятии через валовой выпуск продукции. Обозначим через ξ_j трудоемкость производства продукции на j-м предприятии при обычном режиме работы, которая представляет собой отношение количества занятых к объему валового выпуска продукции. Тогда количество занятых на предприятии в момент времени t можно записать в виде:

$$\hat{h}_i(t) = \xi_i x_i(t). \qquad (1.8)$$

Слагаемое $\hat{h}_i(t)\mu_i$ можно преобразовать к виду $x_i(t)\xi_i\mu_i$. Представим два последних сомножителя в этом слагаемом в виде диагональной матрицы, в которой по диагонали стоят произведения $\xi_i\mu_i$ и обозначим элементы этой матрицы через ϕ_{ij}. После чего слагаемое $x_i(t)\xi_i\mu_i$ можно записать в виде:

$$\sum_{i \in M_N} \phi_{ij} x_j(t), \quad j \in M_N.$$

С учетом многопродуктового подхода элементы матрицы ϕ_{ij} можно преобразовать в элементы 3-х мерного массива ϕ_{ijr}, вычисляя соответствующие сомножители относительно затрат на продукты из множества $r \in M_R$, в результате чего слагаемое не материальных затрат примет вид:

$$\sum_{i \in M_N} \phi_{ijr} x_{jr}(t), \quad j \in M_N, \quad r \in M_R.$$

Вводя это слагаемое в правую часть уравнения (1.5) и объединяя (суммируя) элементы массивов a_{ijr} и ϕ_{ijr} в элемент, обозначаемый $\hat{a}_{ijr}$ получим модифицированное балансовое многопродуктовое уравнение применительно к предприятиям множества M_N:

$$x_{ir}(t) = \sum_{j \in M_N} \hat{a}_{ijr} x_{jr}(t) + \hat{y}_{ir}(t) + r_{ir}(t) +$$
$$+ y_{ir}(t) + f_{ir}(t) + w_{ir}(t), i \in M_N, r \in M_R. \qquad (1.9)$$

Поскольку предприятия корпорации в рамках реализации заданного проекта производят продукцию на экспорт, а также импортируют товары, то целесообразно включить в модель систему уравнений, выражающих величину сальдо внешнеторгового баланса корпорации, также зависящую от времени, которую обозначим как $s(t)$. Тогда уравнение для сальдо внешнеторгового баланса можно записать в виде

$$s(t) = \sum_{i \in M_R} \sum_{i \in M_N} r_{ir}(t) - \sum_{n \in M_U} z_n(t). \qquad (1.10)$$

Условие того, что часть конечной продукции i-го предприятия, выражаемая величиной $y_i(t)$, должна производиться в заданном ассортименте, можно записать в виде соотношения:

$$y_{ir}(t) = a(t) q_{ir}, \qquad (1.11)$$

где q_{ir} – доля выпуска на i-м предприятии товара r-го вида в общем объеме выпуска товаров в заданном ассортименте;

$a(t)$ – общий объем выпуска товаров в заданном ассортименте.

Величина $a(t)$ определяется суммированием по всем предприятиям товаров, выпускаемых в заданном ассортименте

$$a(t) = \sum_{i \in M_N} \sum_{r \in M_R} y_{ir}(t). \qquad (1.12)$$

Общий выпуск конечной продукции предприятий складывается из продукции, выпускаемой в заданном ассортименте, продукции в свободном ассортименте, продукции, выпускаемой на экспорт и оборудования, поставляемого для обновления или расширения производственных мощностей. Величину общего выпуска, обозначаемую через $g(t)$ можно выразить в виде:

$$g(t) = a(t) + \sum_{i \in M_N} \sum_{r \in M_R} (\hat{y}_{ir} + r_{ir} + f_{ir}). \qquad (1.13)$$

Выпуск продукции в заданном ассортименте, описываемый уравнениями (1.11); (1.12) рассматривался в работах [23-25], где выполнен детальный анализ зависимости производства этой продукции от размеров производственных мощностей отраслей. Однако в этих работах не рассматривается совместно выпуск продукции в заданном и свободном ассортименте, как это принято в данной модели. Отметим также, что в [23-25] уравнения (1.11); (1.12) рассматриваются на уровне отраслей, тогда как в данной модели они рассматриваются на уровне предприятий, где информационная база представляется более детально.

Поскольку рассматриваемая нами задача должна быть оптимизационной, то закончив с уравнениями, перейдем к ограничениям. Валовой выпуск продукции предприятий ограничивается их производственными мощностями. Обозначим через $p_i(0)$ производственную мощность i-го предприятия в начальный момент реализации заданного производственного проекта. В последующие моменты времени производственная мощность этого предприятия может увеличиться за счет перепрофилирования части производственной мощности других предприятий, которые будут избыточными.

Кроме того, производственная мощность может возрасти за счет строительства новых цехов, участков и т.д. Производственная мощность предприятия может также уменьшаться, в случае, если она используется как донор для перепрофилирования под выпуск дефицитной продукции.

Обозначим изменение производственной мощности i-го предприятия в результате перепрофилирования избыточной мощности предприятий множества M_N через $\Delta p_i(t)$, а прирост производственной мощности за счет нового строительства через $\Delta c_i(t)$. При этом величина $\Delta p_i(t)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Положительной эта величина будет в том случае, когда производственная мощность i-го предприятия увеличивается за счет перепрофилирования производственной мощности другого предприятия и уменьшается, если это предприятие имеет избыточную мощность, которая перепрофилируется под выпуск продукции другого предприятия, производственная мощность которого должна увеличиться. Тогда ограничение на валовой выпуск продукции i-го предприятия в момент времени t можно записать в виде:

$$x_i(0) = \sum_{r \in M_R} x_{ir}(0) \le p_i(0) + \Delta p_i(t) + \Delta c_i(t), \quad i \in M_N. \tag{1.14}$$

В межотраслевых моделях увеличение валового выпуска за счет прироста производственных мощностей обычно выражается через коэффициенты приростной фондоемкости, которые входят в состав отдельного слагаемого в правой части уравнения (1.1) или в виде отдельного соотношения, подобного (1.13). Эти коэффициенты в усредненном виде отражают процесс прироста производственных мощностей [5,16-18]. В них не учитывается специфика прироста мощностей конкретных предприятий. В большинстве межотраслевых моделей прирост производственных мощностей осуществляется только за счет нового строительства. В модели [17] рассмотрен прирост производственных мощностей отраслей за счет перепрофилирования мощностей других отраслей и нового строительства. На уровне отраслей этот процесс описан в данной модели достаточно подробно. Однако в этой модели имеются недостатки:

- не вполне обосновано перепрофилирование части мощностей одной отрасли в другую с точки зрения его издержек по перепрофилированию, поскольку коэффициенты затрат на перепрофилирование задаются экзогенно;
- коэффициенты перепрофилирования, которые показывают изменение мощности после перепрофилирования, также задаются экзогенно и не указано способов для их расчетов.

То же самое относится и к моделированию прироста производственных мощностей за счет нового строительства. Этот процесс также базируется на экзогенно задаваемых коэффициентах затрат и коэффициентах ввода новых мощностей.

В предлагаемой модели на уровне предприятия приводится обоснование и вводится критерий перепрофилирования с точки зрения минимума издержек на его проведение, а также формулируется методика расчета коэффициентов перепрофилирования. Затраты на перепрофилирование определяются не на основе заданных экзогенно коэффициентов затрат, а на основе расчета потребностей оборудования для перепрофилирования, более реально отражающего моделируемый процесс. При этом моделируется выпуск необходимого оборудования, его доставка на перепрофилируемые предприятия и монтаж. Эти процессы и определяют ввод в строй перепрофилированных предприятий, тогда как в модели [17] и ввод в строй моделируется на основе экзогенно задаваемых коэффициентов.

Процесс нового строительства в предлагаемой модели описывается на основе моделирования деятельности строительных предприятий и предприятий, выпускающих оборудование для вновь построенных предприятий или цехов. При этом учитываются производственные мощности занятых строительных предприятий, моделируется оптимальное распределение этих мощностей по строящимся объектам, а также учитываются циклы производства необходимого оборудования, время его доставки и монтажа. В модели [17] любая продукция, в т.ч. используемая для перепрофилирования и нового строительства, оценивается на уровне отрасли в виде монопродукта, тогда как в предлагаемой модели функционирования группы взаимосвязанных предприятий принят многопродуктовый подход.

Для введенных величин $\Delta p_i(t)$ и $\Delta c_i(t)$ надо сформулировать ограничения или соотношения, позволяющие вычислять их в момент времени t. Перепрофилирование производственной мощности предприятия может осуществляться под выпуск продукции разных предприятий, что приводит к увеличению производственных мощностей этих предприятий. Чтобы это учесть введем элемент матрицы $\Delta p_{ij}(t)$, который представляет собой долю избыточных мощностей i-го предприятия, которая перепрофилируется под выпуск продукции j-го предприятия. Обозначим положительные значения величин Δp_i через $\Delta p_i^+(t)$, а множество соответствующих предприятий через M_P и назовем их предприятиями-реципиентами. Тогда просуммированные по индексу j строки матрицы $\Delta p_{ij}(t)$ будут ограничены величиной $\Delta p_i^+(t)$

$$\sum_{j \in M_D} \Delta p_{ij}(t) = \Delta p_i^+(t), \quad i \in M_P. \tag{1.15}$$

Просуммированные по индексу i элементы матрицы $\Delta p_{ij}(t)$ представляют собой уменьшение производственной мощности j-го предприятия после его перепрофилирования под выпуск продукции i-х предприятий, т.е. отрицательная величина $\Delta p_i(t)$, абсолютное значение которой обозначим через Δp_i^-. Множество соответствующих предприятий обозначим через M_D и назовем их предприятиями-донорами.

Чтобы связать между собой величины $\Delta p_{ij}(t)$ и $\Delta p_i^-(t)$ надо принять во внимание тот факт, что после перепрофилирования под выпуск продукции i- го предприятия производственная мощность j-го предприятия изменится на коэффициент χ_{ij}, называемый коэффициентом перепрофилирования. Тогда ограничение на величину $\Delta p_i^-(t)$ можно записать в виде:

$$\sum_{j \in M_P} \chi_{ij} \Delta p_{ij}(t) = \Delta p_i^{-}(t), \quad i \in M_D. \qquad (1.16)$$

Важным параметром перепрофилирования является стоимость его проведения. Эта стоимость является функцией матрицы $\Delta p_{ij}(t)$ и коэффициентов, представляющих собой удельные затраты на проведение перепрофилирования. Последние коэффициенты представим в виде матрицы с элементами c_{ij}. Тогда общую стоимость затрат на проведение перепрофилирования, обозначаемую через $\rho(t)$ можно записать в виде:

$$\rho(t) = \sum_{i \in M_P} \sum_{j \in M_D} c_{ij} \Delta p_{ij}(t). \qquad (1.17)$$

Расчет величины $\Delta p_i(t)$, как функции времени, представляет собой достаточно сложную задачу. Для ее решения необходимо определить перечни предприятий-доноров и реципиентов и объемы оборудования, которые надо установить на перепрофилируемых предприятиях. Далее надо моделировать процесс производства этого оборудования, доставки и монтажа на перепрофилируемых предприятиях. Эти процессы будут рассматриваться в последующих частях статьи, а здесь будем считать, что величина $\Delta p_i(t)$, как функция времени, задана.

Определение величины $\Delta c_i(t)$ как функции времени, представляющей собой приращение производственной мощности i-го предприятия в результате нового строительства, также представляет собой сложный процесс. Для этого надо предварительно определить общий объем строительства, затем моделировать деятельность строительных предприятий, которые будут осуществлять новое строительство. Далее на определенном этапе строительных работ будет подключаться блок изготовления, доставки и монтажа оборудования. Эти процессы будут рассматриваться в следующих частях статьи, а здесь также будем считать, что величина $\Delta c_i(t)$, как функция времени, задана.

В последнюю очередь запишем ограничения на величины: $z_i(t)$, $\omega_k(t)$, $h(t)$, $\hat{h}_i(t)$, $y_i(t)$, $r_i(t)$, $f_i(t)$, $w(t)$, $s(t)$. Величину импорта целесообразно ограничить сверху, чтобы увеличивать сальдо внешнеторгового баланса. Общее количество занятых на всех предприятиях, естественно, ограничивается численностью той части трудоспособного населения, которая хочет и может работать по найму на предприятиях при реализации заданного производственного проекта. Выпуск продукции в свободном ассортименте естественно ограничить снизу, т.к. целью реализации производственного проекта является определение максимальных возможностей по производству продукции в заданном и свободном ассортименте. Величина товаров, производимых на экспорт, как и величина сальдо внешнеторгового баланса, должны быть ограничены снизу, чтобы определить их максимально возможные значения.

Ограничение на величину выпуска промежуточной продукции $w_i(t)$, для предприятий множества M_Q, а также на величину выпуска оборудования $f_i(t)$, не устанавливаются. Первая из величин как функция времени задается экзогенно исходя из установившихся поставок продукции на предприятия множества M_Q или с учетом изменений, которые могут возникнуть в связи с реализацией заданного проекта. Вторая величина, как функция времени, рассчитывается в последующих частях статьи на основе моделирования потребностей в оборудовании при перепрофилировании предприятий и строительстве новых объектов. Здесь также будем считать, что эта величина, как функция времени, также задана.

В данной модели в качестве ограничения для вектора занятых на предприятиях $\hat{h}(t)$ используется функция от времени $\breve{h}(t)$, которая рассчитывается в третьей части статьи на основе решения оптимизационной задачи перераспределения трудовых ресурсов и подготовки квалифицированных кадров в ходе реализации заданного производственного проекта. В [13] рассматривалось влияние подготовки квалифицированных кадров на выпуск продукции в отраслях. Это влияние оценивалось как дополнительный выпуск продукции. В данной модели рассматривается подготовка кадров необходимой квалификации на предприятиях. Заданная квалификация учитывается в коэффициентах трудоемкости выпуска продукции на предприятиях. Такой подход к моделированию подготовки кадров, как известно автору, в других подобных моделях не использовался.

Обозначив ограничения рассмотренных величин теми же буквами, но с крышечкой наверху, можно записать следующие неравенства

$$z_n(t) \le \hat{z}_n(t), \; n \in M_U; \qquad (1.18)$$

$$\omega_k(t) \le \hat{\omega}_k(t), k \in M_Q; \qquad (1.19)$$

$$h(t) \le \hat{h}(t); \qquad (1.20)$$

$$\hat{h}_i(t) \le \breve{h}_i(t); \qquad (1.21)$$

$$\hat{y}_i(t) = \sum_{r \in M_R} \hat{y}_{ir}(t) \ge \hat{y}_i; \qquad (1.22)$$

$$\hat{r}_i(t) = \sum_{r \in M_R} \hat{r}_{ir}(t) \ge \hat{r}_i; \qquad (1.23)$$

$$s(t) \ge \hat{s}(t). \qquad (1.24)$$

Поскольку рассматриваемая нами задача оптимизационная, то завершим формирование математических соотношений формулировкой целевой функцией. По условиям задачи, в первую очередь, требуется максимизировать выпуск конечной продукции в заданном ассортименте, который выражается величиной $a(t)$. Кроме этого требуется также максимизировать общий выпуск конечной продукции предприятий, т.е. величину $g(t)$. Процесс перепрофилирования в общем характеризуется стоимостью проведения, выражаемой величиной $\rho(t)$, которую естественно требуется минимизировать. Кроме того, процесс реализации производственного проекта должен быть завершен в минимальные сроки. Обозначим через T время завершения проекта. Критерием его завершения служит выход производственных мощностей на максимальное стационарное значение, т.е. $a(T) = a(T + \Delta t) = const$. Таким образом, целевая функция реализации рассматриваемого проекта, обозначаемая через φ выражается в виде четырех компонент

$$\varphi(t)=(a(t),g(t),\rho(t),T)\,. \qquad (1.25)$$

Оптимизационная задача формулируется так: требуется определить максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, определяемый величиной $a(t)$, а также максимизировать суммарный конечный продукт – величину $g(t)$ и минимизировать издержки при перепрофилировании производственных мощностей предприятий $\rho(t)$ при выполнении уравнений и ограничений (1.6-1.23).

$$a(t)\to max\ ;\ g(t)\to max\ ;$$
$$\rho(t)\to min\ ;\ T\to min\,. \qquad (1.26)$$

Модель (1.8)-(1.26) можно записать в векторно-матричном виде. Для этого просуммируем уравнения (1.9) и (1.11) по всем видам выпускаемых товаров. Кроме того, запись модели (1.8)-(1.26) можно упростить, если принять во внимание, что уравнения (1.3) и (1.4) имеют одинаковую структуру. Эти уравнения выражают затраты на производство продукции предприятий импортных товаров и товаров, поступающих от предприятий вне группы, реализующей заданный производственный проект, т.е. от внешних предприятий. Общим для этих уравнения является то, что они выражают затраты промежуточной продукции, поступающей извне группы предприятий, реализующих заданный производственный проект. В качестве упрощения объединим величины $z_n(t)$ и $\omega_k(t)$ в одну величину $\hat{z}_l(t)$, где $l\in M_{UQ}$, а M_{UQ} представляет собой объединение множеств M_U и M_Q. Аналогично объединим элементы матриц $\left\|\zeta_{kj}\right\|$ и $\left\|u_{nj}\right\|$ в одну матрицу $\left\|\hat{u}_{lj}\right\|$. Тогда модель (1.8)-(1.26) можно в векторно-матричной форме представить так:

1. $x(t)=\hat{A}x(t)+\hat{y}(t)+r(t)+y(t)+w(t)+f(t)\,;$
2. $\hat{z}(t)=\hat{U}x(t)\,;$
3. $h(t)=\xi x(t)\,;$
4. $\hat{h}(t)=\xi\circ x(t)\,;$
5. $s(t)=e[r(t)-z(t)]\,;$
6. $y(t)=qa(t)\,;$
7. $a(t)=ey(t)\,;$
8. $g(t)=a(t)+e[y(t)+r(t)]\,;$
9. $x(t)\le p(0)+\Delta p(t)+\Delta c(t)\,;$
10. $\Delta P(t)e\le\Delta p^{+}(t)\,;$
11. $[X\circ\Delta P(t)]e\le\Delta p^{-}(t)\,;$
12. $\rho(t)=\{[C\circ\Delta P(t)]e\}e^{T}\,;$
13. $\hat{y}(t)\le\breve{y}(t)\,;$
14. $r(t)\le\frown{r}(t)\,;$
15. $\hat{z}(t)\le\frown{z}(t)\,;$
16. $s(t)\le\frown{s}(t)\,;$
17. $h(t)\le\frown{h}(t)\,;$
18. $\hat{h}(t)\le\breve{h}(t)\,;$
19. $\varphi(t)=(a(t),g(t),\rho(t))\,;$
20. $a(t)\to max\,;$
21. $g(t)\to max\,;$
22. $\rho(t)\to min\,;$
23. $T\to min\,,$

где

$x(t)$ – вектор валового выпуска продукции предприятий как функция времени t;

$\hat{A}$ – матрица коэффициентов всех видов затрат на производство продукции на предприятиях размерности $N*N$;

N – число предприятий, включенных в реализацию производственного проекта,

$y(t)$ – вектор выпуска конечной продукции в заданном ассортименте;

$\hat{y}(t)$ – вектор выпуска конечной продукции в свободном ассортименте;

$r(t)$ – вектор выпуска продукции на экспорт;

$f(t)$ – вектор выпуска оборудования для оснащения перепрофилируемых или новых предприятий или цехов;

$z(t)$ – вектор закупок предприятиями импорт. товаров;

$\hat{h}(t)$ – вектор количества занятых на предприятиях;

$h(t)$ – общее количество занятых на всех предприятиях (скаляр);

$\hat{U}$ – матрица коэффициентов прямых затрат импортных товаров и товаров внешних предприятий размерностью $M*N$;

M – количество видов импортных товаров и товаров, поступающих от внешних предприятий;

ξ – вектор трудоемкости производства продукции на предприятиях;

e – вектор, состоящий из единиц;

$s(t)$ – величина сальдо внешнеторгового баланса;

$a(t)$ – общий объем производства товаров;

q – вектор пропорций выпуска товаров в заданном ассортименте;

$g(t)$ – суммарный конечный продукт;

$p(0)$ – вектор производственных мощностей предприятий в начальный момент реализации заданного проекта;

$\Delta p(t)$ – вектор прироста (положительные значения) или убыли (отрицательные значения) производственных мощностей предприятий за счет проведения перепрофилирования мощностей;

$\Delta c(t)$ – вектор прироста производственных мощностей предприятий за счет нового строительства;

$\Delta p^{+}(t)$ – вектор, составленный из положительных значений компонент вектора $\Delta p(t)$;

$\Delta p^{-}(t)$ – вектор, составленный из отрицательных значений компонент вектора $\Delta p(t)$;

$\Delta P(t)$ – матрица долей избыточных производственных мощностей предприятий, перепрофилируемых под выпуск продукции предприятий с дефицитом мощностей;

x – матрица коэффициентов перепрофилирования;

$\rho(t)$ – общая стоимость затрат на перепрофилирование;

C – матрица коэффициентов удельных затрат на проведение перепрофилирования;

e^T – единичный вектор-строка (транспонированный вектор-столбец);

$\breve{y}$ – вектор минимального выпуска конечной продукции предприятий в свободном ассортименте;

$\hat{r}$ – вектор минимального выпуска продукции предприятий на экспорт;

$\hat{z}$ – вектор максимальных объемов импорта товаров;

$\hat{s}$ – минимальная величина сальдо внешнеторгового баланса;

$\hat{h}(t)$ – максимальное количество трудоспособного населения, которое может быть занято на предприятиях реализуемого проекта;

$\breve{h}(t)$ – вектор количества занятых на предприятиях;

$\circ$ – знак поэлементного произведения векторов или матриц,

$\varphi(t)$ – векторная целевая функция, состоящая из трех компонент – скалярных величин $a(t)$, $g(t)$ и $\rho(t)$.

$W(t)$ – вектор выпуска продукции предприятий в качестве промежуточной продукции для внешних предприятий

Вектор ξ в данной модели является вектором-строкой, а остальные векторами-столбцами. В условиях данной задачи и ниже произведения векторов рассматриваются как скалярные, вектор-столбец умножается на матрицу справа. В данной задаче, которую будем обозначать как общую задачу (1), требуется определить максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, определяемый величиной $a(t)$, а также максимизировать суммарный конечный продукт – величину $g(t)$ и минимизировать издержки при перепрофилировании производственных мощностей предприятий $\rho(t)$.

Будем далее обозначать векторно-матричную запись модели как 1-23 по номерам уравнений, ограничений и целевой функции. В ранее разработанных межотраслевых моделях оптимизационного характера [5, 23, 25] соотношения 10-12 из модели 1-23 не рассматривались, а в качестве целевой функции принимались лишь скалярные величины или функционалы.

Сформулированная задача является стохастической динамической нелинейной многокритериальной оптимизационной задачей. Стохастический характер модели 1-23 заключается в том, что современные производственные процессы происходят в условиях технических и экономических рисков. Эти риски в определенной степени можно учесть, считая параметры рассмотренной модели 1-23 являются в той или иной степени неопределенными. Неопределенность параметров можно разделить на три вида:

- неопределенность, присущая вообще природе больших социальных систем, в том числе и экономических, связанная с действием большого количества неучтенных природных и социальных факторов, которые обуславливают изменение территориальных и технологических связей;
- неопределенность, связанная с недостатком информации о точных численных значениях параметров модели;
- неопределенность, возникающая в связи с приближенным моделированием процесса.

Рассмотрим последние два вида неопределенностей применительно к параметрам изложенной выше оптимизационной динамической модели реализации заданного экономического проекта. Примером неопределенности, связанной с недостатком информации о точных численных значениях параметров, могут быть размеры производственных мощностей предприятий.

Хотя процесс реализации производственного проекта в общих чертах можно моделировать, тем не менее отдельные его стороны всегда остаются неопределенными. Такую неопределенность можно представить в виде неопределенности числовых значений параметров рассматриваемого процесса. В частности, к ним могут быть отнесены компоненты вектора потребления конечной продукции, коэффициенты прямых материальных затрат, упомянутые производственные мощности предприятий, количество трудоспособного населения, которое может быть занято в производстве товаров и услуг и т.д.

Таким образом, учитывая, что большинство параметров рассмотренной модели являются неопределенными, решение, полученное на этой модели также будет неопределенным в некоторых границах. Стохастическим программированием называют раздел математического программирования, изучающий теорию и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о параметрах условий задачи. Следовательно задачу 1-23 можно рассматривать и как задачу стохастического программирования, а поскольку задача является динамической и оптимизационной, то и как стохастическую задачу оптимального управления.

Обозначим множество параметров задачи 1-23 как $M_{par}(t)$, которое является случайной функцией, множество выходных переменных через $X(t)$. Задачу 1-23 представим в виде оператора L, преобразующего множество $M_{par}(t)$ в множество $X(t)$. Тогда задачу 1-23 можно рассматривать как динамическую систему на вход которой поступает случайная функция $M_{par}(t)$, а на выходе появляется случайная функция

$$X(t) = L\left\{M_{par}(t)\right\}. \tag{1.27}$$

Предполагаются известными характеристики случайной функции $M_{par}(t)$. Требуется найти характеристики случайной функции $X(t)$. Точное решение данной задачи в общем виде крайне затруднено, если не сказать непреодолимо. Автором разработана методика приближенного решения этой задачи, которая изложена в следующем разделе.

Сложность задачи 1-23 состоит, в частности, в ее нелинейности, которая заключается в том, что часть ограничений является функцией от решения задачи, а сама целевая функция является нелинейной. Такими ограничениями являются ограничения на количество занятых на предприятиях, а также ограничения на размеры изменения производственных мощностей предприятий. В ранее разработанных подобных моделях оптимизационного типа, насколько известно автору, рассматривались только линейные ограничения.

Предлагаемая формулировка задачи содержит ряд новых, ранее не включавшихся в подобные модели элементов-переменных, ограничений и уравнений. Приведем состав этих элементов, которые введены впервые в рассмотренную модель реализации заданного проекта.

Поскольку в качестве балансовых ранее разрабатывались лишь межотраслевые модели, то многие параметры предложенной модели хотя и имеют внешнюю аналогию с межотраслевыми моделями, но имеют содержание, соответствующее уровню производства на предприятиях. Это касается использования импортных товаров при изготовлении предприятиями собственной продукции и производстве товаров на экспорт, поскольку в предлагаемой модели рассматриваются конкретные продукты, а не обобщенный монопродукт, как в межотраслевых моделях, что позволяет более реально оценить структуру внешней торговли и определить возможности для изменения сальдо внешнеторгового баланса.

Ранее в аналогичных моделях обычно не задавалось ограничение на производство конечной продукции. В работах [23,25], показано что при максимизации скалярной целевой функции продукта в заданном ассортименте вектор производства конечной продукции становится равным минимальному значению, определяемому одним из ограничений на производственные мощности отраслей. В данной модели принято ограничение снизу на эту величину и, кроме того, она включена в качестве компоненты в векторную целевую функцию задачи, что позволяет определить также максимальные возможности выпуска продукции в свободном ассортименте, при условии формулировки приоритетов выпуска продукции того или иного вида.

1.2. Методика решения многокритериальной оптимизационной стохастической динамической задачи

Решение сформулированной в разделе 1.1 задачи реализации заданного производственного проекта, сводится к решению математической стохастической задачи многокритериального оптимального управления. Математическая постановка стохастической задачи существенным образом зависит от целевых установок и информационной структуры задачи. В практических приложениях используются задачи двух типов [40-44]. В задачах первого типа определяются статистические характеристики множеств идентичных экстремальных систем с отличающимися численными значениями параметров. Задачи такого типа называются задачами пассивного стохастического программирования. Задачи второго типа предназначены для построения методов и алгоритмов управления в условиях неполной информации. При этом в задачах второго типа всегда присутствует этап наблюдения за системой. Поскольку наблюдение за системой в ходе решения экстремальной задачи в нашем случае не предполагается, то остается выбрать постановку задачи стохастического программирования первого типа.

Тогда в качестве характеристик неопределенности входных параметров задачи можно принять заданные экзогенно функции распределения этих параметров, а решение задачи стохастического программирования будут представлять функции распределения выходных параметров и их числовые характеристики, например, средние значения, дисперсии и др.

Общий метод решения стохастической динамической оптимизационной задачи 1-23 состоит в ее многоуровневой иерархической декомпозиции на ряд взаимосвязанных задач. Прежде всего эта задача декомпозируется на детерминированную и стохастическую. Сначала задача 1-23 решается в детерминированной постановке, а затем в стохастической.

При решении задачи 1-23 в детерминированной постановке важным моментом является формулировка способов сведения векторной целевой функции к скалярной. В некоторых работах по теории исследования операций утверждается, что критерий эффективности в любой модели операции единственный и стремление к его увеличению (уменьшению) является целью операции [48]. По этой причине часто векторный критерий стараются свести к скалярному, разрабатывая для этого различные способы. Однако существует и другая точка зрения, согласно которой формальные способы свертки векторного критерия к скалярному не всегда продуктивны [49]. В последней работе подчеркивается, что для векторного критерия целесообразно, прежде всего, максимально полно исследовать частные решения, соответствующие компонентам векторного критерия и, в частности, упоминается нередко используемый метод построения компромиссного решения на основе условной оптимизации. Суть этого метода заключается в том, что сначала выделяется наиболее важный критерий и проводится оптимизация по этому критерию при условии задания ограничений на другие критерии [23, 49].

Применяя принцип логического анализа векторного критерия задачи 1-23 можно констатировать, что осуществить его свертку к скалярному не целесообразно, т.к. в общем случае не удается сформулировать способ свертки, который имел бы определенное смысловое содержание. Это касается и свертки с использованием некоторых весовых коэффициентов, поскольку не представляется возможным получить значения этих коэффициентов на основе измерений каких-либо объективных показателей. Кроме того, в задаче присутствуют такие параметры, которые сами должны быть определены в результате решения многокритериальной задачи. К ним относятся показатели оптимального распределения производственных мощностей при перепрофилировании производственных мощностей предприятий, потребности в дополнительных производственных мощностях и т.д.

Трудность решения многокритериальной оптимизационной задачи 1-23 также состоит в ее нелинейности. Для преодоления этих трудностей предлагается использовать метод, изложенный в [23] с некоторым обобщением, которое заключается в том, что после оптимизации по наиболее важному критерию проводится оптимизация по другому критерию при заданном ограничении на первый критерий в виде полученного раньше решения и затем оптимизируется третий критерий при заданных ограничениях на первые два в виде полученных ранее решений. Цикл таких оптимизаций может быть повторен, если этот процесс будет сходиться.

Численное решение детерминированной задачи 1-23 также затруднено из-за непрерывности временной зависимости. Обычно в таких случаях переходят к конечно-разностным аналогам с дискретным временем. В предлагаемой методике также осуществляется переход к дискретной по времени модели, но с тем различием, что сначала выделяется статическая оптимизационная задача. Дело в том, что решение предлагаемой выделенной статической оптимизационной задачи можно интерпретировать как решение динамической оптимизационной задачи с двумя точками по времени: начальной и конечной. После того как решена статическая оптимизационная задача на основе исходного и конечного значений фазовых переменных задачи в начальной и конечной точках моделируется движение во времени точки фазовых переменных и решается динамическая задача максимизации выпуска конечной продукции на траектории от начальной до конечной точки на основе принципа оптимальности Р. Беллмана [50-53]. При этом динамическая модель строится на основе более детальных данных, чем статическая модель, что позволяет получить более приближенные к реальности данные о динамике выходных показателей, чем в статической оптимизационной модели.

После того, как решена задача 1-23 в детерминированной постановке, наступает очередь ее решения в стохастической постановке.

В этой постановке задача 1-23 решается не в общем виде, а как и для детерминированной постановки сначала для статической, а затем для динамической моделей. Для статической модели определяются функции распределения и числовые характеристики выходных показателей в зависимости от функций распределения параметров на основе пассивного подхода к решению стохастической задачи [40]. Суть его заключается в следующем. В статическом варианте задачу 1-23 можно записать, исключив время из операторного уравнения (1.27):

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}\left\{\boldsymbol{M_{par}}\right\}. \qquad (1.28)$$

Допустим, что при всех реализациях случайной функции $\boldsymbol{M_{par}}$ существуют оптимальные решения задачи (1.28). Пассивный подход к задаче стохастического программирования заключается в вычислении функции распределения $\boldsymbol{X}$ по заданным распределениям параметров $\boldsymbol{M_{par}}$.

Для динамической модели функции распределения и их числовые характеристики определяются на основе допущения о представлении динамического дискретного процесса в виде цепей Маркова [44, 54-55]. Основанием для такого представления служит то, что динамический процесс 1-23 представляется в виде:

$$\boldsymbol{X(t)} = \hat{\boldsymbol{L}}\left\{\boldsymbol{M_{par}(t)}\right\},$$

где $\hat{\boldsymbol{L}}$ оператор динамического оптимизационного процесса, в котором соблюдены условия для представления динамического процесса в виде цепей Маркова. Оператор $\hat{\boldsymbol{L}}$ определяется в части 3 при решении детерминированной динамической оптимизационной задачи 1-23.

После того, как получены числовые характеристики стохастических задач, осуществляется коррекция детерминированных решений сначала статической и затем динамической модели с учетом полученных отклонений средних показателей стохастических задач от первоначальных решений детерминированных задач.

Предлагаемую методику решения задачи 1-23 можно рассматривать как реализацию метода декомпозиции [22]. Задача 1-23 декомпозируется на частные подзадачи, которые затем решаются по отдельности, и далее осуществляется синтез решения посредством последующего объединения решений частных задач. Сначала общая задача декомпозируется по признаку стохастичности на стохастическую и детерминированную. Детерминированная задача декомпозируется на статическую и динамическую, при этом в статическую задачу включается многокритериальная оптимизация. Проблема многокритериальнсти решается в статической задаче. Поскольку последняя задача является также нелинейной, то метод декомпозиции позволяет наряду с разрешением проблемы многокритериальности преобразовать нелинейную задачу в несколько взаимосвязанных линейных задач, которые решаются методом последовательных приближений.

Многокритериальная задача с векторным критерием из трех компонент декомпозируется на три взаимосвязанных однокритериальных задачи, а нелинейность устраняется посредством выделения нелинейной части общей задачи в самостоятельную однокритериальную линейную задачу. В общей задаче 1-23 векторная целевая функция включает три компоненты:

1. Объем производства конечной продукции в заданном ассортименте.
2. Объем производства конечной продукции как в заданном, так и в свободном ассортименте.
3. Общая стоимость проведения перепрофилирования производственных мощностей предприятий.

При формулировании общей оптимизационной задачи 1-23 было принято, что приоритет между ними принадлежит производству конечной продукции в заданном ассортименте, поэтому именно с этой компоненты оптимизационной задачи целесообразно начинать решение. Далее следует критерий максимизации выпуска конечной продукции как в заданном, так и свободном ассортименте и в последнюю очередь оптимизируется критерий издержек перепрофилирования производственных мощностей, поскольку его реализация представляет собой один из дополнительных факторов роста производственных мощностей.

Кроме того, этот критерий не противоречит первым двум, поскольку снижение издержек позволяет более экономно использовать имеющиеся возможности для увеличения производственных мощностей по выпуску конечной продукции, и, тем самым, уменьшить период времени, необходимый для выхода на максимальный уровень производства. Данный процесс далее повторяется необходимое количество раз для получения решения с заданной точностью.

Выводы

В первой части статьи на основе модели межотраслевого баланса разработана оптимизационная динамическая стохастическая модель, описывающая реализацию производственного проекта по выпуску продукции в заданном ассортименте. В результате моделирования может быть определена организационная структура группы предприятий, которая требуется для реализации заданного проекта. В эту группу входят имеющиеся в момент анализа производственные мощности предприятий, производственные мощности предприятий и цехов, образующиеся в результате перепрофилирования избыточных производственных мощностей, выявляемых при анализе потребных производственных мощностей, а также вновь созданные производственные мощности.

Кроме организационной структуры моделируются производственные процессы на предприятиях, которые включают моделирование затрат на закладку производимой продукции, включая материальные, трудовые и другие затраты, моделирование выпуска конечной продукции, моделирование формирования запасов промежуточной продукции на предприятиях, с учетом возможностей по ее производству на других предприятиях и доставке на анализируемое предприятие, моделирование монтажа оборудования на перепрофилируемых предприятиях, моделирование строительства новых предприятий, моделирование динамики ввода в действие перепрофилированных и новых производственных мощностей, моделирование подготовки кадров и организации труда на предприятиях.

Кроме организационных структур и производственных процессов моделируются условия технических и экономических рисков посредством задания ряда параметров модели в виде случайных значений, распределенных по некоторым законам на отрезках их изменения. В результате такого моделирования организационные структуры и производственные процессы могут отличаться от детерминированных значений, получаемых без учета технических и экономических рисков.

Предложенная модель записывается в виде динамической стохастической многокритериальной нелинейной оптимизационной задачи, решение которой стандартными методами практически невозможно. Основная трудность при решении состоит в целевой функции, представленной в виде нескольких критериев. Предложен метод решения поставленной задачи посредством ее декомпозиции на ряд задач на нескольких уровнях и решения общей задачи посредством последовательных приближений.

На первом уровне модель декомпозируется на детерминированную и стохастическую. Детерминированная модель декомпозируется на статическую и динамическую. Статическая нелинейная оптимизационная модель декомпозируется на несколько взаимосвязанных линейных задач, которые решаются методом последовательных приближений. В результате решения статической нелинейной оптимизационной задачи определяется оптимальная структура производственных мощностей, необходимая для реализации заданного производственного проекта, оптимальная структура перепрофилирования имеющихся производственных мощностей, производственные мощности, которые необходимо вновь построить. Решение статической оптимизационной задачи соответствует по времени конечной точке реализации заданного производственного проекта.

На основе решения статической оптимизационной задачи далее осуществляется моделирование динамики всех процессов, которые приводят к реализации заданного производственного проекта. Это моделирование также выполняется на основе оптимизации динамических процессов. Поэтому в результате такого моделирования определяется оптимальная траектория точки процесса в фазовом пространстве и, тем самым, определяется минимальное время для реализации заданного производственного проекта.

Эти процессы включают моделирование выпуска продукции на имеющихся производственных мощностях и осуществление, одновременно, перепрофилирования избыточных производственных мощностей под выпуск продукции, для которой имеющихся производственных мощностей не хватает и одновременное строительство новых цехов и предприятий, которые также необходимы для реализации заданного производственного проекта.

При моделировании производства продукции на предприятиях отражаются процессы формирования всех видов затрат на закладку продукции и обеспечение производственного процесса и выпуска продукции различного вида с учетом длительности производственных циклов. Моделируется также накопление и расходование запасов промежуточной продукции, необходимой для закладки, обеспечения производственного процесса и выпуска производимой продукции с учетом возможностей производства этой продукции на других предприятиях и времени ее доставки.

При моделировании производства продукции на предприятиях также учитывается подготовка необходимых кадров и организация труда. Моделирование подготовки кадров осуществляется на основе данных, получаемых из решения статической оптимизационной задачи, где определяется потребное количество трудовых ресурсов для реализации заданного производственного проекта. При моделировании подготовки кадров учитывается имеющееся количество трудовых ресурсов с разбивкой по специальностям.

Моделирование подготовки кадров осуществляется в виде решения задачи оптимальной по критерию минимума времени переобучения имеющихся трудовых ресурсов на предприятиях на специальности, которые дополнительно требуются для реализации заданного производственного проекта. В результате этого моделирования определяется количество трудовых ресурсов с различными требуемыми специальностями, как функция времени, которые могут быть заняты на предприятиях.

При моделировании перепрофилирования производственных мощностей учитываются время производства оборудования от момента его заказа, время доставки на перепрофилируемые предприятия, время монтажа этого оборудования (с учетом демонтажа старого оборудования), наладочных работ. С учетом перечисленных факторов определяется время ввода в действие перепрофилированного предприятия (цеха).

При моделировании строительства новых предприятий учитывается время строительства зданий и сооружений в зависимости от занятых мощностей строительных предприятий и их распределения по строительным объектам, время производства заказанного оборудования, время его доставки на строительные объекты, время его монтажа и наладки. В итоге с учетом перечисленных факторов определяется время ввода в действие вновь построенных предприятий (цехов).

Моделирование технических и экономических рисков проектирования организационных структур и производственных процессов осуществляется применительно к статической и динамической задачам. В результате решения стохастической статической задачи определяются возможные отклонения выходных значений в конечной точке по времени реализации заданного производственного проекта. После анализа этих результатов окончательные данные для проектирования организационных структур и планирования производственных процессов могут быть откорректированы. Выходные данные стохастической оптимизационной задачи далее используются при моделировании динамических процессов в условиях технических и экономических рисков, т.е. при решении стохастической динамической оптимизационной задачи. В результате решения этой задачи окончательно определяется траектория точки процесса в фазовом пространстве с учетом технических и экономических рисков.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУР И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Моделирование и оптимизация производства конечной продукции в заданном ассортименте

В первой части статьи разработана модель производственных процессов на предприятиях, обеспечивающих реализацию заданного производственного проекта. Оптимизационная математическая модель формулируется в виде системы уравнений и ограничений 1-18 и целевой функции 19. Решение этой оптимизационной задачи предлагается находить посредством ее декомпозиции на статическую нелинейную однопродуктовую многокритериальную задачу, динамическую однокритериальную многопродуктовую задачу и стохастическую задачу, являющуюся аналогом статической задачи. Решение статической многокритериальной оптимизационной нелинейной задачи методом условной оптимизации предполагает ее декомпозицию на три однокритериальные взаимосвязанные линейные задачи. Сформулируем первую из этих задач.

Для этого выделим уравнения и ограничения, описывающие перепрофилирование производственных мощностей в отдельную задачу, уравнения и ограничения, связанные с внешней торговлей будем также рассматривать в отдельной задаче. Уравнение 4 и ограничение

18 общей задачи выражающие количество занятых на предприятиях, которое определяются в динамической модели также опустим. В статической оптимизационной задаче нет необходимости включать это уравнение в связи с тем, что результат решения этой задачи представляет собой конечную точку по времени общей задачи. Кроме того, положим значения переменных $\hat{y}_i$ и r_i равными их граничным значениям, определенных неравенствами 13-14 общей задачи, величину w_i объединим с величиной f_i и обозначим через $\hat{w}_i$ и положим равной ее значению в конце периода реализации заданного производственного проекта, а в качестве целевой функции выберем величину a – общий объем производства конечной продукции в заданном ассортименте. Тогда первую однокритериальную статическую задачу в векторно-матричной форме можно записать так:

$$x = \hat{A}x + \breve{y} + \widehat{r} + y + \widehat{w}\ ; \qquad (2.1)$$

$$\hat{z} = \hat{U}x\ ; \qquad (2.2)$$

$$h = \xi x\ ; \qquad (2.3)$$

$$y = qa\ ; \qquad (2.4)$$

$$a = ey\ ; \qquad (2.5)$$

$$x \le p\ ; \qquad (2.6)$$

$$\hat{z} \le \widehat{z}\ ; \qquad (2.7)$$

$$h \le \widehat{h}\ ; \qquad (2.8)$$

$$a \to max\ , \qquad (2.9)$$

где

x – вектор валового выпуска продукции предприятий;

$\hat{A}$ – матрица коэффициентов материальных и других затрат на производство продукции (размерностью $N*N$);

N – число предприятий включенных в реализацию заданного проекта;

y – вектор выпуска конечной продукции в заданном ассортименте;

$\widehat{w}$ – суммарный вектор выпуска производственного оборудования и товаров для внешних предприятий;

$\hat{z}$ – вектор затрат предприятиями импортных товаров и товаров внешних предприятий;

h – общее количества занятых на всех предприятиях;

U – матрица коэффициентов затрат импортных товаров и товаров внешних предприятий (размерностью $N*M$);

M – количество видов затрачиваемых импортных товаров и товаров внешних предприятий;

ξ – вектор трудоемкости производства продукции на предприятиях;

e – вектор, состоящий из единиц;

a – общий объем производства товаров в заданном ассортименте;

q – вектор пропорций выпуска товаров в заданном ассортименте;

p – вектор производственных мощностей предприятий в конечный момент реализации заданного проекта;

$\breve{y}$ – вектор минимального выпуска конечной продукции предприятий в свободном ассортименте;

$\widehat{r}$ – вектор минимального выпуска предприятиями товаров на экспорт;

$\widehat{z}$ – вектор максимальных затрат импортных товаров и товаров внешних предприятий;

$\widehat{h}$ – максимальное количество трудоспособного населения, которое может быть занято на предприятиях реализуемого проекта.

Вектор ξ в данной задаче является вектором-строкой, а остальные векторами-столбцами. В условиях данной задачи и ниже произведения векторов рассматриваются как скалярные, вектор-столбец умножается на матрицу справа. В данной задаче требуется определить максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, определяемый величиной $a(t)$ при условиях и ограничениях (2.1)-(2.8).

Данная оптимизационная задача представляет собой задачу линейного программирования, которую можно решить стандартными методами. Однако в условиях этой задачи имеется соотношение, позволяющее решить ее значительно проще. Это соотношение (2.4), отражающее факт выпуска конечной продукции в заданном ассортименте. По сути дела, это соотношение означает, что в качестве целевой функции рассматривается одна переменная – общий объем производства конечной продукции в заданном ассортименте. Задача такого вида, но без уравнения (2.2) и ограничения (2.7) рассматривалась в работах [23-25], где также приводится ее решение. В работе [23] решение задачи этого типа дается без подробного его обоснования, а в [25] приводится математическое доказательство. В данной работе разработана альтернативная и более простая методика получения решения и его доказательство. Решение будет получено методом декомпозиции и последующего синтеза полученных решений декомпозированных подзадач.

Условие (2.4) позволяет декомпозировать данную задачу на несколько подзадач, решение каждой из которых можно получить в виде аналитических формульных зависимостей, на основе которых затем можно синтезировать общее решение. В состав декомпозированной задачи входят три подзадачи, каждая из которых включает одно из ограничений на переменные. Первая подзадача включает ограничение только на производственные мощности предприятий. Вторая содержит ограничение только на объемы затрат импортных товаров и товаров внешних предприятий. Третья включает ограничение только на численность трудоспособного населения. Целевой функцией каждой из этих задач является скалярная величина – объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, который требуется максимизировать.

Запишем ограничения этих подзадач в преобразованной форме. Для получения преобразованного ограничения первой подзадачи подставим в уравнение (2.1) вместо вектора y его выражение из уравнения (2.4). После этого решаем полученное уравнение относительно вектора x. Это решение имеет вид:

$$x = B(\breve{y} + \widehat{r} + \widehat{w} + qa)\ , \qquad (2.10)$$

где

B – матрица обратная к матрице $I - \hat{A}$;

I – единичная матрица.

Затем подставляем это выражение для вектора x в неравенство 6 задачи (2.6), выражающее ограничение на производственные мощности предприятий. Тогда это неравенство примет форму

$$p \geq B(\breve{y} + \hat{r} + \hat{w} + qa).$$

Решение первой подзадачи, включающей только последнее ограничение, можно получить следующим методом. Из предыдущего векторно-матричного неравенства после преобразований можно получить систему неравенств для искомой величины a общего объема производства продукции в заданном ассортименте, которая записывается в следующем виде:

$$a \leq \frac{[p - B(\breve{y} + \hat{r} + \hat{w})]_i}{[Bq]_i}, \ i = \overline{1,N}.$$

Все численные значения переменных в правой части системы этих неравенств имеют фиксированные значения, поэтому вся правая часть – это числа. Обозначим эти числа через a_i. Запишем предыдущие неравенства в виде:

$$a \leq a_i, \ i = \overline{1,N}.$$

Тогда первую подзадачу можно сформулировать в следующем виде: найти максимальное значение величины a, которое удовлетворяет системе предыдущих неравенств, т.е. не превосходит ни одного из чисел a_i. Таким значением является минимальное число из последовательности чисел a_i, $i = \overline{1,N}$. Таким образом, решением первой подзадачи является значение $a^{(1)}$, которое определяется из условия

$$a^{(1)} = \min_i(a_i), \ i = \overline{1,N}.$$

Содержательным смыслом числа a_i является тот возможный уровень общего объема производства конечной продукции в заданном ассортименте, определяемом вектором q, когда производственные мощности всех предприятий кроме i-го имеют неограниченные размеры, т.е. ограничивающими являются только производственные мощности i-го предприятия. Первую подзадачу можно представить как композицию N частных задач, в каждой из которых задано только одно ограничение на производственные мощности i-го предприятия.

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать содержательный смысл последней формулы. Решение первой подзадачи – максимальный общий объем производства конечной продукции в заданном ассортименте определяется синтезом N частных задач и представляет собой минимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, получаемый из решения этих N частных задач, поскольку только этот объем обеспечивается одновременно заданными производственными мощностями всех предприятий, т.е. ограничениями на валовой выпуск продукции предприятий. Докажем теперь строго, что решением первой подзадачи является именно величина $a^{(1)}$.

Обозначим через l индекс предприятия, для которого величина a_i, $i = \overline{1,N}$ имеет минимальное значение. Проведем это доказательство от противного. Пусть решением первой подзадачи будет любое число не равное a_l, например, число a_k, большее, чем a_l. Следует заметить, что этим числом не может быть число меньшее, чем a_l, т.к. сразу получаем противоречие, поскольку найдется число, большее, чем a_k и удовлетворяющее ограничениям данной подзадачи, например, число a_l.

Вычислим теперь величину валового выпуска l-го предприятия при этом объеме производства конечной продукции в заданном ассортименте (обозначим ее через x_l), которая определяется по формуле

$$x_l = \sum_{j=1}^{N} b_{lj}(\breve{y} + \hat{r} + \hat{w} + qa_k),$$

где b_{ij} – элемент матрицы B.

При решении частной задачи с ограничением только на производственные мощности l-го предприятия его валовой выпуск был равен производственной мощности, выражение которой можно записать в виде:

$$p_l = \sum_{j=1}^{N} b_{lj}(\breve{y} + \hat{r} + \hat{w} + qa_l).$$

Сравнивая правые части выражений для x_l и p_l видим, что они отличаются только одним слагаемым, где стоят величины a_l и a_k, причем $a_l \leq a_k$. Поэтому в силу линейности выражений для x_l и p_l из них следует, что $x_l > p_l$. Это неравенство противоречит тому, что валовой выпуск любого предприятия должен быть меньше или равен его производственной мощности. Поскольку в качестве a_k можно взять любое число, большее a_l, то полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Запишем теперь ограничение второй подзадачи в преобразованной форме. Для этого подставим выражение для вектора x из (2.10) во второе уравнение задачи (2.2), которое примет вид:

$$z = \hat{U}B(\breve{y} + \hat{r} + \hat{w} + qa).$$

Затем подставим это выражение для вектора z в неравенство (2.7), которое будет выглядеть так:

$$\hat{z} \geq \hat{U}B(\breve{y} + \hat{r} + \hat{w} + qa).$$

Также, как и в первой подзадаче из предыдущего матрично-векторного неравенства посредством преобразований получим систему неравенств для возможных значений искомой величины a, которая записывается в следующем виде:

$$a \leq \frac{[\hat{z} - \hat{U}B(\breve{y} + \hat{r} + w)]_i}{[\hat{U}Bq]_i}, \ i = \overline{1+N, N+M}.$$

Обозначим числа в правой части этих неравенств в виде a_i, $i = \overline{1+N, N+M}$. Тогда аналогично первой подзадаче максимальный объем производства заданной конечной продукции во второй подзадаче, обозначаемый через $a^{(2)}$ определяется формулой

$$a^{(2)} = \min_i\{a_i\}, \ i = \overline{N+1, N+M}.$$

Содержательный смысл величин a_i, $i = \overline{1+N, N+M}$ это максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте в одной из M задач, на которые декомпозируется вторая подзадача. Каждая из этих задач включает только одно из ограничений на объемы потребления импортных товаров и товаров внешних предприятий i-го типа, $i = \overline{1,M}$. Как и в первой подзадаче в силу линейности уравнений можно аналогично доказать, что значение $a^{(2)}$ действительно максимальное и не может быть увеличено.

Запишем теперь условие третьей подзадачи, включающей только ограничение на количество занятых. Для этого подставим в уравнение (2.3) выражение (2.9) для вектора x. В результате получим уравнение

$$h = \xi B(\breve{y} + \hat{r} + w + qa).$$

Заменим теперь в этом уравнении вектор y на его выражение из уравнения (2.4) и подставим полученное выражение для величины h в неравенство (2.8), выражающее ограничение на количество занятых, которое будет выглядеть

$$\hat{h} \geq tB(\breve{y} + \hat{r} + w + qa). \qquad (2.11)$$

Как и в предыдущих подзадачах, после выполнения преобразований с этим неравенством, получаем выражение для интервала возможных значений искомой величины a в следующем виде:

$$a \leq \frac{\hat{h} - \xi B(\breve{y} + \hat{r} + w)}{\xi Bq}.$$

В данной подзадаче имеется одно скалярное ограничение, в силу чего максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, обозначаемый через $a^{(3)}$ будет равен правой части предыдущего неравенства, обозначаемой через a_{N+M+1}.

$$a^{(3)} = a_{N+M+1}.$$

Действительно, если допустить, что максимальное значение больше этой величины, то будет нарушено неравенство (2.11). Если допустить, что меньше этой величины, то сразу получаем противоречие, т.к. легко найти большее значение, удовлетворяющее условию данной подзадачи, например, саму величину a_{N+M+1}.

Содержательный смысл величины $a^{(3)}$ – это максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, который может быть получен, если нет ограничений на производственные мощности предприятий и на потребление товаров не конкурирующего импорта, а ограничивающим является только общее количество занятых.

После того, как решены все подзадачи, для получения общего решения их синтез осуществляется так же, как и при решении этих подзадач. Тогда максимальный объем производства конечной продукции, как решение общей задачи, обозначаемый через a^*, определяется по формуле

$$a^* = \min_k a^k, \; k = \overline{1,3},$$

или как синтез решений задач, на которые декомпозируются частные подзадачи

$$a^* = \min_i \{a_i\}, \; i = \overline{1, N+M+1}.$$

Учитывая доказательства решений подзадач, легко показать, что величина a^* максимальная в решаемой задаче. Действительно, пусть $a^* = a_l$, где l – индекс, на котором реализовалось максимальное значение. Допустим теперь, что эта величина не максимальная. При этом значение меньшее, чем a_l не может быть, т.к. можно найти большее значение, удовлетворяющее всем условиям задачи, например, значение a_l. Пусть искомое значение больше a_l.

Индекс l соответствует определенной подзадаче. Выше было показано, что решением любой подзадачи является минимальное значение из величин a_i. Поэтому получаем противоречие, что решением может быть значение, большее минимального из величин a_i. Доказательство получено.

Разработанный метод решения общей задачи посредством декомпозиции на подзадачи позволяет не только значительно уменьшить объем вычислений по сравнению со стандартными методами решения задач линейного программирования, но и одновременно позволяет устранить несовместность ограничений общей задачи, что случается достаточно часто ввиду неопределенности ряда параметров задачи (производственных мощностей предприятий, минимальных объемов производства конечной гражданской продукции и т.д.).

Основой для устранения несовместности является требование, чтобы величины a_i, $i = \overline{1, N+M+1}$ были неотрицательными. Если какая-либо из этих величин имеет отрицательное значение, то это означает, что соответствующее ограничение является несовместным.

Устранение несовместности выполняется посредством изменения численного значения ограничения. Таким образом, устранение несовместности ограничений осуществляется, по существу, в процессе расчета максимального объёма производства заданной конечной продукции посредством проверки неотрицательности соответствующих векторно-матричных и скалярных неравенств. Если какое-либо из неравенств не выполняется, то в диалоговом режиме можно изменить соответствующее ограничение.

2.2. Моделирование и оптимизация производства конечной продукции

Модель оптимизации производства конечной продукции представляет собой вторую задачу из трех, на которые декомпозируется статическая нелинейная многокритериальная задача при ее решении методом условной оптимизации. В этой задаче требуется максимизировать суммарное производство конечного продукта как в заданном, так и в свободном ассортименте – вторую компоненту векторной целевой функции общей задачи первой части статьи при условии, что задано значение первой компоненты векторной целевой функции, полученной при решении первой задачи.

Для решения данной задачи в соответствии с принятым методом условной оптимизации выпуск конечной продукции в заданном ассортименте полагается равным значению, найденному при решении первой задачи (2.1)-

(2.9). Это означает, что фактически в данной задаче максимизируется выпуск продукции в свободном ассортименте. В данной задаче как и в задаче (2.1)-(2.9) отсутствуют соотношения, связанные с перепрофилированием производственных мощностей предприятий, но остаются от общей задачи ограничения на выпуск конечной продукции и сальдо внешнеторгового баланса. В моделях подобного типа, насколько известно автору, последние ограничения не рассматривались.

Уравнения и ограничения в данной задаче аналогичны задаче (2.1)-(2.9) с тем различием, исключено соотношение (2.4), отражающее выпуск товаров в заданном ассортименте, но включены уравнения для выпуска продукции в свободном ассортименте и уравнение и ограничение сальдо внешнеторгового баланса. Кроме того, в уравнении (2.1) величина $\boldsymbol{y}$ из задачи (2.1)-(2.9) заменяется на ее значение, полученное при решении первой статической оптимизационной однокритериальной задачи.

В данной задаче требуется определить значения векторов $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{z}$, такие, чтобы выпуск конечной продукции был максимальным при фиксированном объеме производства конечной продукции в заданном ассортименте, полученном при решении задачи (2.1)-(2.9). Эту задачу в векторно-матричной форме можно записать так:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} + \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{r} + \widehat{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{qa}^{*}\ ; \qquad (2.12)$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Ux}\ ; \qquad (2.13)$$

$$\boldsymbol{h} = \xi\boldsymbol{x}\ ; \qquad (2.14)$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{z})\ ; \qquad (2.15)$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}(\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{r})\ ; \qquad (2.16)$$

$$\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{p}\ ; \qquad (2.17)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} \ge \breve{\boldsymbol{y}}\ ; \qquad (2.18)$$

$$\boldsymbol{r} \ge \widehat{\boldsymbol{r}}\ ; \qquad (2.19)$$

$$\boldsymbol{z} \le \widehat{\boldsymbol{z}}\ ; \qquad (2.20)$$

$$\boldsymbol{s} \ge \widehat{\boldsymbol{s}}\ ; \qquad (2.21)$$

$$\boldsymbol{h} \le \widehat{\boldsymbol{h}}\ ; \qquad (2.22)$$

$$\boldsymbol{d} \to \boldsymbol{max}\ , \qquad (2.23)$$

где $\boldsymbol{d}$ – общий объем выпуска конечной продукции в свободном ассортименте и на экспорт.

Рассмотрим сначала один частный случай, в котором предполагается, что все производственные мощности предприятий могут быть полностью загружены. Максимальный объем производства конечной продукции в этом частном случае можно определить из уравнения (2.12), положив в нем

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}\ .$$

Тогда после преобразований из уравнения (2.12) получаем выражение для максимального объема производства конечной продукции (обозначим его через вектор $\dot{\boldsymbol{y}}$ равный сумме векторов $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{r}$ и $\widehat{\boldsymbol{w}}$) в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{qa}^{*}\ . \qquad (2.24)$$

Компоненты вектора $\dot{\boldsymbol{y}}$ могут иметь все неотрицательные значения или же включать отрицательные значения. Рассмотрим сначала первый случай, когда все компоненты вектора $\dot{\boldsymbol{y}}$ имеют неотрицательные значения. Этот частный случай соответствует ситуации, когда размеры производственных мощностей всех предприятий сбалансированы между собой.

Поскольку вектор $\dot{\boldsymbol{y}}$ представляет собой сумму конечной продукции, производимой в свободном ассортименте, на экспорт и промежуточной продукции для предприятий вне реализуемого проекта, то необходимо выделить из него долю конечной продукции, идущей на экспорт. Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами, которые определяются типом задаваемых ограничений на объемы внешней торговли.

Ограничения на объемы экспорта и импорта товаров являются альтернативой ограничению на величину сальдо внешнеторгового баланса, поскольку при одновременном произвольном задании граничных значений объемов экспорта и импорта и величины сальдо они в общем случае будут несовместны.

В частности, если заданы только ограничения на объемы экспорта и импорта, то объем производимой продукции на экспорт будет максимальным, если положить вектор производства конечной продукции в свободном ассортименте равным его минимальному значению (равным вектору $\breve{\boldsymbol{y}}$) и учесть, что производство промежуточной продукции для предприятий вне реализуемого проекта является более приоритетным. Тогда объем продукции, которая может производиться на экспорт, обозначаемый через $\dot{\boldsymbol{r}}$ определяется как разность

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{y}} - \breve{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{w}}\ .$$

Хотя в общем случае два типа ограничений на внешнеторговые связи несовместны, в принципе их можно рассматривать вместе, но тогда их нужно согласовать. Для этого нужно проверить выполнение ограничения (2.21):

$$\boldsymbol{e}(\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{Up}) \ge \widehat{\boldsymbol{s}}\ . \qquad (2.25)$$

Если это условие выполняется, то сальдо внешнеторгового баланса согласовано с ограничениями на объемы экспорта и импорта товаров. В противном случае нужно увеличить сальдо внешнеторгового баланса. Для этого следует увеличить экспорт или уменьшить импорт товаров. Поскольку производственные мощности всех предприятий полностью загружены, то увеличить производство продукции на экспорт уже нельзя. Остается только уменьшить объем импорта. Обозначим через $\Delta\boldsymbol{s}$ требуемое увеличение сальдо внешнеторгового баланса, которое вычисляется по формуле

$$\Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{Up} - \dot{\boldsymbol{r}})\ .$$

Уменьшение импорта может быть выполнено различными способами. Например, предположим, что импорт уменьшается пропорционально для всех предприятий посредством умножения на коэффициент меньший единицы, который обозначим через λ. Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{\Delta\boldsymbol{s}}{\widehat{\boldsymbol{s}}}\ .$$

Тогда возможный объем импорта, обозначаемый через $\dot{\boldsymbol{z}}$ будет равен:

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \lambda\boldsymbol{Up}\ .$$

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые компоненты вектора $\dot{\boldsymbol{y}}$ имеют отрицательные значения. Это означает, что вычитаемое в правой части уравнения (2.24), т.е. величина $p(E-A)$, меньше уменьшаемого, т.е. величины qa^*. В этом случае остается только уменьшить величину a^*, т.е. объем выпуска конечной продукции в заданном ассортименте. Для этого определим сначала отрицательную компоненту вектора $\dot{y}$ с максимальным абсолютным значением. Обозначим ее индекс через k. Запишем уравнение (2.24) для этой компоненты в виде:

$$\dot{y}_k = [p(E-A)]_k - q_k a^* . \qquad (2.26)$$

Теперь можно найти новый объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, такой чтобы все компоненты вектора $\dot{y}$ были неотрицательными. Для этого в уравнении (2.26) положим $\dot{y}_k$ равным нулю и из полученного уравнения найдем новую величину a^*, обозначаемую через a^{**}

$$a^{**} = \frac{[p(E-A)]_k}{q_k} .$$

При этом индекс k не должен быть равен индексу k в a_k при решении задачи (2.1)-(2.9). Следует отметить, что величина a^{**} заведомо меньше a^*. Отсюда, однако не следует вывод, что величина a^{**} не является оптимальной по критерию максимальности. В данной задаче рассматривается частный случай решения общей задачи 1-18 из первой части статьи в статической постановке, а именно задача максимизации критерия d при полной загрузке производственных мощностей предприятий. Если баланса производственных мощностей предприятий нет, то это приводит к отрицательным значениям $\dot{y}$. Следствием устранения отрицательности значений этого вектора является уменьшение оптимального (максимального) значения a. Это означает только одно, что приоритет в данной частной задаче при решении общей многокритериальной задачи 1-18 отдается критерию d. Однако это имеет место только в данной частной задаче и в данном частном случае при выявлении возможностей производства при балансе производственных мощностей.

В общем случае решения частной задачи максимизации критерия d при получении положительного решения этот критерий приобретает максимальное значение при условии максимума критерия a. Следует также отметить, что в общем случае получение положительного решения не гарантируется ввиду возможной несовместности условий. Предложенный алгоритм решения этой задачи позволяет найти оптимальное решение или убедиться в несовместности ограничений.

Поскольку предприятия выпускают продукцию как в заданном ассортименте, так и в свободном, то после того, как найден новый объем выпуска продукции в заданном ассортименте, можно определить максимальные возможности и по выпуску продукции в свободном ассортименте и на экспорт. Для этого надо решить задачу (2.12)-(2.23) с новым значением величины a^*, равным a^{**}.

При рассмотрении частного случая, когда $x = p$, остается еще проанализировать ограничение на количество занятых на предприятиях т.е. неравенство (2.22). Подставив выражение для h из уравнения (2.14) в неравенство (2.22) и учитывая, что $x = p$ получим

$$\xi p \le \hat{h} .$$

Если это неравенство не выполняется, то трудовых ресурсов недостаточно, чтобы обеспечить полную загрузку производственных мощностей предприятий. Для того, чтобы обеспечить выполнение этого ограничения надо каким-либо способом уменьшить значения вектора валового выпуска. В частном случае это можно сделать, если принять допущение, что трудовые ресурсы распределяются пропорционально валовому выпуску на предприятиях. Обозначим через ϑ коэффициент, меньший единицы, на который надо умножить вектор производственных мощностей, чтобы получить общее число занятых равным $\hat{h}$. Тогда этот коэффициент определяется из соотношения

$$\vartheta = \frac{\hat{h}}{\xi p} .$$

Если же в этом случае требуется определить максимальный объем производства конечной продукции, необходимо решать задачу (2.12)-(2.23) в общем случае.

Задача (2.12)-(2.23) в общем случае представляет собой задачу линейного программирования, которую можно решить стандартными методами. Однако специфика условий, в частности, совместное задание ограничений на импорт товаров и сальдо внешнеторгового баланса, может приводить к их несовместности. Для того, чтобы обеспечить полный контроль над процессом решения и возможность оперативного устранения несовместности исходных данных, разработан алгоритм решения задачи (2.12)-(2.23), основой которого служит известный метод последовательного улучшения плана задачи линейного программирования.

Суть изменения стандартного алгоритма состоит в том, что на основе специфики решаемой задачи предварительно находится опорный план, значение целевой функции которого достаточно близко к оптимальному (максимальному) значению. Причем, одновременно с нахождением этого опорного плана, обеспечивается устранение несовместности ограничений (согласование исходных данных). Кроме того, исходя из специфики рассматриваемой задачи, разработаны некоторые другие элементы алгоритма, упрощающие его реализацию на компьютере.

Первоначальный опорный план находится следующим способом. Положим значение искомых векторов $\hat{y}$ и r равными их граничным значениям и заменим эти векторы и вектор $\hat{w}$ на один вектор $\ddot{y}$: $\ddot{y} = \breve{y} + \hat{r} + \hat{w}$ и подставим их в уравнение (2.12). Тогда это уравнение можно решить относительно вектора x. Это решение можно записать в следующем виде:

$$x_0 = B(\ddot{y} + qa^*) .$$

Из теории линейного программирования известно [36, 39, 55, 71-77], что x_0 и $\ddot{y}$ представляют собой план задачи (2.12)-(2.23). Покажем теперь условия, при которых этот план будет опорным.

Для этого подставим выражение для z из уравнения (2.13) в неравенство (2.19), а выражение для h из уравнения (2.14) в неравенство (2.22), в результате чего получим неравенства

$$Ux \le \hat{z} ; \ \xi x \le \hat{h} . \qquad (2.27)$$

Присоединим к этим неравенствам ограничение (2.17) для вектора $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{p} . \qquad (2.28)$$

Допустим для вектора $\boldsymbol{x_0}$ выполняются неравенства в ограничениях (2.27)-(2.28). После этого нужно проверить ограничение на величину сальдо внешнеторгового баланса задачи (2.21), поскольку оно может быть несовместным с ограничением на импорт в товарном разрезе. Если это ограничение не выполняется, уменьшаем значения вектора $\boldsymbol{x_0}$ по методике, рассмотренной выше для частного случая, когда

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} .$$

Если при проверке неравенств (2.27)-(2.28) хотя бы одно из условий не выполняется, то в этом случае в диалоговом режиме следует уменьшить численные значения тех компонент вектора $\ddot{\boldsymbol{y}}$, для которых значения соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{x_0}$ не удовлетворяют этим неравенствам. Уменьшение можно выполнить различными способами, например, воспользоваться методикой, изложенной выше для частного случая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$. В этом случае одновременно устраняется несовместность ограничений на сальдо внешнеторгового баланса (если она есть). После этого заново повторяются вычисления компонент вектора $\boldsymbol{x_0}$ и т.д., до тех пор, пока не будут выполнены условия (2.8)-(2.9). Допустим теперь, что вектора условий задачи (2.12)-(2.23) соответствующие компонентам вектора $\boldsymbol{x}$ линейно независимы. Тогда согласно определениям из теории линейного программирования [36, 39, 55] план задачи (2.12)-(2.23), составленный из векторов $\boldsymbol{x_0}$ и $\ddot{\boldsymbol{y}}$ будет опорным.

После того, как найден начальный опорный план задачи (2.7), выполняется итерационная процедура последовательного улучшения опорного плана до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Если целевая функция данной задачи не ограничена, то метод последовательного улучшения плана позволяет установить это за конечное число шагов. В данном алгоритме имеется возможность задавать двусторонние ограничения на искомые переменные. Это расширяет возможности расчета различных вариантов максимизации выпуска конечной продукции как в заданном так и свободном ассортименте.

Если двухсторонние ограничения заданы для всех переменных, то целевая функция не может быть неограниченной. В том случае, когда при вариантном расчете какие-либо из двухсторонних ограничений не заданы, то в предлагаемом алгоритме они автоматически дополняются недостающими ограничениями по правилу: если не задано нижнее ограничение, то оно принимается равным нулю; если не задано верхнее ограничение, то оно принимается равным числу, большему, чем максимальное возможное число в данной задаче.

В этом случае решение формально всегда будет получено, что делает алгоритм нечувствительным к различным ошибкам и неточностям в задании исходных данных. При этом неограниченность целевой функции устанавливается тем, что хотя бы одна переменная в полученном решении принимает значение, равное максимальному значению ограничений в задаче.

2.3. Моделирование и оптимизация издержек при проведении перепрофилирования производственных мощностей

В соответствии с методом условной оптимизации в данную однокритериальную оптимизационную статическую задачу входят соотношения, выражающие перепрофилирования производственных мощностей при минимизации издержек. Это соотношения 10-12 общей задачи 1.22, которые в статической форме (без временной зависимости) представляются в виде:

$$\Delta \boldsymbol{P} \boldsymbol{e} \le \Delta \boldsymbol{p}^{+} ; \qquad (2.29)$$

$$(X \circ \Delta \boldsymbol{P}) \boldsymbol{e} \le \Delta \boldsymbol{p}^{-} ; \qquad (2.30)$$

$$\rho = [(\boldsymbol{C} \circ \Delta \boldsymbol{P}) \boldsymbol{e}] \boldsymbol{e}^{T} ; \qquad (2.31)$$

$$\rho \to \min , \qquad (2.32)$$

где

$\Delta \boldsymbol{p}^{+}$ и $\Delta \boldsymbol{p}^{-}$ – векторы максимального прироста (положительные значения) или убыли (отрицательные значения) производственных мощностей предприятий за счет проведения перепрофилирования мощностей в конце периода реализации производственного проекта;

$\Delta \boldsymbol{P}$ – матрица долей избыточных производственных мощностей предприятий, перепрофилируемых под выпуск продукции предприятий с дефицитом мощностей в конце периода реализации производственного проекта;

X – матрица коэффициентов перепрофилирования;

ρ – общая стоимость затрат на перепрофилирование в течение всего периода реализации производственного проекта;

$\boldsymbol{C}$ – матрица коэффициентов удельных затрат на проведение перепрофилирования;

$\boldsymbol{e}$ – единичный вектор-столбец;

$\boldsymbol{e}^{T}$ – единичный вектор-строка (транспонированный вектор-столбец).

Данная оптимизационная задача формулируется так: найти матрицу $\Delta \boldsymbol{P}$, которая удовлетворяет ограничениям (2.29); (2.30) при условии минимизации функции ρ. Исходным условием решения этой задачи является наличие избыточных производственных мощностей предприятий, которые можно перепрофилировать в производственные мощности других предприятий, чтобы получить максимальный выпуск конечной продукции в заданном ассортименте. Следовательно для решения этой задачи должны быть заданы векторы $\Delta \boldsymbol{p}^{+}$ и $\Delta \boldsymbol{p}^{-}$. Однако они неизвестны, поскольку их и требуется определить в результате решения (отсюда и нелинейность общей оптимизационной задачи первой части статьи).

Эта задача может быть решена методом последовательных приближений совместно с решением задачи (2.1)-(2.9). Для этого сначала задается начальное приближение оценки общего максимального объема производства конечной продукции в заданных пропорциях. Обозначим этот объем через $\boldsymbol{a_0}$ и примем его сначала равным значению, полученному при решении задачи (2.1)-(2.9), т.е. $\boldsymbol{a}^{*}$. Затем подставляем это значение в уравнение (2.1) и получаем значение вектора валовых выпусков всех предприятий, обозначаемое через $\boldsymbol{x_0}$, необходимое для обеспечения объема производства конечной продукции в заданных пропорциях в размере, равном первому приближению.

Затем находим разность между вектором производственных мощностей $\boldsymbol{p}$ из задачи (2.1-2.9) и вектором $\boldsymbol{x_0}$, которую обозначим через $\Delta\boldsymbol{x_0}$

$$\Delta\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{x_0}.$$

Положительные компоненты этого вектора представляют собой избыточные производственные мощности предприятий, которые могут быть использованы для их перепрофилирования под производственные мощности предприятий, выпуск которых недостаточен. Эти предприятия и недостающие размеры их производственных мощностей, которые требуются для обеспечения производства конечной продукции в заданных пропорциях в объеме $\boldsymbol{a_0}$, определяются отрицательными компонентами вектора $\Delta\boldsymbol{x_0}$.

Обозначим через $\Delta\boldsymbol{x_0^-}$ вектор, образованный из отрицательных компонент вектора $\Delta\boldsymbol{x_0}$, а через $\Delta\boldsymbol{x_0^+}$ вектор, образованный из положительных компонент вектора $\Delta\boldsymbol{x_0}$. Теперь принимаем векторы $\Delta\boldsymbol{p}^+$ и $\Delta\boldsymbol{p}^-$ равными соответственно векторам $\Delta\boldsymbol{x_0^+}$ и $\Delta\boldsymbol{x_0^-}$.

Далее решаем задачу (2.29)-(2.32) определения оптимальной структуры перепрофилирования избыточных производственных мощностей, определяемых вектором $\Delta\boldsymbol{p}^+$ в недостающие производственные мощности предприятий, определяемых вектором $\Delta\boldsymbol{p}^-$.

Если в результате решения этой задачи устанавливается, что все недостающие производственные мощности предприятий могут быть созданы за счет перепрофилирования избыточных производственных мощностей и больше избыточных мощностей нет, то общий объем производства конечной продукции в заданном ассортименте, определяемый величиной $\boldsymbol{a_0}$, является максимально возможным для данной структуры и размеров производственных мощностей всех предприятий.

В противном случае могут быть два варианта. В первом из них все недостающие производственные мощности созданы, но еще остаются не использованными часть избыточных производственных мощностей предприятий. В этом случае объем производства конечной продукции в заданном ассортименте может быть увеличен. Сначала увеличим на один шаг значение величины $\boldsymbol{a_0}$ и повторим все расчеты. При этом уже в отличие от первой итерации нужно проверить выполнение всех условий задачи (2.1)-(2.9). Если эти условия выполняются, то переходим к решению задачи (2.29)-(2.32). Обозначим эту величину через $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_0} + \Delta\boldsymbol{a}$. Если в итоге решения задачи (2.29)-(2.32) опять приходим к этому же варианту, то снова увеличиваем значение $\boldsymbol{a_1}$ на шаг и повторяем расчеты до тех пор, пока не получим другой вариант – а именно, когда под перепрофилирование все избыточные производственные мощности использованы, но часть недостающих мощностей не может быть создана.

В этом случае уменьшаем шаг изменения величины $\boldsymbol{a_i}$ пополам, вычитаем новый шаг и повторяем описанные выше действия до тех пор, пока не получим первый вариант. Тогда снова делим шаг пополам и повторяем расчеты. Такое попеременное движение с увеличением и уменьшением величины $\boldsymbol{a_i}$ и последовательным уменьшением шага изменения этой величины выполняется до тех пор, пока значение шага не будет меньше заданного, принятого за точность последовательного приближения, в результате чего достигается решение – абсолютный максимальный объем производства конечной продукции в заданном ассортименте с учетом перепрофилирования производственных мощностей.

Как упоминалось выше, в ходе итераций необходимо проверять выполнение условий задач (2.1)-(2.9). Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то также как и в случае решения задачи (2.19)-(2.32) значение величины $\boldsymbol{a_i}$ также должны уменьшаться до тех пор, пока не будут выполнены все условия задачи (2.29)-(2.32).

Кроме векторов $\Delta\boldsymbol{p}^+$ и $\Delta\boldsymbol{p}^-$, для решения задачи (2.12)-(2.23) необходимо предварительно вычислить значения двух матриц – матрицу коэффициентов перепрофилирования X и матрицу удельных затрат на проведение перепрофилирования $\boldsymbol{C}$. Методика расчета этих матриц и постановка оптимизационной задачи (2.29)-(2.32), приведена в следующем разделе.

Задача (2.12) представляет собой распределительную задачу линейного программирования [78]. Для решения задач транспортного типа, к которой относится распределительная задача, целесообразно использовать алгоритм «венгерского» метода. Этот метод не чувствителен к зацикливанию решения при любых исходных данных, что важно для нашей задачи, т.к. для исходных данных характерна неопределенность параметров. Для компьютера была разработана программа на основе алгоритма «венгерского метода» решения транспортной задачи линейного программирования.

Для того, чтобы решить оптимизационную задачу (2.12) «венгерским» методом, сформулированным применительно к частному случаю распределительной задачи – транспортной задаче линейного программирования, необходимо ее преобразовать в стандартную форму этой задачи. С этой целью выполним преобразования переменных. Сначала освободимся от матрицы коэффициентов χ_{ij} в ограничении 2 задачи (2.12). Для этого обозначим

$$\boldsymbol{X_{ij}} = \frac{\Delta\boldsymbol{p_{ij}}}{\boldsymbol{b_i}}, \quad \boldsymbol{B_j} = \frac{\Delta\boldsymbol{p_{ij}}}{\boldsymbol{b_j}}, \quad \boldsymbol{A_i} = \frac{\boldsymbol{p_i}}{\boldsymbol{b_i}}, \quad \boldsymbol{C_{ij}} = \boldsymbol{c_{ij}}\boldsymbol{b_i}.$$

Из этих соотношений получаем

$$\Delta\boldsymbol{p_{ij}} = \boldsymbol{X_{ij}}\boldsymbol{b_i}, \quad \Delta\boldsymbol{p_j} = \boldsymbol{B_j}\boldsymbol{b_j},$$

$$\Delta\boldsymbol{p_i} = \boldsymbol{A_i}\boldsymbol{b_i}, \quad \boldsymbol{c_{ij}} = \frac{\boldsymbol{C_{ij}}}{\boldsymbol{b_i}}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения оптимизационной задачи (2.29)-(2.32), получим следующую запись

$$q = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} c_{ij} X_{ij} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{J} X_{ij} \le A_i \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ij} \le B_i \ ,$$

где I – общее число предприятий, производственные мощности которых требуется перепрофилировать под выпуск продукции других предприятий, общее число которых обозначается через J .

Эта запись также еще не является стандартной формой для транспортной задачи, для которой требуется представить ограничения в форме равенств. Для приведения к этой форме вводим фиктивное предприятие с индексом $I+1$ или фиктивное предприятие с индексом $J+1$ в зависимости от выполнения условия

$$\sum_{i=1}^{I} A_i \ge \sum_{j=1}^{J} B_j \ .$$

Если это условие выполняется, то вводится фиктивное предприятие с производственной мощностью A_{I+1}

$$A_{I+1} = \sum_{i=1}^{I} A_i - \sum_{j=1}^{J} B_j \ .$$

В противном случае вводится фиктивное предприятие с производственной мощностью B_{J+1}

$$B_{J+1} = \sum_{j=1}^{J} B_j - \sum_{i=1}^{I} A_i \ .$$

Для фиктивных предприятий вводятся фиктивные значения удельных затрат на перепрофилирование, которые превышают максимальную величину этих затрат в матрице c_{ij} , например, на единицу

$$c_{I+1,j} = max\, c_{ij} + 1 , \quad j = \overline{1,J} \ ;$$

$$c_{i,J+1} = max\, c_{ij} + 1 , \quad i = \overline{1,I} \ .$$

Тогда окончательно преобразованную задачу (2.12) запишем в стандартном виде транспортной задачи

$$\left.\begin{aligned} & q = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} c_{ij} X_{ij} \to min, \\ & \sum_{j=1}^{J} X_{ij} = A_i, \\ & \sum_{i=1}^{I} X_{ij} = B_i, \end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

где число предприятий, обозначаемых также через I и J уже включает фиктивные предприятия.

Содержательный смысл фиктивных предприятий заключается в том, что они выражают в одном случае избыток имеющихся производственных мощностей, а в другом потребность в производственных мощностях предприятий, которые нужно создать за счет перепрофилирования. Ясно, что в первом случае всегда можно покрыть потребность в перепрофилировании, а во втором случае всегда останется часть требуемых производственных мощностей предприятий, которые не удастся создать за счет перепрофилирования.

В алгоритме «венгерского метода» учитываются перевозки с запретами, что в интерпретации для задачи перепрофилирования означает невозможность перепрофилирования производственных мощностей ряда предприятий под выпуск продукции некоторых других предприятий.

Такие запреты определяются технико-экономическим анализом целесообразности перепрофилирования производственных мощностей предприятий под ту или иную продукцию. Этот анализ необходим, т.к. при использовании метода анализа сходства структур основных средств не всегда можно учесть все особенности сложного производства. В рассматриваемом алгоритме запрет на перепрофилирование задается нулевыми значениями элементов матрицы C_{ij} .

Алгоритм венгерского метода реализуется в виде последовательного улучшения матрицы X_{ij}^{k} с помощью вспомогательной матрицы $c_{ij}^{k},\ k = 0,1,2,...$, которая строится исходя из матрицы c_{ij} . Каждая итерация заканчивается построением улучшенной матрицы X_{ij}^{k} и проверкой выполнения условий задачи (вычисление неувязок).

Если эти условия не выполняются, осуществляется следующая итерация алгоритма, строится матрица c_{ij}^{k+1}, затем матрица X_{ij}^{k+1} и т.д., пока не будут удовлетворены условия задачи (2.33). Тогда решение считается найденным. На практике точное выполнение условий может не достигаться даже за значительное число итераций из-за ошибок округления компьютера. На этот случай предусмотрено прекращение итераций при заданном значении общей невязки условий.

В модели [17] также рассматривается задача перепрофилирования производственных мощностей, но не на уровне предприятий, а на уровне отраслей. Кроме того в рамках модели [17] не определяются дефицитные и избыточные производственные мощности, а задаются экзогенно, также, как и коэффициенты перепрофилирования и сам процесс перепрофилирования не оценивается с точки зрения издержек. В данной модели процесс перепрофилирования формулируется как оптимизационный, дефицитные и избыточные производственные мощности предприятий с точки зрения реализации заданного проекта определяются в рамках модели, как и коэффициенты перепрофилирования предприятий.

2.4. Моделирование перепрофилирования производственных мощностей

В данном подразделе излагается методика расчета коэффициентов перепрофилирования и коэффициентов, выражающих удельные затраты на перепрофилирование, которые входят в целевую функцию оптимизационной задачи из предыдущего подраздела. При анализе возможностей по преобразованию производственных мощностей в рамках реализации заданного производственного проекта наиболее важной задачей является определение тех избыточных производственных мощностей, которые наиболее целесообразно перепрофилировать в производственные мощности, необходимые для обеспечения реализации рассматриваемого экономического проекта.

Наиболее точно эту задачу можно решить посредством моделирования тех реальных процессов, которые осуществляются при перепрофилировании производственных мощностей. Основой этих процессов является замена части оборудования на преобразуемых предприятиях на оборудование, которое требуется для реализации заданного производственного проекта, например, выпуска того или иного вида продукции. Поэтому, в первую очередь, целесообразно перепрофилировать те предприятия, структура оборудования которых имеет наибольшее сходство с предприятиями, непосредственно выпускающими заданную конечную продукцию или обеспечивающую её выпуск.

Сходство структуры оборудования разных предприятий, можно количественно оценить с помощью показателя удельной стоимости проведения перепрофилирования. Приближенно можно считать, что стоимость перепрофилирования определяется в основном стоимостью установленного при проведении перепрофилирования оборудования.

Эту стоимость с точностью, достаточной для решения поставленной задачи, можно определить как разность между стоимостью оборудования на предприятии после и до проведения перепрофилирования. Обозначим через F_i – стоимость оборудования i-го предприятия до, а F_{i_j} после проведения перепрофилирования под выпуск продукции j-го предприятия, выпускающего конечную или промежуточную продукцию, $i \in M_D$, $j \in M_P$, где M_D – множество индексов предприятий, имеющих избыточные мощности для проведения перепрофилирования (предприятия-доноры), M_P – множество индексов предприятий, производственные мощности которых требуется увеличить (предприятия-реципиенты).

Введем две вспомогательные матрицы коэффициентов $\|\gamma_{ki}\|$ и $\|\gamma_{kj}\|$. Коэффициент γ_{ki} представляет собой долю оборудования, выпускаемого k-м предприятием, имеющегося на i-м предприятии. Коэффициент γ_{kj} имеет то же содержание для j-го предприятия.

Коэффициенты γ_{ki} и γ_{kj} можно рассчитать на основе анализа состава оборудования на предприятиях. Тогда коэффициенты γ_{ki} и γ_{kj} можно рассчитать по формулам

$$\gamma_{ki} = \frac{\Delta F_{ki}}{\sum\limits_{k \in M_F} \Delta F_{ki}}; \; \gamma_{kj} = \frac{\Delta F_{kj}}{\sum\limits_{k \in M_F} \Delta F_{kj}},$$

где

ΔF_{ki}, ΔF_{kj} – стоимость оборудования, выпускаемого на k-м предприятии, имеющееся соответственно на i-м и j-м предприятии;

M_F – множество предприятий, выпускающих оборудование.

Зная коэффициенты γ_{ki} и γ_{kj}, можно рассчитать структуру оборудования на i-м предприятии до и после проведения его перепрофилирования. Обозначим через $\|F_{ki}\|$ и $\|F_{ki_j}\|$ матрицы, элементы которых представляют собой стоимость оборудования, выпускаемого k-м предприятием, которые имеются на i-м предприятии соответственно до или после проведения перепрофилирования под выпуск продукции j-го предприятия.

Столбцы матриц $\|F_{ki}\|$ и $\|F_{ki_j}\|$ определяют структуру оборудования i-го предприятия соответственно до или после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j-го предприятия.

Элемент столбцов матриц $\|F_{ki}\|$ и $\|F_{ki_j}\|$ – это стоимость оборудования выпускаемого k-м предприятием, которое имеется на i-м предприятии соответственно до и после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j- го предприятия. Элементы матриц $\|F_{ki}\|$ и $\|F_{ki_j}\|$ можно выразить через общую стоимость оборудования i- го предприятия соответственно до и после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j- го предприятия, обозначаемые через F_i и F_{i_j} и коэффициенты γ_{ki} и γ_{kj} в следующем виде:

$$F_{ki} = F_i \gamma_{ki}; \; F_{ki_j} = F_{i_j} \gamma_{kj}; i \in M_D, \quad j \in M_P, \; k \in M_F.$$

Стоимость оборудования на i-м предприятии до проведения перепрофилирования (величину F_i) можно получить из анализа его основных средств, а стоимость оборудования на этом же предприятии после проведения перепрофилирования (величину F_{i_j}) требуется определить.

Это можно сделать, если выразить величину F_{i_j} через F_i. Предварительно введем частный коэффициент отдачи производственной мощности по оборудованию i-го предприятия, обозначаемый через f_i, который представляет собой отношение объема производства к стоимости оборудования i-го предприятия. Этот коэффициент можно записать в виде:

$$f_i = \frac{X_i}{F_i},$$

где X_i – объем производства на i - м предприятии до проведения перепрофилирования.

Аналогично можно записать частный коэффициент отдачи производственной мощности по оборудованию на i -м предприятии после его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия, обозначаемый через f_{i_j}

$$f_{i_j} = \frac{X_{i_j}}{F_i},$$

где X_{i_j} – объем производства на i -м предприятии после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия.

Эти коэффициенты можно использовать для определения функциональной связи стоимости оборудования до и после проведения перепрофилирования, поскольку в ходе перепрофилирования из состава основных фондов заменяется в основном лишь оборудование. Приближенно можно принять, что частный коэффициент отдачи производственной мощности по оборудованию на i -м предприятии после его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия мало отличается от коэффициента отдачи производственной мощности по оборудованию j -го предприятия.

Поэтому можно считать, что

$$f_{i_j} = f_j,$$

где f_j – частный коэффициент отдачи производственной мощности по оборудованию j -го предприятия.

Исходя из этого равенства можно записать следующее выражение для стоимости оборудования i -го предприятия после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия:

$$F_{i_j} = \frac{X_{i_j}}{f_j}.$$

Величина X_{i_j} в этой формуле неизвестна, поэтому ее требуется определить. Для этого нужно найти связь величин X_i и X_{i_j}, тогда можно определить, на сколько увеличится объем производства на i -м предприятии после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия. Введем коэффициент перепрофилирования χ_{ij} как отношение

$$\chi_{ij} = \frac{X_{i_j}}{X_j}.$$

Этот коэффициент показывает, на сколько изменится объем производства на i -м предприятии после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия. Объемы производства на предприятии до проведения перепрофилирования можно взять из статистических данных, а коэффициент перепрофилирования требуется рассчитать.

Для этого предварительно введем частный коэффициент отдачи производственной мощности по зданиям и сооружениям. Этот коэффициент, обозначаемый через b_i представляет собой отношение объема производства на i -м предприятии к стоимости зданий и сооружений на этом предприятии, который можно записать в виде:

$$b_i = \frac{X_i}{S_i},$$

где S_i – стоимость зданий и сооружений на i -м предприятии.

Обозначим через b_{i_j} частный коэффициент отдачи производственной мощности i -го предприятия по зданиям и сооружениям после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j -го предприятия, который можно записать в виде:

$$b_{i_j} = \frac{X_{i_j}}{S_i}.$$

Из определения частного коэффициента отдачи производственной мощности по зданиям и сооружениям можно получить выражения для объемов производства на i -м предприятии до и после проведения перепрофилирования, которые имеют вид

$$X_i = b_i S_i, \; X_{i_j} = b_{i_j} S_i.$$

Подставляя эти выражения для X_i и X_{i_j} в формулу для коэффициента перепрофилирования, получаем

$$\chi_{ij} = \frac{b_{i_j} S_i}{b_i S_i} = \frac{b_{i_j}}{b_i}.$$

Таким образом, коэффициент перепрофилирования χ_{ij} при перепрофилировании i -го предприятия под выпуск продукции j -го предприятия выражается через отношение частных коэффициентов отдачи производственной мощности по зданиям и сооружениям этого предприятия до и после проведения его перепрофилирования. В этом выражении для коэффициента перепрофилирования заключается допущение, что при перепрофилировании производства на предприятии здания и сооружения остаются, в основном, без изменений. Поэтому отношение частных коэффициентов отдачи производственной мощности предприятия до и после проведения его перепрофилирования выражает только отношение объемов производства продукции до и после перепрофилирования, которое и представляет собой коэффициент перепрофилирования.

Тогда объем производства на предприятии после проведения его перепрофилирования можно выразить через объем производства до проведения перепрофилирования и коэффициент перепрофилирования в виде соотношения

$$X_{i_j} = \chi_{ij} X_i.$$

Подставляя это выражение для величины X_{i_j} в выражение для F_{i_j}, получаем соотношение для стоимости оборудования i - го предприятия после проведения его перепрофилирования в следующем виде:

$$F_{i_j} = \frac{\chi_{ij} X_i}{f_j}.$$

Тогда элементы неизвестной матрицы $\left\| F_{ki_j} \right\|$ можно выразить через известные величины посредством соотношения

$$F_{ki_j} = \frac{\chi_{ij} X_i}{f_j}; \quad k \in M_F; \quad i \in M_D; \quad j \in M_P.$$

Теперь остается определить стоимость проведения перепрофилирования. Для этого вычисляем матрицу $\left\| \Delta F_{ki_j} \right\|$, представляющую собой разность матриц $\left\| F_{ki_j} \right\|$ и $\left\| F_{ki} \right\|$, элементы которой рассчитываются по формуле

$$\Delta F_{ki_j} = F_{ki_j} - F_{ki} = \frac{\chi_{ij} X_i}{f_j} \gamma_{kj} - F_i \gamma_{ki}.$$

Элементы этой матрицы могут быть положительными, отрицательными и нулевыми. Положительные элементы i -го столбца матрицы $\left\| \Delta F_{ki_j} \right\|$ показывают стоимость оборудования, выпускаемого на k -м предприятии, которое необходимо установить в процессе перепрофилирования i -го предприятия под выпуск продукции j -го предприятия. Неположительные (отрицательные и нулевые) k -е элементы i -го столбца этой матрицы означают, что оборудование, выпускаемое k -м предприятием есть в необходимом количестве на i -м предприятии до проведения его перепрофилирования, поэтому его устанавливать не надо.

Обозначим через $\Delta \hat{F}_{ki_j}$ те элементы матрицы $\left\| \Delta F_{ki_j} \right\|$, для которых выполняется условие

$$\Delta F_{ki_j} > 0.$$

Тогда общую стоимость перепрофилирования на i -м предприятии при перепрофилировании его под выпуск продукции j - го предприятия, обозначаемую через ΔS_{i_j} можно записать в виде:

$$\Delta S_{i_j} = \sum_{k \in M_F} \Delta \hat{F}_{ki_j},$$

где M_F – множество предприятий, из которых поступает оборудование на проведение перепрофилирования на i -м предприятии.

После того, как получена общая стоимость проведения перепрофилирования, можно рассчитать коэффициент удельных затрат на перепрофилирование на i -м предприятии под выпуск продукции j -го предприятия, обозначаемый через c_{ij}, который выражает отношение общей стоимости перепрофилирования к объему производства на i -м предприятии до проведения перепрофилирования

$$c_{ij} = \frac{\Delta S_{i_j}}{X_i}.$$

2.5. Моделирование строительства новых производственных мощностей

В данном подразделе излагается модель строительства новых производственных мощностей. В общей задаче первой части статьи в качестве ограничения вектора x валового выпуска продукции предприятий входит вектор Δc прироста производственных мощностей за счет нового строительства. Если в результате решения статической оптимизационной задачи (2.19)-(2.32) устанавливается, что и за счет перепрофилирования не удается расширить производственные мощности настолько, чтобы обеспечить заданный объем производства конечной продукции, то рассматривается возможность достичь этого за счет строительства новых предприятий или цехов, участков производства и т.д. В этом случае решается задача по расчету размеров производственных мощностей предприятий, которые необходимо построить, чтобы выпустить дополнительный объем требуемой конечной продукции.

В соответствии с принятым методом декомпозиции общей задачи (1) на статическую и динамическую в данной задаче также пренебрежем временем и стохастичностью. Предположим также, что строительство зданий и сооружений ведется предприятиями по строительству нежилых сооружений, которые для простоты агрегируются в одну строительную организацию. Обозначим производственные мощности этой группы предприятий через p_C.

Пусть в результате решения задачи (2.29)-(2.32) можно произвести заданную конечную продукцию в объеме a^{**}, а недостающий объем этой продукции составляет Δa. Тогда вектор размеров новых производственных мощностей Δp, которые требуется построить, чтобы обеспечить дополнительный выпуск продукции в объеме Δa определяются по формуле:

$$\Delta p = Bq\Delta a,$$

где

B – матрица коэффициентов полных затрат предприятий на производство продукции;

q – вектор пропорций выпуска конечной продукции в заданном ассортименте.

Запишем этот вектор в виде Δp_i, $i \in M_C$, где M_C множество предприятий, где ведется новое строительство. Для оценки возможностей по созданию этих производственных мощностей требуется определить объемы работ по строительству зданий и сооружений на каждом предприятии. Обозначим через S_i отношение стоимости зданий и сооружений на единицу производственных мощностей i -го предприятия

$$S_i = \frac{Q_i}{p_i},$$

где Q_i – стоимость зданий и сооружений на i -м предприятии с производственной мощностью p_i.

Тогда на i -м предприятии $i \in M_C$ надо построить здания и сооружения в объеме

$$\Delta Q_i = S_i \Delta p_i .$$

Требуемый общий объем строительства равен

$$\Delta Q = \sum_{i \in M_U} Q_i .$$

Определим теперь объем оборудования, который требуется установить на расширяемых предприятиях. В разделе 2.4 при изложении методики подготовки исходных данных в задаче оценки возможностей перепрофилирования производственных мощностей использовалась матрица коэффициентов γ_{ki}, представляющих собой долю оборудования предприятий k -го типа в общей стоимости оборудования i -го предприятия. С помощью этой матрицы можно определить объемы оборудования, производимые предприятиями, которые необходимы для установки на вновь строящихся предприятиях (цехах). Эти объемы можно вычислить по формуле

$$\Delta F_{ki} = \gamma_{ki} \Delta p_i , \quad i \in M_C .$$

Результаты определения размеров производственных мощностей, объемы строительных работ и количества оборудования, которое необходимо установить на вновь строящихся предприятиях (цехах) имеют самостоятельное значение. Кроме того эти результаты, как и результаты решения других статических задач, поступают в качестве исходных данных для решения динамических задач, рассматриваемых в третьей части статьи.

Выводы

Во второй части статьи моделируется конечное состояние реализации заданного производственного проекта, которое включает моделирование и оптимизацию производства продукции в заданном ассортименте, моделирование и оптимизацию производства конечной продукции, моделирование и оптимизацию издержек при проведении перепрофилирования производственных мощностей, моделирование перепрофилирования производственных мощностей, моделирование строительства новых производственных мощностей.

Конечное состояние фиксируется в точке времени, отстоящей от начала процесса на некоторый интервал, который определяется в третьей части статьи в результате моделирования динамики производственных процессов. Важным аспектом моделирования конечного состояния является его оптимизационный характер. Моделирование производства конечной продукции осуществляется с оптимизацией при различных вариантах ее выпуска (в заданном и свободном ассортименте), при различных условиях загрузки производственных мощностей и различных вариантах использования импортных товаров в качестве промежуточной продукции.

Оптимизационная модель, отражающая конечное состояние в результате реализации производственного проекта, является нелинейной многокритериальной оптимизационной задачей. Для решения этой задачи используется метод условной оптимизации, заключающийся в декомпозиции многокритериальной нелинейной оптимизационной задачи на несколько линейных задач со скалярными критериями и решении этих задач посредством последовательных приближений при фиксации значений других критериев, полученных при предыдущих решениях.

Для решения некоторых линейных задач предложены простые алгоритмы решений, основывающиеся на использовании специфических особенностей входящих в состав задачи уравнений и их содержательного смысла. Для решения других линейных задач предложены модификации и улучшения существующих методов.

Для решения оптимизационной задачи перепрофилирования производственных мощностей разработана методика и алгоритм расчета коэффициентов перепрофилирования, показывающие насколько изменится производственная мощность предприятия после проведения перепрофилирования. Кроме того разработана методика и алгоритм расчета видов и объемов оборудования, которые требуется установить на перепрофилируемых предприятиях для выпуска новой продукции, а также методика и алгоритм расчета коэффициентов удельных затрат на проведение перепрофилирования предприятий. Последние позволяют определить общую стоимость перепрофилирования предприятий, являющуюся критерием в этой оптимизационной задаче.

Разработан также алгоритм расчета потребных производственных мощностей предприятий, которые должны быть созданы за счет нового строительства, включающий расчет стоимости зданий, сооружений и оборудования, необходимого для установки на новых предприятиях. Процессы динамики производства продукции, перепрофилирования имеющихся производственных мощностей, строительства новых предприятий и ввод в действие перепрофилированных и новых предприятий рассматривается в третьей части статьи.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Методика решения задачи расчета динамики производственных процессов

В предлагаемой методике решения общей динамической многокритериальной оптимизационной задачи 1-23 осуществляется её декомпозиция на статическую и динамическую. В статической задаче решается проблема многокритериальности, а также находится оптимум целевой функции в конечной точке по времени реализации заданного проекта. В этой задаче определяются основные параметры оптимального управления для конечной точки реализации производственного проекта.

В динамической задаче остается найти оптимальное управление в каждой точке по времени динамического процесса. Для решения этой задачи динамический процесс формулируется так, что в каждой точке по времени реализуются такие значения управлений, которые обеспечивают достижение максимума целевой функции за наименьшее количество шагов по времени.

В соответствии с принятым методом декомпозиции общей задачи 1-23 части 1 данной статьи на статическую и динамическую задачи, в части 2 были получены решения оптимизационных статических задач, которые определяли точку в фазовом пространстве, отстоящую от начальной на некоторый период времени. Решение динамической части общей задачи 1-23 первой части статьи позволяет определить собственно этот отрезок времени, а также динамику изменения переменных общей задачи в течении этого промежутка времени.

Аналитическое решение динамической модели с непрерывным временем представляет весьма сложную проблему. Для практического решения динамическую модель целесообразно представить и решать в виде конечно-разностных уравнений и ограничений с дискретным временем. Данная модель, как и статическая является оптимизационной, целевой функцией которой служит выпуск конечной продукции.

Решением является выбор значений управляющих параметров, максимизирующих целевую функцию, которая представляет собой значения выпуска продукции на предприятиях в каждой точке по времени. Динамическая модель, как процесс, описывается фазовыми и управляющими переменными. Функциональная связь фазовых переменных на следующем шаге с фазовыми и управляющими переменными на предыдущем шаге представляет собой уравнение процесса. Оптимальное решение достигается на основе применения метода динамического программирования [50-55].

Оптимальная стратегия управления динамическим процессом обладает тем свойством, что каковы бы не были первоначальное состояние и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальную стратегию относительно состояния, полученного в результате первоначального решения [50-52, 54-55].

Целевой функцией данной динамической оптимизационной задачи является максимальное значение интенсивности выпуска конечной продукции в каждой точке по времени периода реализации производственного проекта. Этот максимум достигается посредством увеличения производственных мощностей предприятий, которое осуществляется за счет перепрофилирования избыточных производственных мощностей предприятий в дефицитные производственные мощности и за счет строительств новых цехов и предприятий. При этом в целях минимизации затрат размеры вводимых мощностей должны быть такими, чтобы производственные мощности были сбалансированы между собой по выпуску промежуточной продукции и также были бы достаточны для выпуска конечной продукции для реализации населению и на экспорт.

В период реализации заданного производственного проекта предприятия также выполняют заказы перепрофилируемых и вновь строящихся предприятий на поставки оборудования для их оснащения. Перепрофилирование должно выполняться таким образом, чтобы минимизировать издержки. Чтобы обеспечить загрузку новых производственных мощностей нужно оптимально перераспределить имеющиеся трудовые ресурсы. Таким образом, управлениями в данной динамической задаче являются функции изменения производственных мощностей предприятий и количество занятых на предприятиях. Оптимальной стратегией управления будет такая стратегия, при которой будет за минимальное время будет достигнута конечная точка процесса реализации производственного проекта.

Достижение максимума интенсивности выпуска конечной продукции в заданном и свободном ассортименте в каждой точке динамического процесса за минимальное время будет обеспечено при увеличении производственных мощностей до максимума и максимально полная их загрузка за минимальное время. Эти критерии и присутствуют в уравнениях динамики производственных процессов.

Максимальные размеры прироста производственных мощностей и потребное количество трудовых ресурсов определены в статической модели. Минимальное время наращивания производственных мощностей определяется максимально возможным в каждой точке по времени выпуском оборудования для расширяющихся производств за счет максимального выпуска промежуточной продукции для его изготовления, доставке на предприятия, максимально возможной закладке выпускаемого оборудования с учетом имеющихся запасов промежуточной продукции и количества занятых, с учетом времени доставки, при максимально возможном темпе монтажа и максимально возможном числе занятых на предприятиях.

Число занятых как функция времени определяется в результате решения оптимизационной задачи перераспределения и переобучения трудовых ресурсов на предприятиях. Принцип оптимальности применяется к строительным предприятиям, которые оптимально распределяются по строящимся объектам и в которых максимально используются производственные мощности для строительства новых объектов. Таким образом, в каждой точке по времени находится единственное решение, которое получено на основе оптимального управления и, тем самым, реализуется принцип оптимальности динамического процесса в целом.

Уравнение рассматриваемого динамического процесса представляет собой систему конечно-разностных уравнений и ограничений. Эта система разбивается на блоки и расчет в блоках выполняется в определенной логической последовательности, отражающей реальные процессы реализации заданного производственного проекта.

Помимо того, что расчеты выполняются по заданному алгоритму, предусмотрена возможность корректировки результатов на основе имитационного моделирования, когда определение того или иного результата зависит от конкретных условий или ограничений при применении человеко-машинных диалоговых процедур.

В число составных частей комплекса динамической моделей входят:

- модель формирования затрат на закладку выпускаемой продукции;
- модель выпуска конечной, промежуточной продукции и оборудования;
- модель монтажа оборудования на перепрофилируемых предприятиях;
- модель строительства новых цехов и предприятий;
- модель динамики ввода в действие перепрофилированных и новых производственных мощностей;
- модель подготовки кадров и организации труда на предприятиях.

3.2. Модель формирования затрат на закладку продукции

Динамика изменения валового выпуска предприятий в процессе реализации заданного производственного проекта может осуществляться за счет следующих основных факторов: повышения коэффициента сменности работы предприятий, расширения мощности за счет перепрофилирования производственных мощностей других предприятий, за счет нового строительства цехов и участков и дополнительных производственных мощностей.

Валовой выпуск в момент времени t зависит от текущей производственной мощности предприятия, наличия запасов промежуточной продукции, количества занятых и циклов производства продукции. Для того, чтобы произвести продукцию, надо сначала затратить сырье, материалы, комплектующие детали и узлы, т.е. осуществить закладку выпускаемой продукции. Объем закладки определяется имеющимися производственными мощностями, наличными запасами исходных материалов, узлов и деталей и количеством занятых на предприятии. Обозначим через $\hat{x}_i^t$ закладку выпуска продукции в момент времени t.

В качестве промежуточной продукции рассматривается промежуточная продукция, поставляемая предприятиями множества M_N, а также промежуточная продукция множества предприятий вне рассматриваемого проекта, которые обозначаются через M_Q. Кроме этого в качестве промежуточной продукции используются также импортные товары. Для удобства моделирования процесса затрат промежуточной продукции представим, что импортные товары поставляются условным предприятием, включенным в множество M_Q. Обозначим новое множество через $M_{\hat{Q}}$ и введем множество M_{NQ}, представляющее собой объединение множеств M_N и $M_{\hat{Q}}$.

Обозначим через V_{ijr}^t запасы на i – м предприятии промежуточной продукции r-го типа, выпускаемого j-м предприятием, где $j \in M_{NQ}$. Закладка связана с затратами промежуточной продукции и рабочей силы. Обозначим через $\hat{\alpha}_{ijr}$ коэффициенты прямых затрат материалов и товаров, которые представляют собой затраты на i-м предприятии продукции r-го типа, $j \in I_{NQ}$. Эти коэффициенты являются обобщением коэффициентов прямых затрат, введенных в первой части статьи и представляют собой коэффициенты прямых затрат α_{ij} на i-м предприятии продукции j-х предприятий множеств M_N и $M_{\hat{Q}}$ с разбиением по товарам, производимых этими предприятиями, а также импортных товаров.

В первой части статьи были введены затраты труда, на производство единицы продукции, которые представляют собой произведение коэффициента затрат труда, выражающее отношение заработной платы, выплаченной за месяц к месячному выпуску продукции на количество занятых в момент времени t, которое обозначим через $\hat{h}_i^t$. Введем величину θ_i, представляющую собой долю затрат труда в общих затратах на выпуск продукции.

Тогда затраты труда можно выразить через величину закладки в момент времени t в виде:

$$\theta_i \hat{x}_i^t = \mu_i \hat{h}_i^t .$$

Из этого выражения получаем, что объем закладки при имеющемся количестве занятых будет равен

$$\hat{x}_i^t = \frac{\mu_i \hat{h}_i^t}{\theta_i} . \qquad (3.1)$$

Соответствующий необходимый объем затрат промежуточной продукции, который обозначим через v_i^t будет равен

$$v_i^t = (1-\theta_i)\hat{x}_i^t .$$

Объем затрат также может быть выражен через коэффициенты материальных затрат:

$$v_{ijr}^t = \hat{x}_i^t \hat{a}_{ijr},\ i \in I_N,\ j \in M_{NQ},\ r \in M_R .$$

Сравнивая с предыдущим выражением получаем условие для проверки правильности расчетов коэффициентов материальных затрат

$$\sum_{j \in M_{NQ}} \sum_{r \in M_R} \hat{a}_{ijr} = (1-\theta_i) .$$

Количество занятых на предприятии $\hat{h}_i^t$ представляет собой функцию от времени, которая рассчитывается по методике, излагаемой в подразделе 3.8. При этом количество работников может превышать их количество, необходимое в данный момент времени, поскольку в связи с предполагаемым расширением производственной мощности за счет перепрофилирования других предприятий или нового строительства на рассматриваемое предприятие направляются дополнительные трудовые ресурсы для их последующего переобучения и использования после расширения производственной мощности.

Потребное в момент времени t количество занятых, обозначаемое через $\tilde{h}_i^t$ должно удовлетв. соотношению

$$\tilde{h}_i^t \le p_i^t \xi_i .$$

Если это неравенство выполняется, то количество занятых принимается равным $\hat{h}_i^t$. В противном случае количество занятых принимается равным $\tilde{h}_i^t$

$$\tilde{h}_i^t = p_i^t \xi_i . \qquad (3.2)$$

При этом соответственно изменится объем закладки, который обозначим через $\tilde{x}_i^t$

$$\tilde{x}_i^t = \frac{\mu_i \tilde{h}_i^t}{\theta_i} . \qquad (3.3)$$

После того, как определено фактическое количество занятых на предприятиях, надо рассчитать затраты промежуточной продукции. Обозначим через необходимые $\hat{v}_{ijr}^t$ затраты на i-м предприятии промежуточной продукции r-го типа, выпускаемой на j-м предприятии $j \in M_{NQ}$, $r \in M_R$, где M_R – множество продуктов, выпускаемых предприятиями множества M_{NQ}. Эти затраты соответствуют определенному выше объему закладки, которые вычисляются по формуле

$$\hat{v}_{ijr}^t = \tilde{x}_i^t \hat{a}_{ijr},\ i \in M_N,\ j \in M_{NQ},\ r \in M_R . \qquad (3.4)$$

Поскольку эти затраты ограничены имеющимися на предприятии запасами промежуточной продукции, то необходимо проверить выполнение неравенств

$$\hat{v}_{ijr}^{t} \le V_{ijr}^{t} .$$

Если эти неравенства выполняются, то объем закладки принимается равным величине $\tilde{x}_i^t$. В противном случае вычисляем величины Δv_{ijr}^t равные

$$\Delta v_{ijr}^{t} = \hat{v}_{ijr}^{t} - V_{ijr}^{t} . \qquad (3.5)$$

Величина закладки для любых индексов должна удовлетворять соотношению (3.4), поэтому должна определяться как минимальное значение из чисел, равных частному от деления Δv_{ijr}^t на $\hat{\alpha}_{ijr}$

$$\hat{x}_i^t = \min_{j,r} \frac{\Delta v_{ijr}^t}{\hat{\alpha}_{ijr}} .$$

Выполнив преобразования этого выражения с учетом соотношений (3.3)-(3.5) получим

$$\hat{x}_i^t = \min_{j,r} \frac{\left\{ \hat{a}_{ijr} \dfrac{\mu_i}{\theta_i} \min[\hat{h}_i^t, p_i^t \xi_i] \right\} - V_{ijr}^t}{\hat{\alpha}_{ijr}} . \qquad (3.6)$$

Теперь необходимо сформулировать уравнение для количества промежуточной продукции на предприятии в момент времени t, поскольку конечная продукция выбывает из производственного цикла, а промежуточная продукция доставляется на склады предприятий, где она будет использоваться в качестве исходной при закладке производственных циклов на этих предприятиях. Дальнейший путь оборудования рассмотрен в разделах (3.4); (3.5) при решении задач расчета потребных объемов оборудования и сроков его монтажа на перепрофилируемых и вновь строящихся предприятиях.

Ранее была введена величина V_{ijr}^t запасов на i-м предприятии промежуточной продукции r-го типа, выпускаемого на j-м предприятии и V_{ijr}^t их расход на t-м шаге. Теперь надо составить уравнение для расчета величины V_{ijr}^t на каждом t-м шаге по времени.

Обозначим через $\hat{V}_{ijr}^t$ количество отгруженной промежуточной продукции r-го типа с j го предприятия на i-е предприятие на текущем шаге. Тогда состояние запасов на i-ом предприятии продукции r-го типа, выпускаемого j-м предприятием в $(t+1)$-й момент времени определяется уравнением

$$V_{ijr}^{t+1} = V_{ijr}^{t} - v_{ijr}^{t} + \hat{V}_{ijr}^{t-\tau_{ijr}} , \qquad (3.7)$$

где τ_{ijr} – время доставки партии продукции r-го типа j-го предприятия на i-е предприятие.

Величина $\hat{V}_{ijr}^t$ рассчитывается на основе величины x_i^t валового выпуска i-го предприятия в момент времени t и коэффициентов затрат на i-м предприятии промежуточной продукции r-го типа, выпускаемой j-м предприятием

$$\hat{V}_{ijr}^{t} = x_i^t \alpha_{ijr} ,$$

где α_{jir} – коэффициент материальных затрат продукции r-го типа, выпускаемой i-м предприятием, приходящихся на единицу валового выпуска j-го предприятия.

Уравнение (3.6) рекуррентное, т.е. состояние запасов в последующий момент времени определяется исходя из предыдущего состояния. Поэтому нужно знать начальные запасы в момент $t = 0$. Эти запасы по предприятиям можно оценить на основе статистических данных за предыдущие годы. Обозначим объем запасов i-го предприятия в начальный момент реализации заданного проекта через V_j^0. Поскольку в объемы запасов может быть включено незавершенное производство и запасы собственной продукции, то их нужно исключить. Пусть ζ_{ijr} – доля запасов промежуточной продукции на i-м предприятии r-го типа, выпускаемой на j-м предприятии в начальный момент времени. Тогда величину запасов промежуточной продукции на i-м предприятии r-го типа, выпускаемой на j-м предприятии в начальный момент времени можно вычислить по формуле

$$V_{ijr}^{0} = \zeta_{ijr} V_j^0 .$$

3.3. Модель выпуска конечной, промежуточной продукции и оборудования

В предыдущем разделе была изложена модель для вычисления на каждом шаге по времени динамического процесса закладки для последующего выпуска конечной и промежуточной продукции. Собственно выпуск определяется на основе закладки из расчета длительности технологического цикла производства той или иной продукции. Продукция с низкой стоимостью единичного образца обычно имеет короткий цикл производства, а продукция с высокой стоимостью единичного образца чаще всего требует более длинного цикла производства.

В процессе расчетов на динамической модели стоимостные показатели требуется переводить в натуральные. Это необходимо потому, что измерение конечной продукции в стоимостной форме не дает представления о масштабах производства конечной продукции в натуральных единицах. Кроме того, представление промежуточной продукции в стоимостных единицах не позволяет моделировать ее доставку, хранение на складах и т.д. Для продукции с высокой стоимостью единичного образца перевод в натуральные единицы нужен также для того, чтобы моделировать производственный цикл, когда выпуск продукции осуществляется через определенное время после закладки образца.

Примем допущение, что выпуск продукции предприятиями осуществляется партиями через дискретные промежутки времени, размер которых определяется темпом закладки. Под партией будет пониматься количество единиц продукции, которую целесообразно или возможно отгружать заказчикам. Стоимость и количество единиц в партии зависит от вида продукции, выпускаемой предприятием и определяется экспертно для каждого предприятия и вида продукции.

Тогда отгрузка продукции в объемах, равных стоимости партии будет определяться в дискретные моменты времени t_{ir}, определяемые условием

$$\sum_{t=1}^{t=t_{ir}} \sum_{j \in M_{NQ}} \hat{x}_{ijr} = Y_{ir}\ ;\ i \in I_N\ ;\ l \in M_R\ ,$$

где

M_R – множество видов продукции, выпускаемых на предприятиях;

Y_{ir} – объем партии продукции в стоимостном выражении.

Объем отгрузки партии продукции r -го типа, выпускаемой на i -м предприятии в момент времени t, обозначаемый через Y_{ir}^t будет равен

$$Y_{ir}^t = \delta_{ir}^t Y_{ir}\ ,$$

где $\delta_{ir}^t = 1$ при $t = t_{ir}$ и $\delta_{ir}^t = 0$ при $t \neq t_{ir}$.

Теперь выпущенную валовую продукцию надо распределить по составляющим элементам: промежуточную продукцию, поставляемую другим предприятиям, оборудование для обеспечения перепрофилирования предприятий и нового строительства и конечную продукцию для населения. Предположим следующие приоритеты этого распределения: в первую очередь выделяется промежуточная продукция, затем оборудование для перепрофилирования и в последнюю очередь конечная продукция для населения. Объем промежуточной продукции складывается из двух величин. Первая величина, обозначаемая через $\hat{w}_i^t$, представляет собой объем промежуточной продукции для предприятий множества M_N, который определяется исходя из валового выпуска продукции предприятий и коэффициентов прямых затрат α_{ij}

$$\hat{w}_i^t = \sum_{j \in M_N} Y_i^t \alpha_{ij}\ .$$

Вторая величина, обозначенная в первой части статьи через w_i^t, представляет собой экзогенно задаваемые поставки промежуточной продукции на предприятия множества M_Q. Обозначим через Y_i^t общую величину выпуска продукции на i -м предприятии

$$Y_i^t = \sum_{r \in M_Q} Y_{ir}^t\ .$$

Тогда оставшийся после вычитания промежуточной продукции объем выпуска, обозначаемый через $\hat{Y}_i^t$, будет равен

$$\hat{Y}_i^t = Y_i^t - \hat{w}_i^t - w_i^t\ .$$

Предприятия, выпускающие конечную продукцию, можно разделить на три группы. В первую входят предприятия, выпускающие только конечную продукцию для населения, во вторую входят предприятия, выпускающие только оборудование для оснащения предприятий и в третью группу входят предприятия, выпускающие как конечную продукцию для реализации населению, так и для предприятий. В первом и втором случае конечная продукция в размере $\hat{Y}_i^t$ отгружается по назначению, а в третьем случае требуется ее распределить по назначению. Однако если учесть, что целью реализации заданного проекта является достижение максимума интенсивности производства конечной продукции в конце периода реализации проекта, то, следовательно, для ее достижения нужно максимально быстрее увеличить производственные мощности и, значит, в первую очередь надо производить оборудование для оснащения перепрофилируемых и новых предприятий и цехов. Поэтому на предприятиях третьей группы до момента полного оснащения перепрофилируемых и новых предприятий должно выпускаться только оборудование для предприятий.

Момент завершения выпуска на всех предприятиях оборудования r -го типа, обозначаемый через t_r^f, определяется исходя из потребностей в оборудовании для перепрофилируемых и новых предприятий, методика расчета которых представлена в предыдущих разделах. Потребность в оборудовании r -го типа составляется из оборудования, необходимого для перепрофилирования предприятий и оборудования для оснащения новых цехов и предприятий. Первое слагаемое, обозначаемое через ΔF_r, вычисляется посредством суммирования по всем перепрофилируемым предприятиям

$$\Delta F_r = \sum_{k \in M_F} \sum_{i \in M_D} \Delta F_{rki_j}\ .$$

Второе слагаемое, обозначаемое через ΔF_r^c, рассчитывается посредством суммирования элементов матрицы ΔF_{rki}^c

$$\Delta F_r^c = \sum_{k \in M_F} \sum_{i \in M_C} \Delta F_{rki}^c\ ,$$

где M_C – множество вновь строящихся предприятий (цехов).

Время t_r^f вычисляется из соотношения

$$\sum_{t=1}^{t_{ir}^f} \sum_{i \in M_F} \hat{Y}_{ir}^t = \Delta F_r + \Delta F_r^c\ .$$

3.4. Модель монтажа оборудования на перепрофилируемых предприятиях

Перечень предприятий, которые требуется перепрофилировать под выпуск продукции других предприятий определяется при решении статической оптимизационной задачи во второй части статьи. В этой части рассчитывается матрица

$\left\|\Delta p_{ij}\right\|, \quad i \in M_D, \; j \in M_P,$

где

M_D – множество индексов перепрофилируемых предприятий (доноров);

M_P – множество индексов предприятий (реципиентов), производственные мощности которых увеличиваются за счет перепрофилируемых предприятий-доноров.

Элемент этой матрицы представляет собой производственную мощность i-го предприятия, которую требуется перепрофилировать под выпуск продукции j-го предприятия. В этом же разделе вычисляются объемы оборудования, которое необходимо установить на перепрофилируемых предприятиях. Эти объемы определяются 2-х мерным массивом $\left\|\Delta F_{ki_j}\right\|$. Элементы этого массива показывают общую стоимость оборудования, выпускаемого k-м предприятием, имеющегося на i-м предприятии после проведения его перепрофилирования под выпуск продукции j-го предприятия.

В данном разделе моделируется динамика процесса монтажа оборудования на перепрофилируемых предприятиях. Во второй части статьи предполагалось, что оборудование, выпускаемое предприятиями для перепрофилирования производственных мощностей, рассматривается как монопродукт. При расчете динамики процесса монтажа оборудования целесообразно учитывать его более детально в виде набора типов оборудования, выпускаемого предприятиями. Для этого надо трансформировать матрицу $\left\|\Delta F_{ki_j}\right\|$.

Введем элемент 3-х мерного массива υ_{rki_j}, представляющий собой долю оборудования r-го типа, выпускаемого на k-м предприятии, которое нужно установить на i-м предприятии, перепрофилируемом под выпуск продукции j-го предприятия.

Обозначим через ΔF_{rki_j} элемент 3-х мерного массива, представляющий стоимость оборудования r-го типа, выпускаемого на k-м предприятии, которое необходимо установить в процессе перепрофилирования i-го предприятия под выпуск продукции j-го предприятия. Этот элемент вычисляется по формуле

$$\Delta F_{rki_j} = \upsilon_{rki_j} \Delta F_{ki_j}.$$

Темпы и сроки монтажа оборудования зависят от интенсивности проведения этих работ. Обычно монтаж оборудования осуществляется теми же предприятиями, которые выпускают это оборудование. Поэтому можно считать, что часть занятых на предприятиях специализируется на установке, стоимость которой входит в общую стоимость оборудования.

Обозначим через c_{rk} производительность установки оборудования r-го типа выпускаемого на k-м предприятии. Эта величина представляет собой стоимость оборудования, которое может быть установлено в единицу времени. Производительность установки оборудования можно рассматривать, условно говоря, в качестве производственной мощности по монтажу оборудования. Данные по стоимости устанавливаемого за единицу времени оборудования определяются на основе экономического анализа деятельности конкретных предприятий, выпускающих и устанавливающих свое оборудование. Поскольку поставщик может устанавливать оборудование одновременно у нескольких заказчиков, то нужно распределить по ним условную общую производственную мощность по установке оборудования. Допустим, что распределение общей производственной мощности между перепрофилируемыми предприятиями пропорционально количеству устанавливаемого оборудования и работы выполняются одновременно на всех предприятиях после поставки оборудования. Обозначим через c_{rki_j} производительность установки оборудования r-го типа выпускаемого на k-м предприятии, которое устанавливается на i-м предприятии, перепрофилируемом под выпуск продукции j-го предприятия. Эта величина рассчитывается по формуле

$$c_{rki_j} = c_{rk} \frac{\Delta F_{rki_j}}{\sum\limits_{i_j \in I_D} \sum\limits_{k \in I_F} \sum\limits_{r \in I_P} \Delta F_{rki_j}},$$

где

I_D – множество индексов перепрофилируемых предприятий;

I_F – множество индексов предприятий, выпускающих оборудование;

I_P – множество типов оборудования.

Производительность установки оборудования c_{rki_j} является величиной потенциальной и реализуется только в том случае, если все необходимое оборудование уже доставлено на перепрофилируемое предприятие. Реальная интенсивность на каждом шаге по времени t, обозначаемая через $c^t_{rki_j}$ зависит от текущих запасов оборудования. Обозначим через $\Phi^t_{rki_j}$ запасы оборудования r-го типа, выпускаемого на k-м предприятии, которое устанавливается на i-м предприятии, перепрофилируемом под выпуск продукции j-го предприятия.

Эти запасы в момент времени $t+1$ определяются из уравнения

$$\Phi^{t+1}_{rki_j} = \Phi^t_{rki_j} - f^t_{rki_j} + F^{t-\tau_{rki_j}}_{rki_j},$$

где $f^t_{rki_j}$ – передача в монтаж на i-м предприятии, перепрофилируемом под выпуск продукции j-го предприятия, оборудования r-го типа выпускаемого на k-м предприятии;

$F^{t-\tau_{rki_j}}_{rki_j}$ – количество поступившего на i-е предприятие, перепрофилируемое под выпуск продукции

j -го предприятия, оборудования r -го типа, выпускаемого на k -м предприятии;

τ_{rki_j} – время транспортировки на i -е предприятие, перепрофилируемое под выпуск продукции j -го предприятия, оборудования r -го типа, выпускаемого k -м предприятием.

Величину $F_{rki_j}^{t-\tau_{rki_j}}$ можно рассчитать на основе величины отгрузки партий оборудования, выпускающими их предприятиями F_{rk}^{t}, определенной в разделе 3.4 и пропорций распределения оборудования между перепрофилируемыми предприятиями. Положим, что объем отгружаемого оборудования распределяется между перепрофилируемыми предприятиями пропорционально объемам, которые необходимо установить. Тогда величину $F_{rki_j}^{t}$ можно рассчитать по формуле

$$F_{rki_j}^{t} = F_{rk}^{t} \frac{\Delta F_{rki_j}}{\sum\limits_{i_j \in M_D} \sum\limits_{k \in M_F} \sum\limits_{r \in M_{P_F}} \Delta F_{rki_j}},$$

где M_D – множество индексов предприятий перепрофилируемых предприятий;

M_F – множество индексов предприятий, выпускающих оборудование;

M_{P_F} – множество индексов типов оборудования.

Величина расхода $f_{rki_j}^{t}$ в момент времени t равна производительности $c_{rki_j}^{t}$, умноженной на шаг по врем.

$$f_{rki_j}^{t} = c_{rki_j}^{t} \Delta t .$$

Если на шаге по времени выполняется неравенство

$$c_{rki_j}^{t} \Delta t \le \Phi_{rki_j}^{t},$$

то производительность установки оборудования максимальна и равна $f_{rki_j}^{t}$. В противном случае производительность принимается равной величине $\Phi_{rki_j}^{t}$.

Установка оборудования r -го типа, выпускаемого k -м предприятием, на i -м предприятии, перепрофилируемом под выпуск продукции j -го предприятия продолжается до тех пор пока общий объем установленного оборудования не будет равным объему, который нужно установить, определяемому величиной ΔF_{rki_j}. Этот период, обозначаемый через t_{rki_j} определяется из соотношения

$$\Delta t \sum_{t=1}^{t_{rki_j}} c_{rki_j}^{t} = \Delta F_{rki_j} .$$

Общий период установки оборудования всех типов, выпускаемых k -м предприятием, на i -м предприятия, перепрофилируемом под выпуск продукции j -го предприятия, обозначаемый через t_{i_j} будет равен

$$t_{i_j} = \max_{r,k} t_{rki_j} .$$

В этот момент перепрофилирование считается законченным и предприятие включается в режим производства продукции j -го предприятия по модели ввода в действие производственных мощностей.

3.5. Модель строительства новых цехов и предприятий

Расчет объемов и динамики строительных работ необходим в том случае, если ранее установлена необходимость сооружения новых предприятий или цехов. Кроме того, расчет объемов и динамики строительных работ может использоваться и для расчета объема и темпов строительных работ при моделировании перепрофилирования предприятий. Строительство зданий и сооружений могут осуществляться несколькими строительными предприятиями, каждое из которых может вести строительство на нескольких объектах.

Пусть ранее по результатам расчетов определено, что требуется построить дополнительные предприятия с производственной мощностью ΔP_l множества $l \in M_C$. Для моделирования строительства сначала необходимо определить объемы строительных работ. Обозначим через s_l отношение стоимости зданий и сооружений на единицу производственных мощностей l -го строящегося предприятия

$$s_l = \frac{\hat{S}_l}{P_l},$$

где $\hat{S}_l$ – стоимость зданий и сооружений строящегося предприятия с производственной мощностью P_l.

Тогда для l -го предприятия множества M_C с производственной мощностью ΔP_l надо построить здания и сооружения в объеме

$$\Delta S_l = s_l \Delta P_l .$$

Предположим, что строительство всех новых предприятий начинается одновременно. Обозначим через P_{cm} производственные мощности строительных предприятий, где $m \in M_S$, M_S – множество строительных предприятий. Теперь нужно распределить строительные объекты ΔS_l, $l \in M_C$ по строительным предприятиям с мощностями P_m^c. Для минимизации сроков строительства целесообразно максимально загрузить мощности строительных предприятий. Логично также допустить, что каждое строительное предприятие может выполнять строительные работы на целом числе объектов.

Суммарный объем строительных работ, обозначаемый через ΔS равен

$$\Delta S = \sum_{l \in M_C} \Delta S_l .$$

Обозначим через θ период времени строительства. Частное от деления величины ΔS на θ представляет собой общую мощность строительных предприятий, необходимую для завершения строительных работ на всех объектах за время θ при условии, что все строительные предприятия будут полностью загружены.

Общая мощность имеющихся строительных предприятий, обозначаемая через P_C, равна

$$P_C = \sum_{m \in M_S} P_m^c .$$

Тогда минимальный период времени строительства при идеальном распределении объектов по строительным предприятиям можно рассчитать по формуле

$$\theta = \frac{\Delta S}{P_C} .$$

Предположение о том, что строительные работы на всех объектах завершаются одновременно означает, что интенсивность строительных работ должна быть одинаковой на всех объектах. Это будет в том случае, когда объекты равномерно распределяются по строительным предприятиям. Учитывая, что на каждое строительное предприятие распределяется целое число объектов, такое событие маловероятно. Равномерное распределение объектов по строительным предприятиям означает, что все объекты строятся с интенсивностью, пропорциональной объемам строительных работ на объектах. Чтобы найти наиболее равномерное распределение, необходимо решить следующую экстремальную задачу. Найти такое распределение объектов по строительным предприятиям, чтобы отклонение от равномерного распределения, характеризуемого периодом времени θ было минимальным.

Данная задача представляет собой задачу о разбиении множества M_C на подмножества M_m^c, $m \in M_S$ таких, что $\cup M_m^c = M_C$ и $M_m^c \cap M_k^c = 0$ для $m,k \in M_S$. С каждым m связана стоимость c_m, равная

$$c_m = \left| \theta - \frac{\Delta S_l}{P_m^c} \right| .$$

Требуется найти такое разбиение множества M_C на подмножества M_m^c, $m \in M_S$, чтобы минимизировать общую стоимость C

$$C = \sum_{m \in M_C} c_m .$$

Эта задача нелинейная, т.к. требуется определить неизвестное семейство подмножеств M_m^c. Один из способов приведения этой экстремальной задачи к линейной состоит в переформулировании ее в терминах задачи целочисленного бинарного программирования.

Введем бинарную матрицу $x_{lm} = 0,1$,

где

$$x_{lm} = \begin{cases} 1, & l \in M_m^c; \\ 0 & l \notin M_m^c \; m \in M_S \; l \in M_C . \end{cases}$$

Целевую функцию в этом случае можно записать в виде:

$$C = \sum_{m \in M_S} \sum_{l \in M_m^c} x_{lm} \left| \theta - \frac{\Delta S_l}{P_m^c} \right| .$$

Теперь можно сформулировать математическую задачу целочисленного линейного программирования на основе бинарной переменной – матрицы x_{lm}: найти матрицу x_{lm}^*, которая минимизирует стоимость размещения C при условии

$$\sum_{l \in M_C} \sum_{m \in M_C} x_{lm} = m_C ,$$

где m_C – общее количество строительных объектов.

Сформулированная задача целочисленного программирования может быть решена известными методами. Существует два общих вида алгоритма решения целочисленных задач [56-57,79]. Алгоритмы первой группы строятся на основе перебора допустимых решений. Разрабатываются правила, которые позволяют исключить значительную часть допустимых решений и привести к оптимальному решению посредством анализа небольшого числа ситуаций. Ко второй группе относятся алгоритмы отсечения, в которых различными способами строятся линейные задачи, оптимальные решения которых удовлетворяют условиям целочисленности. При этом предполагается, что построенные линейные задачи численно хорошо решаются симплекс методом (методом последовательных приближений).

Строительное предприятие в принципе функционирует подобно другим предприятиям производящим товары. Поэтому для моделирования его динамики применяются те же алгоритмы, что и для других предприятий, производящих товары, с тем отличием, что строительное предприятие не выпускает конечной или промежуточной продукции в обычном смысле. Его конечным продуктом являются построенные здания и сооружения. Выпуск конечного продукта, если так можно выразиться, осуществляется при завершении строительства. Срок строительства определяется интенсивностью строительства, которая, в свою очередь, зависит от текущих запасов строительных материалов, конструкций и т.д. В разделе 3.4 разработана методика расчета выпуска предприятием продукции в виде заданных размеров партий. Аналогично при моделировании деятельности строительного предприятия будем считать, что на каждом шаге t при строительстве предприятий из множества M_C осваиваются строительные работы в объеме y_{cl}^t. Тогда считая, что строительство начинается одновременно с началом реализации заданного проекта по созданию производственных мощностей, срок завершения строительства, обозначаемый через t_{cl}^{e} определяется из условия

$$\sum_{t=1}^{t_{cl}^{e}} y_{cl}^{t} = \Delta S_l .$$

Следует отметить, что при расчете объемов и динамики строительства новых объектов, они включаются в список объектов, для которых выпускается оборудование, распределяются мощности по его установке, создаются запасы оборудования и т.д. Однако в отличие от перепрофилируемых предприятий, установка оборудования начинается не с начала строительства, а после освоения определенного объема строительных работ. Обозначим для предприятий множества M_C долю стоимости строительных работ, когда можно начинать монтаж оборудования через ϑ_l. Тогда момент начала монтажа оборудования на строящемся l-м предприятии из множества M_C, обозначаемый через t_{sl}^{b}, определяется из условия

$$\sum_{t=1}^{t_{cl}^{b}} y_{cl}^{t} = \vartheta_l \Delta S_l .$$

Объем оборудования, который необходимо установить на вновь построенных предприятиях, рассчитывается на основе матрицы структуры оборудования на предприятиях множества M_C, рассмотренной во второй части статьи и обозначаемой через $\|F_{kl}\|$. Столбец этой матрицы показывает долю оборудования, выпускаемого k-м предприятием в общем объеме оборудования l-го предприятия. Во второй части статьи приведена методика и способы подготовки исходных данных по расчету этой матрицы. Там было принято допущение, что продукция предприятий представляется в виде монопродукта. Также как и для оборудования, требуемого для перепрофилирования, необходимо трансформировать матрицу $\|F_{kl}\|$ в матрицу с детализацией по видам продукции, выпускаемой на одном предприятии.

Введем элемент трех мерного массива υ_{rkl}^{c}, представляющий собой долю оборудования r-го типа, выпускаемого на k-м предприятии, которое нужно установить на l-м предприятии, осуществляющем новое строительство.

Обозначим через ΔF_{rkl}^{c} элемент трех мерного массива, представляющий стоимость оборудования r-го типа, выпускаемого на k-м предприятии, которое необходимо установить в процессе освоения вновь построенных мощностей l-го предприятия. Этот элемент вычисляется по формуле

$$\Delta F_{rkl}^{c} = \upsilon_{rkl}^{c} \Delta F_{kl} .$$

Момент завершения монтажа оборудования вычисляется по формуле, аналогичной для монтажа оборудования на перепрофилируемых предприятиях. После того, как завершено строительство и смонтировано оборудование, вновь построенные объекты вводятся в строй производственных мощностей по схеме, изложенной в разделе расчета динамики производственных мощностей.

3.6. Модель динамики ввода в действие перепрофилированных и новых производственных мощностей

Производственная мощность предприятия представляет собой максимальный объем производства продукции при максимальном использовании фонда рабочего времени на установленном в текущий момент времени оборудовании и без ограничения на трудовые ресурсы и материальное обеспечение производства.

Обозначим производственную мощность i-го предприятия t-м шаге периода реализации заданного производственного проекта через

$$P_i^t , \ i \in M_N ,$$

где M_N – множество индексов всех предприятий, участвующих в реализации заданного проекта.

Производственную мощность предприятия в начальной точке можно рассчитать различными способами. Конкретный способ расчета определяется тем, какие исходные данные предоставлены в распоряжение проектировщиков.

Прирост производственной мощности за счет перепрофилирования, как функция времени определяется в результате решения задачи расчета производства, доставки и монтажа необходимого оборудования.

Прирост производственной мощности за счет нового строительства, как функция времени определяется в результате решения задачи моделирования деятельности строительных предприятий и предприятий, выпускающих необходимое оборудование. Моделирование последних предприятий осуществляется аналогично задаче перепрофилирования и включает выпуск, доставку и монтаж оборудования на новых предприятиях, цехах и участках.

В данной модели предполагается, что перепрофилирование предприятий и строительство новых предприятий (цехов, участков) начинается одновременно с началом реализации производственного проекта. Ввод в действие перепрофилированных и новых предприятий можно аппроксимировать различными функциональными зависимостями. Допустим, что это будет линейная зависимость. Тогда период освоения будет пропорционален величине вводимой мощности с коэффициентом пропорциональности, зависящим от конкретного предприятия. Обозначим этот период через Δt_i для перепрофилирования и $\Delta \hat{t}_i$ для нового строительства

$$\Delta t_i = k_i \Delta P_i , \ i \in M_N ; \ \Delta \hat{t}_l = \hat{k}_l \Delta \hat{P}_l , \ l \in M_N ,$$

где

ΔP_i – величина вводимой производственной мощности за счет перепрофилирования;

$\Delta \hat{P}_l$ – величина вводимой производственной мощности за счет нового строительства;

k_i – коэффициент ввода мощностей за счет перепрофилирования;

$\hat{k}_l$ – коэффициент ввода мощностей за счет нового строительства.

Коэффициенты k_i и $\hat{k}_l$ можно рассчитать на основе данных о времени ввода производственной мощности i-го и l-го предприятия в прошлом или на основе экспертных оценок по данным об уже построенных предприятиях. Если известны времена их ввода $\Delta\dot{t}_i$ и $\Delta\ddot{t}_l$ и размеры производственных мощностей $\Delta\dot{P}_i$ и $\Delta\ddot{P}_l$ соответственно за счет перепрофилирования и нового строительства, то коэффициенты можно рассчитать по формулам

$$k_i = \frac{\Delta\dot{t}_i}{\Delta\dot{P}_i}; \; \hat{k}_l = \frac{\Delta\ddot{t}_l}{\Delta\ddot{P}_l}; \; i \in M_N, \; l \in M_C.$$

Поскольку рассматриваемая задача дискретная по времени, то на каждом шаге вводится скачкообразно часть общего прироста. Число шагов освоения, обозначаемые для перепрофилирования и нового строительства соответственно через n_i и $\hat{n}_l$ равно

$$n_i = \frac{\Delta t_i}{\Delta t}; \; \hat{n}_l = \frac{\Delta\hat{t}_l}{\Delta t}; \; i \in M_N, \; l \in M_C,$$

где Δt – шаг решения задачи по времени.

На каждом шаге по времени на i-м предприятии и l-м предприятии будут осваиваться доли общего прироста соответственно за счет перепрофилирования и нового строительства равные частным от деления ΔP_i и $\Delta\hat{P}_l$ соответственно на n_i и $\hat{n}_l$

$$\Delta P_i = \frac{\Delta P_i}{n_i}; \; \Delta\hat{P}_l = \frac{\Delta\hat{P}_l}{\hat{n}_l}; \; i \in M_N, \; l \in M_C.$$

Тогда прирост производственной мощности на i-м предприятии на каждом шаге периода ввода определяются соотношениями

$$P_i^{t+1} = P_i^t + \Delta P_i; \; \hat{P}_l^{t+1} = \hat{P}_l^t + \Delta\hat{P}_l; \; i \in M_N, l \in M_C.$$

Зная начало и конец периода ввода (момент, когда предприятие построено или проведен полный объем работ по перепрофилированию), который определяется в ходе расчетов данной задачи, можно рассчитать и дату полного ввода в строй производственной мощности за счет перепрофилирования и нового строительства соответственно как

$$t_i^e = t_i^b + \Delta t_i; \; \hat{t}_l^e = \hat{t}_l^b + \Delta\hat{t}_l; \; i \in M_N, \; l \in M_C,$$

где

t_i^b – момент начала ввода в строй производственной мощности за счет перепрофилирования;

t_i^e – момент завершения ввода в строй производственной мощности за счет перепрофилирования;

$\hat{t}_l^b$ – момент начала ввода в строй производственной мощности за счет нового строительства;

$\hat{t}_l^e$ – момент завершения ввода в строй производственной мощности за счет нового строительства.

3.7. Модель подготовки кадров и организации труда на предприятиях

Количество занятых на предприятиях при реализации заданного производственного проекта изменяется в зависимости от потребной загрузки производственных мощностей. Такое изменение осуществляется в первую очередь за счет перераспределения трудовых ресурсов, которое является наряду с наращиванием производственных мощностей необходимым элементом реализации заданного производственного проекта. При реализации крупных проектов структура производства конечной продукции может претерпевать резкие изменения. На тех предприятиях, где производство будет увеличиваться, количество занятых также должно возрасти. На других предприятиях производство может сокращаться, в результате чего возникает избыток рабочей силы. Поэтому естественно использовать высвободившуюся рабочую силу для использования на предприятиях с увеличивающимся производством.

Предлагаемая модель динамики перераспределения трудовых ресурсов и эффективности форм организации труда базируется на следующем подходе. Пусть известны объемы увеличения и уменьшения продукции на предприятиях в итоге реализации производственного проекта по сравнению с его началом. Это изменение можно получить из расчетов статических задач, изложенных во второй части статьи. Зная трудоемкость производства на предприятиях до начала и в конце периода реализации производственного проекта, можно оценить потребное количество рабочей силы, необходимое в конце этого периода.

Затем рассчитывается состав занятых на предприятиях в разрезе структуры специальностей также по состоянию на начало и конец периода реализации экономического проекта. Сравнивая эти составы можно определить избыток и недостаток работников определенных профессий, который возникнет при реализации заданного проекта. Для того чтобы восполнить недостаток работников дефицитных профессий можно провести переучивание работников избыточных профессий в дефицитные. Выпуск переобученных работников и будет определять динамику перераспределения работников между предприятиями в процессе реализации заданного производственного проекта.

Исходными данными для данной задачи являются рассчитанные на основе методик второй части данной статьи векторы валового выпуска на предприятиях в начале – x_i^b и в конце x_i^e ($i = \overline{1,N}$) периода реализации заданного производственного проекта, где N – число предприятий, участвующих в его реализации.

Тогда количество занятых на предприятиях в начале и конце периода H_i^b, H_i^e выражается в виде векторов

$$H_i^b = \xi_i^b x_i^b; \; H_i^e = \xi_i^e x_i^e; \; i = \overline{1,N},$$

где ξ_i^b, ξ_i^e – трудоемкости производства продукции на предприятиях в начале и конце периода реализации производственного проекта.

Пусть занятые распределены по L специальностям и структура занятых на предприятиях в разрезе этих специальностей (доля занятых на i-м предприятии с l-й специальностью) в начале и конце периода реализации заданного производственного проекта выражается соответственно матрицами $\|b_{il}^{b}\|$, $\|b_{il}^{e}\|$. Положим, что L-я специальность – это вид деятельности, который не требует никакой квалификации. Тогда все виды деятельности будут представлены принятой структурой специальностей и состав занятых по специальностям в начале и конце периода реализации заданного производственного проекта можно выразить в виде матриц $\|H_{il}^{b}\|$, $\|H_{il}^{e}\|$, которые определяются соотношениями

$$H_{il}^{b} = b_{il}^{b} H_{i}^{b}; \quad H_{il}^{e} = b_{il}^{e} H_{i}^{e}; \quad i = \overline{1,N}, \quad l = \overline{1,L}.$$

Обозначим через вектор η_l, $l = \overline{1,L}$ количество лиц с l-й специальностью, которые заняты на государственной службе. Для увеличения количества занятых на предприятиях, где производство увеличивается, используется рабочая сила, высвобождающаяся из предприятий с уменьшающимся производством. Кроме того, сюда можно включить лиц, не имеющих специальностей и трудовых навыков. Будем считать, что они приравниваются к работникам из числа занятых деятельностью, не требующей квалификации.

Обозначим через вектор r_l количество дополнительных трудовых ресурсов с l-й специальностью. Допустим также, что распределение лиц, которые состоят на государственной службе пропорционально матрице структуры профессиональной занятости на предприятиях в конце периода реализации заданного производственного проекта. Такое распределение позволяет максимально уменьшить диспропорцию в профессиональной структуре в ходе реализации заданного производственного проекта. Тогда количество лиц с l-й специальностью в начале периода реализации проекта с учетом работников, состоящих на государственной службе, и имеющихся дополнительных трудовых ресурсов можно представить в виде вектора

$$H_{l}^{b} = \sum_{i=1}^{N} H_{il}^{b} - \sum_{i=1}^{N} b_{il}^{e}\eta_l + r_l, \quad l = \overline{1,L}.$$

Аналогичный вектор в конце периода реализации проекта имеет вид:

$$H_{l}^{e} = \sum_{i=1}^{N} H_{il}^{e}, \quad l = \overline{1,L}.$$

Для того, чтобы осуществить перераспределение трудовых ресурсов, необходимо предварительно определить, какие специальности будут в избытке, а каких будет не хватать в конце периода реализации заданного проекта. Для этого определим разность векторов профессиональной занятости в начале и конце периода реализации производственного проекта. Обозначим эту разность через ΔH_l,

$$\Delta H_l = H_l^{b} - H_l^{e}, \quad l = \overline{1,L}.$$

Если все компоненты вектора ΔH_l неотрицательны, то профессиональный состав трудовых ресурсов в начале реализации проекта с учетом занятых на государственной службе и привлечения дополнительных трудовых ресурсов обеспечит необходимую занятость в конце реализации заданного проекта. В противном случае, т.е. если среди компонентов вектора ΔH_l имеются отрицательные значения, работников этих специальностей будет не хватать в конце периода реализации производственного проекта. При этом категории работников, определяемых положительными компонентами вектора ΔH_l будет в избытке и их можно переучивать на дефицитные специальности.

При проведении переучивания этот процесс целесообразно организовать так, чтобы как можно быстрее вовлечь в производство новых работников. Это означает, что суммарное время переучивания всех избыточных работников должно быть наименьшим. Для решения этой задачи необходимо найти оптимальную схему переучивания, т.е. определить, работников каких избыточных специальностей, на какие дефицитные специальности и в каком количестве наиболее целесообразно переучивать.

Обозначим через матрицу $\|d_{mn}\|$ время переучивания из m-й специальности в n-ю специальность, $m,n = \overline{1,L}$, а через матрицу $\|\zeta_{mn}\|$ количество лиц с m-й специальностью, которых целесообразно переучивать в n-ю специальность при оптимальной схеме переучивания, т.е. при минимуме затрат общего времени. Тогда целевую функцию оптимизационной задачи переучивания можно представить в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{L} d_{mn}\zeta_{mn} \to min. \tag{3.8}$$

Искомой величиной в этой задаче является матрица $\|\zeta_{mn}\|$. Для окончательного формулирования оптимизационной задачи необходимо сформировать ограничения на искомую матрицу. Этими ограничениями служат векторы ΔH_l^{+} и ΔH_l^{-}, которые определяются из условий

$$\Delta H_l^{+} = \Delta H_l, \quad l = \overline{1,L},$$

если $\Delta H \ge 0$;

$$\Delta H_l^{-} = \Delta H_l, \quad l = \overline{1,L},$$

если $\Delta H < 0$.

Вектор ΔH_l^{+} служит ограничением на количество избыточных переучиваемых работников, а вектор ΔH_l^{-} – ограничение на количество переученных работников дефицитных специальностей. Эти ограничения записываются в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{L} \zeta_{mn} \le \Delta H_m^{+}, m = \overline{1,L};\\ &\sum_{m=1}^{L} \zeta_{mn} \le \Delta H_n^{-}, n = \overline{1,L}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Тогда исход переучивания трудовых ресурсов можно представить как результат решения следующей оптимизационной задачи: найти минимум целевой функции (3.8) при ограничениях (3.9). В результате решения этой задачи можно определить не только конечный итог переучивания, но и динамику этого процесса. График динамики можно построить следующим способом. Заметим сначала, что переучиваемые работники заканчивают курс обучения в разное время в соответствии с длительностью обучения, определяемого матрицей $\|d_{mn}\|$, при условии, что переучивание всех работников начинается одновременно.

Отложим на графике по оси абсцисс от нуля отрезки, равные значениям матрицы $\|d_{mn}\|$. Тогда последовательность точек, определяемых правыми концами этих отрезков, будет представлять собой последовательность моментов времени, в которых возможен выпуск переученных работников. Те точки этой последовательности, которым соответствуют ненулевые элементы матрицы $\|d_{mn}\|$ решения оптимизационной задачи (3.8); (3.9), будут представлять собой моменты времени выпуска очередной группы переученных работников.

На оси ординат будем откладывать в точках выпуска численные значения переученных работников дефицитных специальностей нарастающим итогом. В результате получим график зависимости от времени выпуска переученных работников, которые могут быть вовлечены в процесс производства. Обозначим через индекс t момент выпуска, а через вектор h_l^t количество обученных к этому моменту времени работников j-й специальности (нарастающим итогом).

Обученные работники должны быть распределены по предприятиям. Целесообразно организовать такое их распределение так, чтобы максимально приблизиться к профессиональной структуре занятости, соответствующей концу периода реализации заданного производственного проекта, определяемого матрицей $\|b_{ij}^e\|$. Сформулируем эту задачу.

Профессиональный состав занятых на предприятиях в период реализации заданного производственного проекта складывается из двух слагаемых. Первое слагаемое представляет собой ту часть работников, которые остаются на своих местах в ходе реализации проекта или переходят из других предприятий без переобучения. Второе слагаемое – это приходящие на производство переученные работники дефицитных специальностей. Вновь прибывающие работники должны адаптироваться к новым условиям работы. Это требует отвлечения части постоянного состава для оказания помощи в адаптации новых работников.

Допустим, что для адаптации работников l-й специальности от производства отвлекается доля кадровых работников, определяемая вектором ϑ_l^t. Этот вектор зависит от времени и к концу периода реализации заданного производственного проекта уменьшается до нуля. Тогда профессиональный состав занятых на предприятиях в каждый момент времени можно представить в виде следующей зависимости:

$$H_{il}^t = \Delta H_{il}(1-\vartheta_l^t) + h_{il}^t,$$

где $\|\Delta H_{il}\|$ – матрица, определяющая первое слагаемое профессионального состава;

ϑ_l^t – вектор, определяющий долю работников из первого слагаемого, отвлекаемых для оказания помощи в адаптации вновь поступивших работников;

$\|h_{ij}^t\|$ – матрица, определяющая распределение переученных работников l-й специальности на i-е предприятие в t-й момент времени.

Матрица ΔH_{il} вычисляется следующим способом. Предварительно вычисляется вспомогательная матрица $\Delta\overline{H}_{il}$ как разность матриц

$$\Delta\overline{H}_{il} = H_{il}^b - b_{il}^e q_l - H_{il}^e.$$

Элементы искомой матрицы ΔH_{il} определяются из условия

$$\Delta H_{il} = H_{il}^e,$$

если $\Delta\overline{H}_{il} \geq 0$;

$$\Delta H_{il} = H_{il}^b - p_{il}^e,$$

если $\Delta\overline{H}_{il} < 0$.

Элементы матрицы h_{il}^t состоят из двух слагаемых. Одно из них выражает количество распределяемых по предприятиям дополнительных ресурсов $\hat{h}_{il}^t$, другое – количество распределяемых в t-й момент времени переученных работников $\tilde{h}_{ij}^t$

$$h_{il}^t = \hat{h}_{il}^t + \tilde{h}_{il}^t.$$

Таким образом, переменными величинами в формулируемой оптимизационной задаче являются матрицы $\hat{h}_{il}^t$ и $\tilde{h}_{il}^t$. Для них необходимо записать ограничения. Для матрицы $\hat{h}_{il}^t$ ограничение определяется вектором r_l, определяющим дополнительные трудовые ресурсы в разбивке по специальностям, а для матрицы $\tilde{h}_{il}^t$ – вектором h_l^t, выражающим количество переученных работников l-й специальности в t-й момент времени. Эти ограничения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\hat{h}_{il}^t \leq r_l; \quad (3.10)$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\tilde{h}_{il}^t \leq h_l^t, \quad (3.11)$$

где T – момент окончания процесса переучивания, определяемый в результате решения оптимизационной задачи (3.8); (3.9).

Критерием оптимального распределения работников по предприятиям является минимум отклонения профессиональной структуры предприятий в начале периода реализации производственного проекта от этой структуры в конце периода реализации проекта. В конце этого периода профессиональная структура определяется матрицей $\left\| b_{il}^{e} \right\|$. Текущее значение этой матрицы в ходе реализации производственного проекта, обозначаемое через $\left\| b_{il}^{t} \right\|$, определяется из матрицы $\left\| H_{il}^{t} \right\|$ нормированием последней по строкам (предприятиям) на единицу. Элементы матрицы $\left\| b_{il}^{t} \right\|$ вычисляются по формуле

$$b_{il}^{t} = \frac{H_{il}^{t}}{\sum\limits_{l=1}^{L} H_{il}^{t}}, \quad i = \overline{1,N}, \quad l = \overline{1,L}.$$

Отклонение профессиональной структуры предприятий в начале периода реализации производственного проекта от этой структуры в конце периода реализации проекта можно представить в виде модуля или квадрата разности величин $\left\| b_{il}^{t} \right\|$ и $\left\| b_{il}^{e} \right\|$. Тогда критерий (целевую функцию) рассматриваемой оптимизационной задачи можно записать в следующем виде:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{L} (b_{il}^{t} - b_{il}^{e})^2 \to min. \qquad (3.12)$$

Окончательно оптимизационная задача распределения работников по предприятиям формулируется в следующем виде: найти минимум целевой функции (3.12) при ограничениях (3.10); (3.11). Решением этой задачи является матрица H_{il}^{t}, представляющая собой текущую занятость на предприятиях по профессиональному составу в момент времени t периода реализации заданного производственного проекта.

Если предприятия в период реализации производственного проекта полностью обеспечены материальными ресурсами, то динамика выпуска продукции определяется текущей занятостью на предприятиях. Однако, ввиду несбалансированности занятых на предприятиях по профессиональной структуре до окончания периода реализации производственного проекта, отдача от них в этот период не будет полной. Приближенно влияние диспропорции в профессиональной структуре занятости на выпуск продукции можно представить так, что в каждый момент времени будут заняты не все работники, а только их сбалансированная часть в пропорциях, определяемых матрицей $\left\| b_{il}^{e} \right\|$.

Обозначим эту часть занятых на i-м предприятии в t-й момент времени через вектор s_i^t.

Этот вектор можно определить следующим способом. Вычислим предварительно вспомогательную матрицу ΔH_{il}^{t} как разность матриц

$$\Delta H_{il}^{t} = H_{il}^{e} - H_{il}^{t}.$$

В каждой строке этой матрицы находим максимальный элемент. Исходя из этих элементов определяются компоненты вектора s_i^t по формуле

$$s_i^t = \frac{\tilde{H}_i^t}{\tilde{b}_i^t},$$

где

$\tilde{H}_i^t$ – элемент i-й строки матрицы H_{ij}^{t}, для которого соответствующий элемент матрицы ΔH_{il}^{t} имеет максимальное значение;

$\tilde{b}_i^t$ – элемент i-й строки матрицы b_{il}^{t}, для которого соответствующий элемент матрицы ΔH_{il}^{t} имеет максимальное значение.

После того как вычислен вектор s_i^t, окончательно получаем, что искомая матрица профессионального состава предприятий, сбалансированного для выпуска максимального объема продукции в t-й момент времени, определяется по формуле

$$\hat{H}_{il}^{t} = s_i^t b_{il}^{e}.$$

Суммируя значения матрицы $\hat{H}_{il}^{t}$ по индексу l, т.е. по специальностям, получаем количество фактически занятых на предприятиях как функцию времени (индекс t) в период реализации производственного проекта

$$h_i^t = \sum_{l=1}^{L} \hat{H}_{il}^{t}.$$

Величина h_i^t представляет собой максимальное количество занятых на i-м предприятии в t-й момент времени и используется в задаче расчета динамики производства как ограничение на выпуск конечной продукции в период реализации заданного производственного проекта.

Выводы

В предложенной методике решения общей динамической многокритериальной оптимизационной задачи 1-23, сформулированной в части 1 осуществляется её декомпозиция на статическую и динамическую. В статической задаче решается проблема многокритериальности, а также находится оптимум целевой функции в конечной точке по времени реализации заданного проекта. В последней задаче определяются основные параметры оптимального управления, т.е. реализуется оптимальная стратегия управления.

В третей части статьи выполнено моделирование и оптимизация динамики производственных процессов при реализации заданного производственного проекта, в том числе моделирование затрат на закладку производимой продукции, моделирование выпуска конечной, промежуточной продукции и оборудования, моделирование монтажа оборудования на перепрофилируемых предприятиях, моделирование строительства новых предприятий, моделирование динамики ввода в действие перепрофилированных и новых производственных мощностей, моделирование подготовки кадров и организации труда на предприятиях. В динамической модели рассчитывается траектория точки процесса в фазовом пространстве на основе принципа оптимального управления. Решение динамической оптимизационной модели получено методом динамического программирования. Целевой функцией данной динамической оптимизационной задачи является время перехода динамического процесса от начальной к конечной толчке, определяемой решением статической задачи. Ставится задача достижения минимума времени перехода от начальной к конечной точке, т.е. задача на быстродействие.

Минимум времени достигается за счет обеспечения максимума интенсивностей производства продукции на предприятиях. Этот максимум достигается посредством увеличения производственных мощностей предприятий, которое осуществляется за счет перепрофилирования избыточных производственных мощностей предприятий в дефицитные производственные мощности и за счет строительств новых цехов и предприятий.

Чтобы обеспечить загрузку перепрофилированных и новых производственных мощностей необходимо осуществить оптимальное перераспределение и переобучение имеющихся трудовых ресурсов. Управлениями в данной динамической задаче являются функции изменения производственных мощностей предприятий и количество занятых на предприятиях. Оптимальной стратегией управления является такая стратегия, при которой достигается минимальное значение целевой функции.

В динамической задаче осуществляется оптимальное управление в каждой точке по времени динамического процесса. Для решения этой задачи динамический процесс формулируется так, что в каждой точке по времени реализуются такие значения управлений, которые обеспечивают достижение минимума целевой функции, т.е. переход в конечную точку в фазовом пространстве за наименьшее количество шагов по времени.

Максимальные размеры прироста производственных мощностей и потребное количество трудовых ресурсов, определяющие значения выходных параметров модели в конечной точке динамического процесса определены в статической модели. Минимальное время наращивания производственных мощностей определяется максимально возможным в каждой точке по времени выпуском оборудования для расширяющихся производств за счет максимального выпуска промежуточной продукции для его изготовления, её доставке на предприятия, максимально возможной закладке выпускаемого оборудования с учетом имеющихся запасов промежуточной продукции и количества занятых, с учетом времени доставки, при максимально возможном темпе монтажа и максимально возможном числе занятых на предприятиях.

Число занятых как функция времени определяется в результате решения оптимизационной задачи перераспределения и переобучения трудовых ресурсов на предприятиях. Принцип оптимальности применяется и к строительным предприятиям, которые оптимально распределяются по строящимся объектам и в которых максимально используются производственные мощности для строительства новых объектов. Таким образом, в каждой точке по времени находится единственное решение, которое получено на основе оптимального управления и, тем самым, реализуется принцип оптимальности динамического процесса в целом.

4. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И СРЕДСТВ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА В УСЛОВИЯХ ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ РИСКОВ

4.1. Методика моделирования производственных процессов в условиях технических и экономических рисков

Неопределенность параметров оптимизационных задач, которые сформулированы в результате решения общей динамической оптимизационной задачи можно учесть посредством проведения вариантных расчетов с различными значениями параметров в пределах интервалов их неопределенности. Однако это требует больших затрат времени на проведение расчетов и обработку результатов и не позволяет делать общие выводы.

Для решения этой проблемы целесообразно попытаться найти аналитические зависимости выходных величин в зависимости от неопределенных параметров. Это позволит найти новые закономерности исследуемых процессов в условиях неопределенности параметров и значительно сократить как общие трудозатраты на анализ исследуемых процессов, так и затраты времени на компьютере.

В соответствии с методом декомпозиции решения общей динамической многокритериальной оптимизационной стохастической задачи, изложенной в первой части статьи, эта задача разделяется на три взаимосвязанные задачи: детерминированную оптимизационную многокритериальную нелинейную статическую задачу, детерминированную динамическую оптимизационную задачу и стохастическую задачу. В свою очередь детерминированная оптимизационная многокритериальная нелинейная статическая задача декомпозируется на несколько детерминированных линейных однокритериальных взаимосвязанных задач, а детерминированная динамическая задача формулируется в конечно-разностном виде. При этом результаты решения комплекса детерминированных статических оптимизационных задач используются в качестве исходных данных для решения детерминированной оптимизационной динамической задачи.

Поскольку стохастичность общей задачи является следствием неопределенности или случайности значений её параметров, то соответственно будем рассматривать под стохастическим углом зрения выделенные из общей задачи детерминированные статическую и динамическую задачи. Поэтому будем рассматривать две группы стохастических задач: применительно к статической оптимизационной задаче и к динамическим оптимизационным задачам. Чтобы стохастическая оптимизационная задача была поставлена, необходимо конкретно определить целевую функцию и случайные параметры. Что касается динамической оптимизационной задачи, которая представляет собой динамический процесс с управлением, то и здесь также надо конкретно определить вид процесса и его случайные свойства. В следующих разделах будут приведены постановки стохастических задач применительно к некоторым частным статическим оптимизационным задачам и динамической задаче.

Результаты решения этих задач используются для корректировки постановки и решения детерминированных статической и динамической задач. Поскольку для оценки неопределенности или случайности параметров общей задачи нет достаточной статистической основы, то целесообразно проводить вариантные решения стохастических задач для определения наиболее вероятных корректировок детерминированных задач.

4.2. Стохастическая статическая оптимизационная модель

Рассмотрим статическую оптимизационную однокритериальную модель (2.1) из второй части статьи

$$\left.\begin{aligned} &x = Ax + y;\\ &z = Ux;\\ &h = \xi x;\\ &y = qa;\\ &a = ey;\\ &x \le p;\\ &z \le \hat{z};\\ &h \le \hat{h};\\ &a \to max. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Эта модель отличается от модели 1-23 тем, что в правой части уравнения 1 конечная продукция представлена в виде одного фиксированного вектора. Неизвестными величинами в этой модели являются скаляр a и вектор x. Остальные величины, кроме вектора e, это параметры, в общем случае являющиеся неопределенными. Неопределенность параметров можно трактовать как случайные величины. Модель (4.1) будем рассматривать как базовую стохастическую статическую оптимизационную задачу. Для этой задачи требуется найти среднее значение величины a и ее функцию распределения, как функцию случайных параметров. Стохастическая задача подобного типа, но с ограничением только по производственным мощностям, исследовалась в [24].

Будем считать, что случайными в данной модели могут быть компоненты векторов p, z, скаляр $\hat{h}$ и элементы матриц A и U, которые могут иметь значения в некоторых заданных интервалах. Тогда при случайной реализации этих параметров, максимальный объем производства заданного вектора конечной продукции определяется из условия:

$$max\, a = \min_i \{a_i^+\},\ i = \overline{1, N+M+1};$$

$$a_i = \frac{(p - By)_i}{(Bq)_i},\ i \in \overline{1, N};$$

$$a_i = \frac{(\hat{z} - UBy)_i}{(UBq)_i},\ i \in \overline{N+1, N+M};$$

$$a_i = \frac{(\hat{h} - \xi By)_i}{(\xi Bq)_i},\ i = N+M+1.$$

Обозначим некоторую текущую величину максимального общего объема производства заданной конечной продукции через a. Полагая, что все случайные параметры задачи независимы, получим, что величины a_i также независимы и функцию распределения случайной величины a можно записать в общем виде так [80]:

$$F(a) = 1 - \prod_{i=1}^{N+M+1} [1 - F_i(a)], \qquad (4.2)$$

где $F_i(a)$ – функция распределения случайной величины a_i.

Введем обозначения $a_i^- = min\, a_i$, $a_i^+ = max\, a_i$. Интервалы от a_i^- до a_i^+ представляют собой отрезки, на которых может реализоваться некоторое случайное значение величины a_i. Упорядочим эти отрезки по возрастанию величин a_i^- и заново перенумеруем образовавшуюся последовательность отрезков. Если эти отрезки перекрывают друг друга, то интервал начиная от $\min_i a_i^-$ до $\max_i a_i^+$ представляет собой отрезок, на котором может реализоваться случайное значение величины a. Если для некоторого i значение a_i^- будет превосходить значение a_{i-1}^+, то отрезки, начиная с этого значения i, можно исключить из рассмотрения, поскольку эти отрезки будут отделены от отрезков первой группы интервалом, на котором случайное значение величины a не может реализоваться. Иными словами, полная группа событий реализуется только на отрезках первой группы.

Поскольку значения случайных величин a_i, $i = \overline{1, N+M+1}$ распределены на конечных интервалах, то функцию распределения случайной величины a можно переписать так:

$$F(a) = \begin{cases} 0 \text{ при } a < a_1^-; \\ 1 - \prod_{i=1}^{k} [1 - F_i(a)] \text{ при } a_k^- \le a < a_{k+1}^-; \\ 1 \text{ при } a \ge a_{m+1}^-, \end{cases}$$

где m – индекс члена упорядоченной по возрастанию и соответственно перенумерованной последовательности $\{a_i^-\}$, $i = \overline{1, M+1}$ причем

$$a_{m+1}^- = \min_i \{a_i^+\}.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины a вычисляются по формулам:

$$M[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k^-}^{a_{k+1}^-} a \frac{\partial F(a)}{\partial a} da;$$

$$D[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k^-}^{a_{k+1}^-} (a - M[a])^2 \frac{\partial F(a)}{\partial a} da.$$

В подинтегральных выражениях величину $\frac{\partial F(a)}{\partial a} da$ можно записать в виде $dF(a) \frac{\partial F(a)}{\partial a} da$. Тогда эти выражения можно представить в виде:

$$M[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k^-}^{a_{k+1}^-} a\, dF(a);$$

$$D[a] = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k^-}^{a_{k+1}^-} (a - M[a])^2 dF(a).$$

Из интегрального исчисления известно [81]:

$$\int a dF(a) = aF(a) - \int F(a) da.$$

Используя эту формулу, подставляя вместо $F(a)$ его выражение из (4.2) и выполнив преобразования получим:

$$M[a]=\sum_{k=1}^{m}a_k^-\prod_{i=1}^{k}(1-F_i(a_{k+1}^-))-\sum_{k=1}^{m}a_{k+1}^-\prod_{i=1}^{k}(1-F_i(a_k^-))+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{a_k^-}^{a_{k+1}^-}\prod_{i=1}^{k}(1-F_i(a))da;$$

$$D[a]=\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}^- - M[a])^2\prod_{i=1}^{k}(1-F_i(a_{k+1}^-))-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}(a_k^- - M[a])^2\prod_{i=1}^{k}(1-F_i(a_k^-))+$$

$$+2\sum_{k=1}^{m}\int_{a_k^-}^{a_{k+1}^-}(a-M[a])\prod_{i=1}^{k}(1-F_i(a))da.$$

Рассмотрим два частных случая решения задачи (4.1). В частном случае 1 $m=1$ и $a_2^-=a_1^+$. В частном случае 2 первые $m\ (m>1)$ членов упорядоченной по возрастанию последовательности $\{a_i^-\}$ равны между собой, т.е. $a_i^-=a_1^-$, $i=\overline{1,m}$ и, кроме того, $a_{m+1}^-=a_1^+$.

В частном случае 1 функция распредел. принимает вид:

0 при $a<a_1^-$;

$F(a)=F_i(a)$ при $a_1^-\le a<a_1^+$;

1 при $a\ge a_1^+$,

и в частном случае 2:

0 при $a<a_1^-$;

$F(a)=1-[1-F_i(a)]^m$ при $a_1^-\le a<a_1^+$;

1 при $a\ge a_1^+$.

Соответственно формулы математического ожидания и дисперсии случайной величины a в частном случае 1:

$$M[a]=a_1^+F_1(a_1^+)-a_1^-F_1(a_1^-)-\int_{a_1^-}^{a_1^+}F_1(a)da;$$

$$D[a]=(a_1^+-M[a])^2F_1(a_1^+)-(a_1^- - M[a])^2F_1(a_1^-)-$$

$$-2\int_{a_1^-}^{a_1^+}(a-M[a])F_1(a)da,$$

и в частном случае 2:

$$M[a]=a_1^-(1-F_1(a_1^-))^m-a_1^+(1-F_1(a_1^+))^m+$$

$$+\int_{a_1^-}^{a_1^+}(1-F_1(a))^m da;$$

$$D[a]=(a_1^- - M[a])^2(1-F_1(a_1^-))^m-$$

$$-(a_1^+-M[a])^2(1-F_1(a_1^+))^m+$$

$$+2\int_{a_1^-}^{a_1^+}(a-M[a])(1-F_1(a))^m da.$$

Частный случай 1 соответствует такому состоянию, когда хотя бы одно ограничение задачи значительно разбалансировано по отношению к максимизации конечной продукции в заданном ассортименте, а разброс параметров так относительно мал, что интервалы первых двух упорядоченных по возрастанию уровней производства конечной продукции в заданном ассортименте не пересекаются. Это означает, что интервал распределения величины a можно представить на числовой оси в виде первого отдельного интервала, который не пересекается с другими интервалами, что и отражено в приведенных выше формулах для математического ожидания и дисперсии величины a. В этом частном случае уже имеет значение, на каких случайных величинах из a_i, $i=\overline{1,m}$ реализовался этот интервал.

Частный случай 2 решения задачи (4.1) соответствует такому состоянию, когда ограничения задачи приближенно сбалансированы по отношению к максимизации выпуска конечной продукции в заданном ассортименте. При этом разброс параметров таков, что предельные уровни производства конечной продукции в заданном ассортименте, соответствующие предельным значениям случайных параметров не сильно отличаются одно от другого. Это означает, что случайные значения величины a распределяются на интервале, который представляет собой наложение m интервалов, минимальные и максимальные значения, которых мало отличаются друг от друга. Поскольку интервалы примерно одинаковые, то в качестве расчетных значений берутся минимальное и максимальное значения первого интервала, что и отражено в приведенных выше формулах для математического ожидания и дисперсии величины a.

Для практических решений условия в частном случае 2 можно рассматривать приближенно. Критерием такого приближения могут служить отклонения математического ожидания величин a_i. Если математические ожидания случайных величин a_i с индексами $i=\overline{1,m}$ приближенно равны между собой, то для того, чтобы этот случай можно было рассматривать как частный случай 2 необходимо, чтобы выполнялось соотношение:

$$\frac{M[a_i]-M[a_j]}{\overline{M}[a_i]}\le\varepsilon;\ i,j=\overline{1,m};\ i,j=\overline{1,m},$$

где

ε – число меньше еденицы, определяющее степень близости математических ожиданий случайных величин a_i;

$\overline{M}[a_i]$ – средняя величина математических ожиданий случайных величин a_i.

Функция распределения случайной величины a зависит от вида функций распределения случайной величины a_i, которые, в свою очередь, являются функциями распределения случайных величин p, $\hat{z}$, $\hat{h}$, A и U.

В том случае, когда функции распределения случайных уровней производства конечной a_i, $i=\overline{1,m}$ таковы, что их среднеквадратические отклонения значительно меньше интервалов их распределения, можно с достаточной точностью считать эти распределения заданными на положительной полуоси. В этом случае математическое ожидание и дисперсия случайной величины a вычисляются по формулам:

$$M[a]=\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty} af_j(a)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}[1-F_i(a)]da\,; \qquad (4.3)$$

$$D[a]=\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty}(a-M[a])^2 f_j(a)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}[1-F_i(a)]da\,,$$

где $f_j(a)$ – плотность распределения случайной величины a_j, $j=\overline{1,m}$.

Рассмотрим сначала вариант, когда случайными являются только величины p, $\hat{z}$, $\hat{h}$. Пусть эти величины распределяются на некоторых заданных интервалах, на концах которых они принимают значения

$$(p_i^-,p_i^+),\, i=\overline{1,N}\,,\ (\hat{z}_i^-,\hat{z}_i^+),\ i=\overline{N,N+M}\,,(\hat{h}^-,\hat{h}^+)\,.$$

Тогда случайные величины a_i будут распределены на интервалах с границами (a_i^-,a_i^+), $i=\overline{1,m}$,

где

$a_i^-=a_i$ при $p_i=p_i^-$, $\hat{z}_i=\hat{z}_i^-$, $\hat{h}=\hat{h}^-$;

$a_i^+=a_i$ при $p_i=p_i^+$, $\hat{z}_i=\hat{z}_i^+$, $\hat{h}=\hat{h}^+$.

Для частного случая 1 не безразлично на какой из случайных величин p, $\hat{z}$, $\hat{h}$ реализовалось значение случайной величины a_i, и математическое ожидание и дисперсия при различных вариантах реализации интервала распределения величины a записывается в виде:

$$M[a]=\frac{a_1^+ + a_1^-}{2}\,,$$

где вид величин a_1^- и a_1^+ определяется по формулам (4.2) в зависимости от того, на каком индексе реализовалась случайная величина a.

В частном случае 2 безразлично на какой из случайных величин p, $\hat{z}$, $\hat{h}$ реализовалось значение случайной величины a_i, поэтому математическое ожидание случайной величины a можно записать в виде, где в качестве a_1^- и a_1^+ можно рассматривать любые значения из (4.2):

$$M[a]=a_1^+ - m\frac{a_1^+ - a_1^-}{2}+m(m-1)\frac{(a_1^+ - a_1^-)^2}{6}-\ldots$$

При выводе этой формулы использовалось разложение функции $(1-F_1(a))^m$ в биномиальный ряд

$$(1-F_1(a))^m=1-mF_1(a)+m(m-1)\frac{F_1^2(a)}{2}-\ldots \quad , (4.4)$$

а также представление функции распределения равномерной плотности в виде

$$F_1(a)=\frac{a_1-a_1^-}{a_1^+ - a_1^-}\,.$$

Кроме равномерного распределения случайных величин p, $\hat{z}$, $\hat{h}$ в качестве учета неопределенности в значениях могут использоваться и другие законы, в частности распределение по усеченному нормальному закону [69]. Функция усеченного распределения связана с исходным следующим равенством

$$F_i^{ус}(a)=\begin{cases}0 & \text{при } a\le a_i^-;\\ \dfrac{F_i(a)-F_i(a_i^-)}{F_i(a_i^+)-F_i(a_i^-)} & \text{при } a_i^-\le a\le a_i^+;\\ 1 & \text{при } a\ge a_i^+.\end{cases}$$

Известно, что функция нормального распределения не выражается через элементарные функции, поэтому для вычисления значений этой функции используют специальные функции (интегралы вероятностей), для которых составлены таблицы. Усеченное нормальное распределение случайной величины a_i, $i=\overline{1,m}$ с использованием интеграла вероятностей (функции Лапласа) вида:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

записывается так:

$$F_i(a)=\frac{\Phi\left(\dfrac{a-\bar{a}i}{\sigma_i}\right)+\Phi\left(\dfrac{\Delta a_i}{\sigma_i}\right)-1}{2\Phi\left(\dfrac{\Delta a_i}{\sigma_i}\right)-1}\,,$$

где $\bar{a}i=\dfrac{a_i^+ + a_i^-}{2}$; $\Delta a_i=\dfrac{a_i^+ - a_i^-}{2}$.

При выводе этой формулы учтено, что

$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$.

Выражения математического ожидания и дисперсии случайной величины a неудобны для анализа тем, что включают интеграл от функции Лапласа, не выражающийся через элементарные функции. Для практических целей можно получить приближенное аналитическое выражение этого интеграла, если вместо функции Лапласа интегрировать близкую к ней логистическую функцию $\Psi(x)$. Для логистической функции и функции Лапласа на всей числовой оси выполняется соотношение:

$$|\Phi(x)-\Psi(1{,}7x)|<0{,}01\,;\ \Psi(x)=\frac{e^x}{1+e^x}\,.$$

Заменяя $\Phi(x)$ на $\Psi(1{,}7x)$ и выполнив преобразования, получим следующее выражение для функции распределения случайной величины a_i, $i=\overline{1,N}$

$$F_i(a)=\left[\frac{Ae^{\left(\frac{a-\bar{a}_i}{\bar{\sigma}_i}\right)}}{e^{\left(\frac{a-\bar{a}_i}{\bar{\sigma}_i}\right)}+1}-B\right],$$

где

$$\overline{\sigma_i} = 1{,}7\sigma_i; \; A = \frac{e^{\frac{\Delta a_1}{\overline{\sigma_1}}} + 1}{e^{\frac{\Delta a_1}{\overline{\sigma_1}}} - 1}; \; B = \frac{1}{e^{\frac{\Delta a_1}{\overline{\sigma_1}}} - 1}.$$

Тогда математическое ожидание величины a в частном случае 1 после взятия интеграла и проведения преобразований записывается в виде:

$$M[a] = a_1^+ - a_1^- - A\Delta a_1,$$

где значения a_1^+ и a_1^- соответствуют тому минимальному индексу, на котором реализовался первый отрезок, определяемый соотношениями (4.2).

И соответственно в частном случае 2:

$$M[a] = a_1^- + B^m \int_{a_1^-}^{a_1^+} \frac{\left(e^{\frac{a_1 - \overline{a}_1}{\overline{\sigma_1}}} + C\right)^m}{\left(e^{\frac{a_1 - \overline{a}_1}{\overline{\sigma_1}}} + 1\right)^m} da_1,$$

где

$$C = e^{\frac{\Delta a_1}{\overline{\sigma_1}}}.$$

Рассмотрим теперь вариант, когда в стохастической задаче (4.1) случайными величинами наряду с p, $\hat{z}$ и $\hat{h}$ являются элементы матрицы A. Пусть элементы матрицы A распределены на интервалах (a_{ij}^-, a_{ij}^+), $i, j = \overline{1,N}$, так что максимальное отклонение элементов матрицы A от их математических ожиданий равно:

$$\Delta a_{ij} = \frac{a_{ij}^+ - a_{ij}^-}{2}.$$

Вычисление функций распределения случайной величины a_i, $i = \overline{1,N}$ в этой модели осложняется тем, что последняя является неявной функцией матрицы A, т.к. выражается через матрицу $(E - A)^{-1}$.

Пусть $\overline{A}$ – матрица, составленная из математических ожиданий случайных элементов матрицы A. Обозначим случайную матрицу $\Delta A = A - \overline{A}$, которую будем считать центрированной. Тогда матрицу $(E - A)^{-1}$ можно представить в виде:

$$(E - A)^{-1} = (E - \overline{A} - \Delta A)^{-1}.$$

Если предположить, что интервалы случайных приращений матрицы A малы, то можно разложить матрицу $(E - \overline{A} - \Delta A)^{-1}$ по малому параметру ΔA.

Разложение такого вида рассматривалось в [6]. Ограничиваясь тремя членами разложения имеем:

$$B \cong \overline{B} + \overline{B}\Delta A\overline{B} + \overline{B}\Delta A\overline{B}\Delta A\overline{B},$$

где $\overline{B} = (E - \overline{A})^{-1}$.

Тогда выражение для случайной величины a_i, $i = \overline{1,N}$ после преобразований принимает вид:

$$a_i = \frac{(P - \overline{B}y - \overline{B}\Delta A\overline{B}y - \overline{B}\Delta A\overline{B}\Delta A\overline{B}y)_i}{\left\{1 + \frac{\{[\overline{B}\Delta A + (\overline{B}\Delta A)^2]\overline{B}q\}_i}{(\overline{B}q)_i}\right\}(\overline{B}q)_i}.$$

Поскольку элементы матрицы $\overline{[\overline{B}\Delta A + (\overline{B}\Delta A)^2]}$ малые величины, то сомножитель

$$\frac{1}{1 + \frac{\{\overline{[\overline{B}\Delta A + (\overline{B}\Delta A)^2]}\overline{B}q\}_i}{(\overline{B}q)_i}}$$

можно разложить в ряд по малому параметру. Ограничиваясь двумя членами разложения получим

$$\frac{1}{1 + \frac{\{\overline{[\overline{B}\Delta A + (\overline{B}\Delta A)^2]}\overline{B}q\}_i}{(\overline{B}q)_i}} \cong 1 - \frac{\{\overline{[\overline{B}\Delta A + (\overline{B}\Delta A)^2]}\overline{B}q\}_i}{(\overline{B}q)_i}.$$

Подставляя это разложение в выражение для a_i, $i = \overline{1,N}$ после преобразований получим:

$$a_i = \frac{(P - \overline{B}y - \overline{B}\Delta A\overline{B}y - \overline{B}\Delta A\overline{B}\Delta A\overline{B}y)_i}{(\overline{B}q)_i} * \\ * \left\{1 - \frac{\{\overline{[\overline{B}\Delta A + (\overline{B}\Delta A)^2]}\overline{B}q\}_i}{(\overline{B}q)_i}\right\}.$$

При выполнении преобразований пренебрежем членами, включающими моменты 3-го и 4-го порядка для случайной матрицы ΔA. Кроме того, учтем, что числитель в фигурных скобках представляет собой малую величину. Поэтому математическое ожидание от слагаемых, включающих матрицы ΔA равно нулю и поэтому, как будет видно из дальнейшего, ими можно также пренебречь. В результате после выполнения преобразований выражение для случайной величины a_i, $i = \overline{1,N}$ можно записать в виде:

$$a_i = a_{iP} - a_{iA},$$

где $a_{iP} = \frac{(P - \overline{B}y)_i}{(\overline{B}q)_i}$; $a_{iA} = \frac{[\overline{B}\Delta Ay + (\overline{B}\Delta A)^2\overline{B}y]_i}{(\overline{B}q)_i}$.

Как видно из этого выражения, функция случайной величины a_i, $i = \overline{1,N}$ от случайных параметров в данной стохастической задачи сводится к функции этой величины в задаче с детерминированной матрицей A с учетом поправочного члена, обусловленного случайным характером элементов матрицы A.

Таким образом, в этом варианте комбинации случайных параметров величины a_i, $i = \overline{1,N}$ представляют собой разность случайных величин a_{iP} и a_{iA}. Случайная величина a_{iA} представляет собой сумму слагаемых, включающих элементы матрицы отклонений от средних значений коэффициентов прямых затрат и компоненты вектора производственных мощностей.

Согласно центральной предельной теореме, распределение суммы случайных величин, имеющих один и тот же закон распределения с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями при неограниченном увеличении числа членов неограниченно приближается к нормальному.

Практически центральной предельной теоремой можно пользоваться и в тех случаях, когда математические ожидания и дисперсии входящих в сумму случайных величин различны, если эти величины сравнимы по своему разбросу, а число членов суммы достаточно велико. В случае композиции более чем 7-10 слагаемых в большинстве случаев уже можно пользоваться центральной предельной теоремой.

Предположим, что слагаемые случайной величины a_{iA} сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы и число слагаемых достаточно велико для того, чтобы закон распределения случайной величины a_{iA} был приближенно-нормальным. Тогда плотность распределения случайной величины a_{iA} записывается в виде:

$$f(a_{iA})=\frac{1}{\sigma_{iA}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(a_{iA}-\overline{a}_{iA})^2}{2\sigma_{iA}^2}\right],$$

где

$$\overline{a}_{iA}=\frac{[\overline{B}(\overline{B}^T\circ D[\Delta A])\overline{B}y]_i}{(\overline{B}q)_i};\ \sigma_{iA}^2=\sigma_{iAI}^2+\sigma_{iAII}^2;$$

$$\sigma_{iAI}^2=\frac{[(\overline{B}\circ\overline{B})D[\Delta A](\overline{B}\circ\overline{B})(y\circ y)]_i}{(\overline{B}q)_i^2};$$

$$\sigma_{iAII}^2=\frac{\{[(\overline{B}\circ\overline{B})D[\Delta A]\}^2(\overline{B}\circ\overline{B})(y\circ y)]_i}{(\overline{B}q)_i^2},$$

где

$y\circ y$ – вектор, компоненты которого представляют собой поэлементное произведение компонентов вектора y;

$\overline{B}^T$ – транспонированная матрица $\overline{B}$;

$\overline{B}^T\circ D[\Delta A]$ – поэлементное произведение матриц $\overline{B}^T$ и $D[\Delta A]$.

При выведении математического ожидания и дисперсии поправочного члена учтено, что поскольку по определению случайная величина ΔA центрированная, то $M[\overline{B}\Delta A]=0$ и, как показано в [6],

$$M[\Delta A\overline{B}\Delta A]=\overline{B}^T\circ D[\Delta A]$$

и

$$D[\overline{B}\Delta A]=(\overline{B}\circ\overline{B})D[\Delta A].$$

Зная плотности распределения двух случайных величин x и y, функцию распределения их разности $z=x-y$ можно вычислить по общей формуле [80]:

$$F(z)=\iint\limits_{D(z)}f(x)f(y)dxdy,$$

где $D(z)$ – область распределения аргументов x и y как функция их разности z.

Хотя случайные величины a_{iA}, $i=\overline{1,N}$ распределены на ограниченных интервалах, однако следствием приближенного представления их распределений в виде нормального закона является малость их среднеквадратических отклонений по отношению к интервалам распределения. Поэтому можно считать, что плотности распределения этих величин заданы на всей числовой оси. Учитывая это область определения аргументов как функцию их разности можно представить интервалами (x^-,x^+) и $(x-z,\infty)$, где x^- и x^+ – минимальное и максимальное значения уменьшаемого.

Тогда формулу для вычисления функции распределения случайной величины z можно записать в виде:

$$F(z)=\int\limits_{x^-}^{x^+}\int\limits_{x-z}^{\infty}f(x)f(y)dxdy. \tag{4.5}$$

Выведем теперь в качестве примера функцию распределения случайной величины a_i, $i=\overline{1,N}$ в зависимости от конкретных законов распределения случайной величины a_{iP}.

Пусть случайная величина a_{iP} распределена по равномерному закону. Тогда плотность ее распределения равна:

$$f(a_{iP})=\frac{1}{2\Delta a_{iP}},$$

где

$$\Delta a_{iP}=\frac{a_{iP}^+-a_{iP}^-}{2}.$$

Функция распределения случайной величины a_i, $i=\overline{1,N}$ в этом случае имеет вид:

$$F(a_i)=\frac{1}{2\Delta a_{iP}}\frac{1}{\sigma_{iA}\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a_{iP}^-}^{a_{iP}^+}*$$

$$*\int\limits_{a_{iP}-a_i}^{\infty}\exp\left[-\frac{(a_{iA}-\overline{a}iA)^2}{2\sigma_{iA}^2}\right]da_{iP}da_{iA};$$

$$F(a_i)=\frac{1}{2\Delta a_{iP}}\frac{1}{\sigma_{iA}\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a_{iP}^-}^{a_{iP}^+}*.$$

После интегрирования по a_{iA} получим:

$$F(a_i)=1-\frac{1}{2\Delta a_{iP}}\int\limits_{a_{iP}^-}^{a_{iP}^+}\Phi\left(\frac{a_{iP}-a_i-\overline{a}iA}{\sigma_{iA}}\right)da_{iP}.$$

Пусть теперь случайная величина a_{iP} распределена по усеченному нормальному закону на ограниченном интервале значений. Плотность распределения в этом случае записывается в виде:

$$f_i^{yc}(a)=\begin{cases}0 & \text{при } a\le a_{i1}^-;\\ \dfrac{f_i(a)}{F_i(a_i^+)-F_i(a_i^-)} & \text{при } a_i^-\le a\le a_i^+;\\ 1 & \text{при } a\ge a_{i1}^+.\end{cases}$$

Тогда плотность функции распределения величины a_{iP} на интервале $a_{iP}^-\le a\le a_{iP}^+$ можно записать в виде:

$$f(a_{iP})=\frac{1}{\sigma_{iP}\sqrt{2\pi}\left[2\Phi\left(\frac{\Delta a_{iP}}{\sigma_{iP}}\right)-1\right]}exp\left[-\frac{(a_{iP}-\bar{a}iP)^2}{2\sigma_{iP}^2}\right],$$

где $\overline{a_{iP}}$ и σ_{iP}^2 – математическое ожидание и дисперсия случайной величины a_{iP}.

Подставляя это выражение в (4.5) вместе с выражением для a_{iA}, интегрируя по a_{iA} и учитывая, что $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$, получим:

$$F(a_i)=\frac{1}{\sigma iP\sqrt{2\pi}\left[2\Phi\left(\frac{\Delta aiP}{\sigma iP}\right)-1\right]}*$$

$$*\int_{a_{iP}^-}^{a_{iP}^+}exp\left[-\frac{(aiP-\overline{aiP})^2}{2\sigma_{iP}^2}\right]\Phi\left(\frac{ai-aiP+\bar{a}iA}{\sigma iA}\right)daiP.$$

Если среднеквадратическое отклонение случайной величины a_{iP} много меньше интервала ее распределения, то вместо усеченного нормального закона можно использовать нормальный закон, заданный на всей числовой оси. В этом случае функция распределения случайной величины a_i примет вид:

$$F(a_i)=\frac{1}{\sigma_{iP}\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_0^{\infty}exp\left[-\frac{(a_{iP}-\bar{a}iP)^2}{2\sigma_{iP}^2}\right]\Phi\left(\frac{a_i-a_{iP}+\bar{a}iA}{\sigma_{iA}}\right)da_{iP}.$$

Математическое ожидание и дисперсия в этом случае выводятся из общих формул (4.2). Выведем в качестве примера выражения математического ожидания и дисперсии случайной величины a для двух рассмотренных выше частных случаев. Предварительно выведем плотность распределения случайной величины a_i, $i=\overline{1,m}$ посредством дифференцирования ее функции распределения:

$$f(a_i)=\frac{dF(a_i)}{da_i}=\frac{1}{\sigma_{iP}\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_0^{\infty}exp\left[-\frac{(a_{iP}-\bar{a}iP)}{2\sigma_{iP}^2}\right]\frac{\partial\Phi\left(\frac{a_i-a_{iP}+\bar{a}iA}{\sigma_{iA}}\right)}{\partial a_i}da_{iP}.$$

Учитывая что:

$$\frac{\partial\Phi\left(\frac{a_i-a_{iP}+\bar{a}iA}{\sigma_{iA}}\right)}{\partial a_i}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_{iA}\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{(a_i-a_{iP}+\bar{a}iA)^2}{2\sigma_{iA}^2}\right],$$

получим:

$$f(a_i)=\frac{1}{\sigma_{iP}\sigma_{iA}2\pi}*$$

$$*\int_0^{\infty}exp\left[-\frac{(a_{iP}-\bar{a}iP)}{2\sigma_{iP}^2}\right]exp\left[-\frac{(a_i-a_{iP}+\bar{a}iA)^2}{2\sigma_{iA}^2}\right]da_{iP}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{iP}^2+\sigma_{iA}^2)}}exp\left[-\frac{(a_i-\bar{a}iP+\bar{a}iA)^2}{2(\sigma_{iP}^2+\sigma_{iA}^2)}\right].$$

В частном случае 1 формулы (4.3) принимают вид:

$$M[a]=\int_0^{\infty}af_1(a)[1-F_1(a)]da;$$

$$D[a]=\int_0^{\infty}(a-M[a])^2f_1(a)[1-F_1(a)]da.$$

И соответственно в частном случае 2:

$$M[a]=\int_0^{\infty}af_1(a)[1-F_1(a)]^m da;$$

$$D[a]=\int_0^{\infty}(a-M[a])^2f_1(a)[1-F_1(a)]^m da.$$

Учитывая три члена разложения функции $(1-F_1(a))^m$, получим следующие выражения для математического ожидания и дисперсии величины a в частном случае 2:

$$M[a]=\int_0^{\infty}af_1(a)[1-mF_1(a)]da=$$

$$=\int_0^{\infty}af_1(a)da-m\int_0^{\infty}af_1(a)F_1(a)da+$$

$$+m(m-1)\int_0^{\infty}af_1(a)F_1^2(a)da;$$

$$D[a]=\int_0^{\infty}(a-M[a])^2f_1(a)[1-mF_1(a)]da=$$

$$=\int_0^{\infty}(a-M[a])^2f_1(a)da-m\int_0^{\infty}(a-M[a])^2f_1(a)F_1(a)da+$$

$$+m(m+1)\int_0^{\infty}(a-M[a])^2f_1(a)F_1^2(a)da.$$

Первые члены в этих выражениях равны соответственно $\bar{a}_{1P}-\bar{a}_{1A}$ и $\sigma_{1P}^2+\sigma_{1A}^2$, а плотности и распределения имеют вид:

$$f_1(a)=\frac{exp\left[-\frac{(a_1-\overline{a_{1A}}+\overline{a_{1A}})^2}{2(\sigma_{1P}^2+\sigma_{1A}^2)}\right]}{\sqrt{2\pi(\sigma_{1P}^2+\sigma_{1A}^2)}};$$

$$F_1(a)=\frac{1}{\sigma_{1P}\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{(a_{1P}-\overline{a_{1P}})^2}{2\sigma_{1P}^2}\right]\Phi\left(\frac{a_1-a_{1P}+\overline{a_{1A}}}{\sigma_{1A}}\right)da_{1P}.$$

Как уже раньше отмечалось, в частном случае 2 можно для расчетов математического ожидания и дисперсии случайной величины a использовать значение любой из величин a_i, $i=\overline{1,m}$, тогда как в частном случае 1 нужно использовать конкретную величину a_i, $i=\overline{1,m}$, которая определяет выделенный интервал распределения величины a. Поэтому, если выделенный интервал реализовался на a_i из соотношений (4.2), где $i=\overline{1,N}$, то математическое ожидание и дисперсия случайной величины a соответственно равны:

$$M[a]=\overline{a_{1P}}-\overline{a_{1A}};\ D[a]=\sigma_{1P}^2+\sigma_{1A}^2.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины a в частном случае 2 отличаются от частного случая 1 знакопеременными поправочными членами, убывающими по абсолютной величине. Поэтому при равных интервалах разбросов математическое ожидание и дисперсия в частном случае 2 меньше чем в частном случае 1.

Случайная матрица B входит также в выражения для a_i $i=\overline{N+1,N+M+1}$ из соотношений (4.2). Сначала рассмотрим каков характер ее влияния на величины a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$. Представим матрицу B в виде разложения по малому параметру и подставляя это разложение в формулу для a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$ получим

$$a_i=\frac{(\hat{z}-U\bar{B}y-U\bar{B}\Delta A\bar{B}y-U\bar{B}\Delta A\bar{B}\Delta A\bar{B}y)_i}{\left\{1+\frac{\{[U\bar{B}\Delta A+U(\bar{B}\Delta A)^2]U\bar{B}q\}_i}{(U\bar{B}q)_i}\right\}(U\bar{B}q)_i}.$$

Выполнив разложение знаменателя аналогично как и для a_i, $i=\overline{1,N}$, получим

$$\frac{1}{\left\{1+\frac{\{[U\bar{B}\Delta A+U(\bar{B}\Delta A)^2]U\bar{B}q\}_i}{(U\bar{B}q)_i}\right\}}=$$

$$=1-\frac{\{[U\bar{B}\Delta A+U(\bar{B}\Delta A)^2]U\bar{B}q\}_i}{(U\bar{B}q)_i}.$$

Подставляя это разложение в выражение для a_i получаем

$$a_i=\frac{[\hat{z}-U\bar{B}y-U\bar{B}\Delta A\bar{B}y-U\bar{B}(\bar{B}\Delta A)^2]_i}{(U\bar{B}q)_i}*$$

$$*\left\{1-\frac{\{[U\bar{B}\Delta A+U(\bar{B}\Delta A)^2]U\bar{B}q\}_i}{(U\bar{B}q)_i}\right\}.$$

Пренебрегая членами, включающими моменты 3-го и выше порядка для случайной матрицы ΔA, и принимая допущения, указанные выше, после преобразований это выражение можно записать так:

$$a_i=a_{iZ}-a_{iU}, \tag{4.6}$$

где $a_{iZ}=\frac{(\hat{z}-U\bar{B}y)_i}{(U\bar{B}q)_i}$; $a_{iU}=\frac{[U\bar{B}\Delta A\bar{B}y+U\bar{B}(\bar{B}\Delta A)^2\bar{B}y]_i}{(U\bar{B}q)_i}$.

Поскольку матрица U не случайная, то как видно из этого выражения, функция случайной величины a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$ от случайных параметров также как и для a_i, $i=\overline{1,N}$ сводится к функции этой величины с детерминированной матрицей A с учетом поправочного члена, обусловленного случайным характером элементов матрицы A.

Как и для a_i, $i=\overline{1,N}$ полагаем, что слагаемые случайной величины a_{iU} сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы слагаемых, включающих элементы матрицы ΔA отклонений от средних значений и число слагаемых достаточно велико для того, чтобы закон распределения случайной величины a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$ был приближенно-нормальным. Тогда плотность распределения случайной величины a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$ записывается в виде:

$$f(a_i)=\frac{1}{\sigma_{iU}\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{(a_i-\overline{a_{iU}})^2}{2\sigma_{iU}^2}\right],$$

где

$$\overline{a_{iU}}=\frac{[U\bar{B}(\bar{B}^T\circ D[\Delta A])U\bar{B}y]_i}{(U\bar{B}q)_i};$$

$$\sigma_{iU}^2=\frac{[(U\bar{B}\circ U\bar{B})D[\Delta A](U\bar{B}\circ U\bar{B})(y\circ y)]_i}{(U\bar{B}q)_i^2}.$$

Математическое ожидание и дисперсия поправочного члена получены с учетом пренебрежения моментами выше 2-го и использования соотношений $M[U\bar{B}\Delta A]=0$ и $M[\Delta AU\bar{B}\Delta A]=U^T\bar{B}^T\circ D[\Delta A]$ и $D[U\bar{B}\Delta A]=(U\bar{B}\circ U\bar{B})D[\Delta A]$.

Теперь остается рассмотреть характер влияния случайной матрицы B для a_i, $i=\overline{N+M+1}$. Те же рассуждения, что и при выводе формул для a_i, $i=\overline{1,N+M}$ приводят к выражению для

$$a_{N+M+1}=a_h-a_{hA}, \tag{4.7}$$

где $a_h=\frac{\hat{h}-\xi\bar{B}y}{\xi\bar{B}q}$; $a_{hA}=\frac{\xi\bar{B}\Delta A\bar{B}y+\xi(\bar{B}\Delta A)^2\bar{B}y}{\xi\bar{B}q}$.

Как и в вышеприведенных рассуждениях плотность распределения случайной величины a_{N+M+1} записывается в виде:

$$f(a_{N+M+1}) = \frac{1}{\sigma_h\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(a_h - \overline{a}_h)^2}{2\sigma_h^2}\right],$$

где

$$\overline{a_h} = \frac{\overline{B}(\overline{B}^T \circ D[\Delta A])\xi\overline{B}y}{\xi\overline{B}q};$$

$$\sigma_h^2 = \frac{(\xi\overline{B}\circ\xi\overline{B})D[\Delta A](\xi\overline{B}\circ\xi\overline{B})(y\circ y)}{(\xi\overline{B}q)^2}.$$

Математическое ожидание и дисперсия поправочного члена получены с учетом того, что $M[\xi\overline{B}\Delta A]=0$ и $M[\Delta A\xi\overline{B}\Delta A]=\xi^T\overline{B}^T \circ D[\Delta A]$ и $D[\xi\overline{B}\Delta A]=(\xi\overline{B}\circ\xi\overline{B})D[\Delta A]$.

Теперь остается исследовать вариант, когда случайными величинами наряду с матрицей A являются также матрица U и вектор ξ. В отличие от матрицы A, которая входит в состав всех соотношений для вычисления значений a_i, $i=\overline{1,N+M+1}$, матрица U и вектор ξ входят лишь в отдельные, специфичные для них выражения для величин a_i. Рассмотрим сначала выражение для матрицы U. Как и для матрицы A представим случайную матрицу U в виде суммы неслучайной матрицы $\overline{U}$ и случайной матрицы приращений ΔU, которую будем считать центрированной: $U=\overline{U}+\Delta U$. Подставим это выражение для матрицы U в формулу (4.4) для a_i, $i=\overline{1,N+M+1}$, после чего получим

$$a_i = \frac{[\hat{z}-(\overline{U}+\Delta U)\overline{B}y]_i}{[(\overline{U}+\Delta U)\overline{B}q]_i} - \frac{\{(\overline{U}+\Delta U)[\overline{B}\Delta A\overline{B}y+\overline{B}(\overline{B}\Delta A)^2\overline{B}y]\}_i}{(\overline{U}+\Delta U\overline{B}q)_i}.$$

Рассмотрим уменьшаемое в этом выражении для a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$. Его можно преобразовать к виду

$$\frac{[\hat{z}-\overline{U}\overline{B}y-\Delta U\overline{B}y]_i}{[1+\frac{(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i}](\overline{U}\overline{B}q)_i}.$$

Разложим сомножитель $\dfrac{1}{[1+\frac{(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i}]}$ по малому параметру $(\Delta U\overline{B}q)_i$, в результате чего, пренебрегая членами 3-го и выше порядка малости получаем:

$$\frac{1}{[1+\frac{(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i}]} = 1 - \frac{(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i}.$$

Тогда уменьшаемое в выражении для a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$ можно записать в виде:

$$\frac{[\hat{z}-\overline{U}\overline{B}y-\Delta U\overline{B}y]_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i}[1+\frac{(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i}].$$

После преобразований получаем выражение

$$\frac{[\hat{z}-\overline{U}\overline{B}y-\Delta U\overline{B}y]_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i} + \frac{(\hat{z}-\overline{U}\overline{B}y-\Delta U\overline{B}y)_i(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i^2}.$$

Сравнивая это выражение с выражением для a_{iZ} из (4.6) видим, что его можно представить как a_{iZ} из (4.6) и поправочный член, обусловленный случайной матрицей ΔU. Тогда это выражение, обозначаемое через $\hat{a}_{iZ}$ можно записать в виде

$$\hat{a}_{iZ} = a_{iZ} - a_{iz\Delta U},$$

где

$$a_{iz\Delta U} = \frac{(\Delta U\overline{B}y)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i} + \frac{(\hat{z}-\overline{U}\overline{B}y-\Delta U\overline{B}y)_i(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i^2}.$$

Преобразуя аналогично вычитаемое для a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$, получаем следующее выражение, обозначаемое через $\hat{a}_{iU}$

$$\hat{a}_{iU} = a_{iU} - \hat{a}_{i\Delta U},$$

где

$$\hat{a}_{i\Delta U} = \frac{[\Delta U\overline{B}\Delta A\overline{B}y+\Delta U\overline{B}(\overline{B}\Delta A)^2\overline{B}y]_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i} + \left(\frac{[\overline{U}\overline{B}\Delta A\overline{B}y+\overline{U}\overline{B}(\overline{B}\Delta A)^2\overline{B}y}{(\overline{U}\overline{B}q)_i^2} - \frac{\Delta U\overline{B}\Delta A\overline{B}y+\Delta U\overline{B}(\overline{B}\Delta A)^2\overline{B}y]_i(\Delta U\overline{B}q)_i}{(\overline{U}\overline{B}q)_i^2}\right).$$

Таким образом, случайный характер матрицы U приводит к аналогичным результатам, что и в случае детерминированной матрицы, но с учетом поправочных членов, обусловленных случайным характером матрицы U. Поэтому и для случайной матрицы U остаются в силе те рассуждения, которые приводят к выводу выражения для плотности распределения случайной величины a_i, $i=\overline{N+1,N+M}$, принимающей вид

$$f(a_i) = \frac{1}{\sigma_{i\Delta U}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(a_i-\overline{a_{i\Delta U}})^2}{2\sigma_{i\Delta U}^2}\right],$$

где

$$\overline{a_{i\Delta U}} = \overline{a_{iU}};$$

$$\sigma_{i\Delta U}^2 = \sigma_{iU}^2 + \{(\overline{B}\circ\overline{B})D[\Delta U](\overline{B}\circ\overline{B})D[\Delta A](y\circ y)\}_i + \{(\overline{U}\overline{B}\circ\overline{U}\overline{B})D[\Delta A](\overline{B}\circ\overline{B})(y\circ y)D[\Delta U](\overline{B}\circ\overline{B})(q\circ q)\}_i.$$

При выводе математического ожидания и дисперсии поправочного члена принято допущение, что матрицы ΔU и ΔA независимы, $M[\Delta A]=0$ и $M[\Delta U]=0$, моменты выше 2-го порядка опущены, а также учитывались теоремы о числовых характеристиках [63] .

Рассмотрим теперь нашу стохастическую задачу (4.1), когда случайным является также вектор ξ . Этот вектор входит в состав только выражения для a_i , $i=\overline{1,N+M+1}$. Как и для матрицы U представим случайный вектор ξ как сумму детерминированного и случайного векторов $\xi=\bar{\xi}+\Delta\xi$, где случайный вектор $\Delta\xi$ считаем центрированной случайной величиной. Подставим это выражение в соотношение (4.7) для величины a_i , $i=\overline{1,N+M+1}$

$$a_{N+M+1}=\frac{\hat{h}-(\bar{\xi}+\Delta\xi)\bar{B}y}{(\bar{\xi}+\Delta\xi)\bar{B}q}-$$
$$-\frac{(\bar{\xi}+\Delta\xi)\bar{B}\Delta A\bar{B}y+(\bar{\xi}+\Delta\xi)(\bar{B}\Delta A)^2\bar{B}y}{(\bar{\xi}+\Delta\xi)\bar{B}q}.$$

Выполняя преобразования и принимая допущения аналогичные тем, которые приняты при выводе соотношений для случайной матрицы U получаем, что выражение для a_i , $i=\overline{1,N+M+1}$ можно представить в виде

$$a_i=a_{h\xi}-a_{A\xi},$$

где

$$a_{h\xi}=a_h-a_\xi,\quad a_{A\xi}=a_{hA}-a_{hA\xi};$$

$$a_\xi=\frac{\Delta\xi\bar{B}y}{\bar{\bar{\xi}}\bar{B}q}+\frac{(\hat{h}-\bar{\bar{\xi}}\bar{B}y-\Delta\xi\bar{B}y)(\Delta\xi\bar{B}q)}{(\bar{\bar{\xi}}\bar{B}q)^2};$$

$$a_{hA\xi}=\frac{[\Delta\xi\bar{B}\Delta A\bar{B}y+\Delta\xi\bar{B}(\bar{B}\Delta A)^2\bar{B}y]_i}{(\bar{\bar{\xi}}\bar{B}q)_i}+$$
$$+\left(\frac{[\bar{\bar{\xi}}\bar{B}\Delta A\bar{B}y+\bar{\bar{\xi}}\bar{B}(\bar{B}\Delta A)^2\bar{B}y}{(\bar{\bar{\xi}}\bar{B}q)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\Delta\xi\bar{B}\Delta A\bar{B}y+\Delta\xi\bar{B}(\bar{B}\Delta A)^2\bar{B}y](\Delta\xi\bar{B}q)}{(\bar{\bar{\xi}}\bar{B}q)^2}\right).$$

Сравнивая эти результаты с результатами для неслучайного вектора ξ видим, что случайный характер вектора ξ приводит к аналогичным результатам, что и в случае детерминированного вектора, но с учетом поправочных членов, обусловленных случайным характером вектора ξ . Поэтому и для случайного вектора ξ остаются в силе те рассуждения, которые приводят к выводу выражения для плотности распределения случайной величины a_i , $i=\overline{1,N+M+1}$, принимающей вид

$$f(a_i)=\frac{1}{\sigma_{h\xi}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(a_i-\overline{a_{h\xi}})^2}{2\sigma_{h\xi}^2}\right],$$

где

$$\overline{a_{h\xi}}=\overline{a_h};$$

$$\sigma_{h\xi}^2=\sigma_h^2+\{(\bar{B}\circ\bar{B})D[\Delta\xi](\bar{B}\circ\bar{B})D[\Delta A](y\circ y)\}_i+$$
$$+\{(\bar{\bar{\xi}}\bar{B}\circ\bar{\bar{\xi}}\bar{B})D[\Delta A](\bar{B}\circ\bar{B})(y\circ y)D[\Delta\xi](\bar{B}\circ\bar{B})(q\circ q)\}_i.$$

При выводе математического ожидания и дисперсии поправочного члена принято допущение, что матрицы ΔU и ΔA независимы, а также с учетом того, что $M[\Delta A]=0$ и $M[\Delta U]=0$, а моменты выше 2-го порядка опущены, а также учитывались теоремы о числовых характеристиках [63].

Полученные общие и частные выражения математического ожидания и дисперсии целевой функции задачи (4.1) в зависимости от различных законов распределения параметров модели-компонентов вектора производственных мощностей и элементов матрицы коэффициентов прямых затрат полезны для анализа максимальных возможностей производства конечной продукции в заданных пропорциях в условиях неопределенности этих параметров.

4.3. Стохастическая динамическая оптимизационная модель

Динамическую модель, изложенную в третьей части статьи, в случае неопределенности некоторых ее параметров можно рассматривать как стохастический процесс, т.е. последовательность случайных значений выходных переменных в моменты времени t $(t=0,1,2,...)$. Случайные переменные принимают непрерывные значения, а время – дискретные значения.

Состояние системы переменных в каждый момент времени зависит от состояний в предшествующие моменты времени. Однако на практике моделировать такие процессы очень сложно, поэтому обычно применяют упрощающие предложения. Важнейшим среди них является предположение, что состояние системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от прошлого. Такие процессы называются процессами Маркова.

Допустим, что состояние динамической системы третьей части статьи можно представить процессом Маркова. Этот процесс определен, если есть правило, с помощью которого можно определить вероятности последовательности состояний системы в моменты времени t . Для этого необходимо чтобы были решены следующие задачи:

- определена информация, на основе которой можно получить все другие данные о состоянии системы;
- определено распределение вероятностей после некоторого числа шагов по времени и приближается ли оно с ростом числа шагов к какому-либо предельному распределению;
- определены вероятности перехода из одного фазового состояния в другое на некотором шаге по времени.

Динамическая модель, разработанная в третьей части статьи представляет собой набор уравнений рекуррентного типа и, кроме того, включает несколько оптимизационных задач. Последнее обстоятельство существенно усложняет методику расчета параметров рассматриваемого Марковского процесса. Для упрощения будем считать, что оптимизационные задачи решаются в детерминированной постановке, а неопределенность задается только в выходных данных этих задач.

Рассмотрим теперь конкретные соотношения процесса, определяемого динамической моделью. Выходными параметрами модели являются: вектор валового производства, вектор производства конечной продукции и др. Валовой выпуск продукции предприятия определяется исходя из закладки промежуточной продукции, затрат труда и длительности технологических циклов выпуска той или иной продукции предприятия. Зная объем закладки и длительность технологического цикла производства продукции, можно определить валовой выпуск. Поэтому начнем анализ с закладки продукции.

В момент времени t в случае, если количество промежуточной продукции на складах i-го предприятия достаточны для обеспечения работой занятых в размере $\hat{h}_i^t$ и $p_i^t\xi_i$, то объем закладки определяется минимальной из величин $\hat{x}_i^t$ и $\overset{\frown}{x}_i^t$, определяемых соотношениями (3.1) и (3.3).

$$\hat{x}_i^t = \frac{\mu_i \hat{h}_i^t}{\theta_i}$$

$$\textit{при условии } \hat{h}_i^t \le p_i^t\xi_i \ \textit{ и } \ \hat{x}_i^t \hat{a}_{ijr} \le V_{ijr}^t ; \qquad (4.8)$$

$$\Delta\overset{\frown}{x}_i^t = \frac{\mu_i \Delta p_i^t \xi_i}{\theta_i}$$

$$\textit{при условии } \hat{h}_i^t \le p_i^t\xi_i \ \textit{ и } \ \overset{\frown}{x}_i^t \hat{a}_{ijr} \le V_{ijr}^t . \qquad (4.9)$$

Первая величина выражает объем закладки, когда количество занятых не обеспечивает полную загрузку производственной мощности предприятия, а вторая величина выражает объем закладки при полной загрузке производственной мощности.

В случае, если количество промежуточной продукции на складах i-го предприятия недостаточно для обеспечения занятости имеющихся трудовых ресурсов на предприятии, выражение для закладки $\breve{x}_i^t$ записывается так:

$$\breve{x}_i^t = \min_{j,r}\left\{\frac{\mu_i}{\theta_i}\min[\hat{h}_i^t, p_i^t\xi_i] - \frac{V_{ijr}^t}{\hat{\alpha}_{ijr}}\right\}$$

$$\textit{при условии } \hat{x}_i^t \hat{a}_{ijr} > V_{ijr}^t \ \textit{ и } \ \overset{\frown}{x}_i^t \hat{a}_{ijr} > V_{ijr}^t . \qquad (4.10)$$

Закладка в текущий момент времени, обозначаемая $\dot{x}_i^t$ будет равна минимальной из величин $\hat{x}_i^t$, $\overset{\frown}{x}_i^t$ и $\breve{x}_i^t$

$$\dot{x}_i^t = \min\left\{\hat{x}_i^t, \overset{\frown}{x}_i^t, \breve{x}_i^t\right\}.$$

Выражения для производственной мощности i-го предприятия и числа занятых на нем на шаге t записываются в виде:

$$p_i^t = p_i^{t-1} + \Delta p_i^t ; \ \hat{h}_i^t = \hat{h}_i^{t-1} + \Delta\hat{h}_i^t .$$

Из уравнения (3.6) можно получить выражение для V_{ijr}^t в виде

$$V_{ijr}^t = V_{ijr}^{t-1} + \Delta V_{ijr}^t ,$$

где

$$\Delta V_{ijr}^t = -v_{ijr}^t + \hat{V}_{ijr}^{t-\tau_{ijr}} , \ v_{ijr}^t = \tilde{x}_i^t \hat{a}_{ijr} ,$$

$$\tilde{x}_i^t = \min\left\{\hat{x}_i^t, \overset{\frown}{x}_i^t\right\}.$$

Подставляя эти выражения для p_i^t, $\hat{h}_i^t$ и V_{ijr}^t в (4.8); (4.10) после преобразований получаем

$$\hat{x}_i^t = \hat{x}_i^{t-1} + \Delta\hat{x}_i^t ; \qquad (4.11)$$

$$\overset{\frown}{x}_i^t = \overset{\frown}{x}_i^{t-1} + \Delta\overset{\frown}{x}_i^t ; \qquad (4.12)$$

$$\breve{x}_i^t = \breve{x}_i^{t-1} + \Delta\breve{x}_i^t , \qquad (4.13)$$

где

$$\Delta\hat{x}_i^t = \frac{\mu_i \Delta\hat{h}_i^t}{\theta_i}$$

$$\textit{при условии } \Delta\hat{h}_i^t < \Delta p_i^t\xi_i \ \textit{ и } \ \Delta\hat{x}_i^t \hat{a}_{ijr} \le \Delta V_{ijr}^t ; \ (4.14)$$

$$\Delta\overset{\frown}{x}_i^t = \frac{\mu_i \Delta p_i^t \xi_i}{\theta_i}$$

$$\textit{при условии } \Delta\hat{h}_i^t \le \Delta p_i^t\xi_i \ \textit{ и } \ \Delta\overset{\frown}{x}_i^t \hat{a}_{ijr} \le \Delta V_{ijr}^t ; \ (4.15)$$

$$\Delta\breve{x}_i^t = \min_{j,r}\left\{\frac{\mu_i}{\theta_i}\min[\Delta\hat{h}_i^t, \Delta p_i^t\xi_i] - \frac{\Delta V_{ijr}^t}{\hat{\alpha}_{ijr}}\right\}$$

при условии

$$\Delta\hat{x}_i^t \hat{a}_{ijr} > \Delta V_{ijr}^t \ \textit{ и } \ \Delta\overset{\frown}{x}_i^t \hat{a}_{ijr} > \Delta V_{ijr}^t . \qquad (4.16)$$

Выражения (4.11)-(4.13) представляют собой случайный процесс, определяемый рекуррентными соотношениями, где $\Delta\overset{\frown}{x}_i^t$, $\Delta\hat{x}_i^t$ и $\Delta\breve{x}_i^t$ случайные величины, которые являются функциями, зависящими от случайных величин Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ и ΔV_i^t, где ΔV_i^t.

Последние случайные величины также могут быть представлены как функции других элементарных случайных величин, которые определяют их значения. Однако для упрощения исследования остановимся на уровне представления случайных величин Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ и ΔV_{ijr}^t как элементарных.

Рассматриваемый нами динамический процесс определяется рекуррентными соотношениями типа

$$X(t+1) = \Phi(t+1, X(t), \xi(t+1)), \ t = 0,1,2..., \qquad (4.17)$$

где $\Phi(t+1,x,y)$, $x \in E_L$, $y \in E_\Xi$ при каждом t случайная функция $L+\Xi$ переменных x,y, а $\xi(1),\xi(2),...$ – некоторые случайные векторы со значениями из E_Ξ.

Для того, чтобы рекуррентное соотношение (4.17) определяло некоторый процесс $X(t)$, необходимо задать начальное условие $X(0)$ в момент времени $t=0$. Процесс $X(t)$ с таким начальным условием будем обозначать $X^{0,X(0)}(t)$. В нашем случае $X(0)=x$ не случайно и $X^{0,x}(t)$ – процесс, выходящий в момент времени 0 из фиксированной точки x.

Пусть случайные величины $\xi(1),\xi(2),...$ независимы в совокупности. Тогда из вида системы (4.11)-(4.13) вытекает и независимость процесса $X(u)=X^{0,X(0)}(u),\ \xi(u+1),\xi(u+2),...$ при $u>0$. При этом процесс $X(t)=X^{0,X(0)}(t)$ полностью определяется по величинам $X(0),\xi(1),\xi(2),...,\xi(t)$ т.е. является некоторой функцией величин $X(0),\xi(1),\xi(2),...,\xi(t)$. В [65] доказывается, что процесс $X(t)=X^{0,X(0)}(t)$, определяемый рекуррентными соотношениями (4.11)-(4.13) и начальным условием $X(0)$ является Марковским и его переходная функция $P(u,x,u+1,\Gamma)$ за один шаг равна

$$P\{\Phi(u+1,x,\xi(u+1))\}\in\Gamma . \qquad (4.18)$$

Закладка в текущий момент времени определяется минимальной из величин (4.9)-(4.11) поэтому можно записать

$$\dot{x}_i^t=\min\left\{\hat{x}_i^{t-1},\hat{x}_i^{t-1},\breve{x}_i^{t-1}\right\}+\min\left\{\Delta\hat{x}_i^t,\Delta\hat{x}_i^t,\Delta\breve{x}_i^t\right\}.$$

Процесс, определенный рекуррентными соотношениями (4.11)-(4.13) не является в собственном смысле случайным процессом, а представляет собой определенную имитацию этого процесса, поскольку под случайными понимаются параметры Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ и ΔV_{ijr}^t, точные значения которых неизвестны, но предполагаются известными функции их распределения как случайных величин. Суть имитации случайного процесса заключается в том, что на каждом шаге процесса (4.11)-(4.13) на основе заданных распределений параметров Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ и ΔV_{ijr}^t вычисляется математические ожидания величин $\Delta\hat{x}_i^t$, $\Delta\hat{x}_i^t$ и $\Delta\breve{x}_i^t$, выбирается минимальное из них обозначаемое как $\overline{\Delta\dot{x}_i^t}$ и определяется детерминированное значение закладки на шаге t по времени $\dot{x}_i^t=\dot{x}_i^{t-1}+\overline{\Delta\dot{x}_i^t}$.

Таким образом, величина $\dot{x}_i^t$ определяется в конечном итоге математическим ожиданием случайной величины $\Delta\dot{x}_i^t$, которая может быть реализована в виде одной из случайных величин $\Delta\hat{x}_i^t$, $\Delta\hat{x}_i^t$ и $\Delta\breve{x}_i^t$, образующих полную группу событий. Вероятности реализации этих событий равны математическим ожиданиям величин $\Delta\hat{x}_i^t$, $\Delta\hat{x}_i^t$ и $\Delta\breve{x}_i^t$.

Для вычисления математических ожиданий величин $\Delta\hat{x}_i^t$, $\Delta\hat{x}_i^t$ и $\Delta\breve{x}_i^t$ необходимо знать функции их распределения. Допустим, что случайные величины Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ и ΔV_{ijr}^t распределены на отрезках с минимальными и максимальными граничными значениями, и Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ и ΔV_{ijr}^t – средние значения величин разброса прироста производственной мощности i-го предприятия, числа занятых и имеющихся запасов промежуточной продукции на одном шаге по времени. Допустим также, что заданы функции распределения этих случайных величин, обозначаемые через $F_{\Delta p_i^t}$, $F_{\Delta h_i^t}$ и $F_{\Delta V_{ijr}^t}$.

Очевидно, что функции распределения $F_{\Delta p_i^t}$ и $F_{\Delta h_i^t}$ являются переходными функциями для первых двух случайных величин из $\Delta\hat{x}_i^t$, $\Delta\hat{x}_i^t$ и $\Delta\breve{x}_i^t$ и их математические ожидания равны

$$\overline{\Delta\hat{x}_i^t}=\frac{\mu_i\overline{\Delta\hat{h}_i^t}}{\theta_i},\quad \overline{\Delta\hat{x}_i^t}=\frac{\mu_i\overline{\Delta p_i^t}\xi_i}{\theta_i}.$$

Для третьей случайной величины $\Delta\breve{x}_i^t$ переходную функцию требуется определить. Выражение для этой случайной величины можно упростить и переписать в виде:

$$\Delta\breve{x}_i^t=\frac{\mu_i}{\theta_i}\min[\Delta\hat{h}_i^t,\Delta p_i^t\xi_i]-\min_{j,r}\frac{\Delta V_{ijr}^t}{\hat{\alpha}_{ijr}}. \qquad (4.19)$$

Данное выражение представляет собой разность минимумов двух случайных величин. Поэтому сначала найдем распределение уменьшаемого. Обозначим $\Delta p_i^t\xi_i$ через $\Delta\hat{p}_i^t$. Полагая, что случайные величины Δp_i^t, $\Delta\hat{h}_i^t$ независимы, плотность и функция распределения уменьшаемого как минимума двух величин, обозначаемая через $f(\Delta\hat{h}_i^t,\Delta\hat{p}_i^t)$, равна [80]:

$$f(\Delta\hat{h}_i^t,\Delta\hat{p}_i^t)=$$
$$=f(\Delta\hat{h}_i^t)[1-F_{\Delta\hat{p}_i^t}(\Delta\hat{h}_i^t)]-f(\Delta\hat{p}_i^t)[1-F_{\Delta\hat{h}_i^t}(\Delta\hat{p}_i^t)];$$

$$F(\Delta\hat{h}_i^t,\Delta\hat{p}_i^t)=F(\Delta\hat{h}_i^t)+F(\Delta\hat{p}_i^t)-F(\Delta\hat{h}_i^t)F(\Delta\hat{p}_i^t).$$

Для упрощения определения плотности функции распределения вычитаемого объединим множества индексов $j\in I_{NQ}$ и $r\in I_P$ в одно множество I_L. Тогда случайную величину $\frac{\Delta V_{ijr}^t}{\hat{\alpha}_{ijr}}$ перепишем в виде $\Delta\hat{V}_{in}^t$, где $n\in I_L$. Плотность и функцию распределения случайной величины $n\in I_L$, обозначаемую через $f(\Delta\hat{V}_{in}^t)$ можно записать в виде [80]:

$$f(\Delta\hat{V}_{in}^t)=\sum_{l\in I_L}\frac{f(\Delta\hat{V}_{il}^t)}{1-F(\Delta\hat{V}_{il}^t)}\prod_{\substack{n\in I_L\\ n\neq l}}[1-F(\Delta\hat{V}_{in}^t)];$$

$$F(\Delta\hat{V}_{in}^t)=1-\prod_{n\in I_L}[1-F(\Delta\hat{V}_{in}^t)].$$

Обозначим случайную величину $\Delta\bar{x}_i^t$ через z, а уменьшаемое и вычитаемое, составляющие этой величины в формуле (4.19) через x и y. Полагая, что случайные величины x и y независимы, формулу для вычисления математического ожидания разности двух случайных величин можно записать в виде [80]:

$$\bar{z}=\int_{x\in X}\int_{y\in Y}(x-y)f_x(x)f_y(y)dxdy,$$

где

z – математическое ожидание случайной величины z;

$f_x(x)$ – плотность функции распредел. величины x;

$f_y(y)$ – плотность функции распредел. величины y;

X, Y – области определ. случайных величин x и y.

Случайные величины x и y определены на отрезках с минимальным и максимальным значениями, которые обозначим через x^-,x^+ и y^-,y^+. Тогда формулу для математического ожидания $\bar{z}$ можно переписать в виде:

$$\bar{z}=\int_{x^-}^{x^+}xf_x(x)\left\{\int_{y^-}^{x}f_y(y)dy\right\}*$$

$$*dx-\int_{y^-}^{y^+}yf_y(y)\left\{\int_{y}^{y^+}f_x(x)dx\right\}dy.$$

Обозначим через $F_x(x)$ и $F_y(y)$ функции

$$F_x(y)=1-\int_{y}^{y^+}f_x(x)dx;\ F_x(y)=1-\int_{y^-}^{x}f_y(y)dy.$$

С учетом этих обозначений формулу для $\bar{z}$ можно переписать в виде:

$$\bar{z}=\int_{x^-}^{x^+}xf_x(x)F_y(x)dx-\int_{y^-}^{y^+}yf_y(y)[1-F_x(y)]dy.$$

Уменьшаемое в этой формуле – это математическое ожидание случайной величины x, а вычитаемое – математическое ожидание случайной величины y. Обозначим уменьшаемое в этой формуле через $\bar{z}^+$, а вычитаемое через $\bar{z}^-$ и выведем формулы для этих величин. Случайная величина x представляет собой минимальное значение из двух случайных величин $\Delta\hat{h}_i^t$ и $\Delta\hat{p}_i^t$, которые обозначим через x_1 и x_2, а их плотности распределения через $f_{x_1}(x_1)$ и $f_{x_2}(x_2)$. Случайная величина y – это минимальное значение случайных величин $\Delta\hat{V}_{in}^t$, $n\in I_L$, которые обозначим через y_n, $n\in I_L$. Тогда величины $\bar{z}^+$ и $\bar{z}^-$ можно записать в виде:

$$\bar{z}^+=\int_{x_1^-}^{x_1^+}x_1f_{x_1}(x_1)[1-F_{x_2}(x_1)][1-$$

$$-\prod_{n\in I_L}[1-F_{y_n}(x_1)]]dx_1+$$

$$+\int_{x_2^-}^{x_2^+}x_2f_{x_2}(x_2)[1-F_{x_1}(x_2)][1-$$

$$-\prod_{n\in I_L}[1-F_{y_n}(x_2)]]dx_2.$$

$$\bar{z}^-=\int...\int y_1f_{y_1}(y_1)...f_{y_L}(y_L)*$$

$$*[1-F_{x_1}(y_1)-F_{x_2}(y_1)+$$

$$+F_{x_1}(y_1)F_{x_2}(y_1)]dy_1...dy_L+...$$

$$...+\int...\int y_Lf_{y_1}(y_1)...f_{y_L}(y_L)*$$

$$*[1-F_{x_1}(y_L)-F_{x_2}(y_L)+$$

$$+F_{x_1}(y_L)F_{x_2}(y_L)]dy_1...dy_L.$$

Полагая, что подинтегральные функции в выражении для $\bar{z}^-$ непрерывны, многомерный интеграл можно заменить на кратные интегралы [81], после чего это выражение примет вид

$$\bar{z}^-=\int_{y_1^-}^{y_1^+}y_1f_{y_1}(y_1)[1-F_{x_1}(y_1)-$$

$$-F_{x_2}(y_1)+F_{x_1}(y_1)F_{x_2}(y_1)]dy_1...$$

$$...\int_{y_1^-}^{y_1^+}f_{y_L}(y_L)dy_L+......+\int_{y_1^-}^{y_1^+}f_{y_1}(y_1)dy_1...$$

$$...\int_{y_L^-}^{y_L^+}y_Lf_{y_L}(y_L)[1-F_{x_1}(y_L)-$$

$$-F_{x_2}(y_L)+F_{x_1}(y_L)F_{x_2}(y_L)]dy_L.$$

Выражение для $\bar{z}^+$ можно упростить, раскрыв произведение величин $\prod_{n\in I_L}[1-F_{y_n}(x_1)]$ и $\prod_{n\in I_L}[1-F_{y_n}(x_2)]$ и затем пренебречь членами степени выше 3-го порядка, поскольку величины $F_{y_n}(x_1)$ и $F_{y_n}(x_2)$ меньше единицы:

$$\prod_{n\in I_L}[1-F_{y_n}(x_1)]=$$

$$=1-\sum_{n\in I_L}F_{y_n}(x_1)+\sum_{n\in I_L}\sum_{\substack{l\in I_L\\ n\neq l}}F_{y_n}(x_1)F_{y_l}(x_1)-$$

$$-\sum_{n\in I_L}\sum_{l\in I_L}\sum_{\substack{k\in I_L\\ n\neq l\ \ l\neq k}}F_{y_n}(x_1)F_{y_l}(x_1)F_{y_k}(x_1).$$

Выражение для $\prod_{n\in I_L}[1-F_{y_n}(x_2)]$ аналогично. В итоге получаем:

$$\bar{z}^{+} = \int_{x_1^-}^{x_1^+} x_1 f_{x_1}(x_1)[1-F_{x_2}(x_1)][\sum_{n\in I_L} F_{y_n}(x_1) + \sum_{\substack{n\in I_L \\ n\neq l}} \sum_{l\in I_L} F_{y_n}(x_1)F_{y_l}(x_1) - \sum_{\substack{n\in I_L \\ n\neq k}} \sum_{\substack{l\in I_L \\ l\neq k}} \sum_{k\in I_L} F_{y_n}(x_1)F_{y_l}(x_1)F_{y_k}(x_1)]dx_1 +$$
$$+ \int_{x_2^-}^{x_2^+} x_2 f_{x_2}(x_2)[1-F_{x_1}(x_2)][\sum_{n\in I_L} F_{y_n}(x_2) + \sum_{\substack{n\in I_L \\ n\neq l}} \sum_{l\in I_L} F_{y_n}(x_2)F_{y_l}(x_2) - \sum_{\substack{n\in I_L \\ n\neq l}} \sum_{\substack{l\in I_L \\ l\neq k}} \sum_{k\in I_L} F_{y_n}(x_1)F_{y_l}(x_2)F_{y_k}(x_2)]dx_2 .$$

При выводе последних формул в качестве упрощения величины y_n рассматривались как первичные случайные величины, которые являются частными от деления двух случайных величин ΔV_{in}^{t} и $\hat{a}_{in}$, $n \in I_L$. Опуская индексы предприятия и времени, обозначим их через w_n и v_n. Функции и плотность распределения частного двух случайных переменных имеет вид [80]:

$$F_{y_n}(y_n) = \int_{v_n^-}^{0} f_{v_n}(v_n)dv_n \int_{y_n v_n}^{w_n^+} f_{w_n}(w_n)dw_n + \int_{0}^{v_n^+} f_{v_n}(v_n)dv_n \int_{w_n^-}^{y_n w_n} f_{w_n}(w_n)dw_n ;$$

$$f_{y_n}(y_n) = -\int_{v_n^-}^{0} v_n f_{v_n}(v_n) f_{w_n}(y_n v_n)dv_n + \int_{0}^{v_n^+} v_n f_{v_n}(v_n) f_{w_n}(y_n v_n)dv_n .$$

В случае использования нормальных законов распределений исходных параметров для более удобного выполнения вычислений можно заменить функции распределений на логистическую функцию, как это было показано в разделе 4.2.

Выводы

В четвёртой части статьи моделируется проектирование организационных структур предприятий и производственных процессов в условиях технических и экономических рисков. Технические и экономические риски выражаются в виде случайных значений параметров модели, реализуемых на заданных интервалах их значений. Эта модель представляется в виде решения стохастической динамической оптимизационной задачи, которая декомпозируется на стохастическую статическую оптимизационную задачу, отражающую конечную точку реализации заданного производственного проекта и стохастическую динамическую оптимизационную задачу, отражающую траекторию точки процесса в фазовом пространстве.

Из решения стохастической статической оптимизационной задачи могут быть получены числовые характеристики выходных данных модели как функции случайных параметров, такие как средние значения, дисперсии и т.д. На основе полученных числовых характеристик стохастической статической оптимизационной модели выходные данные детерминированной модели, отражающей конечную точку реализации заданного производственного проекта могут быть скорректированы или представлены в виде интервалов значений с рассчитанными вероятностями их реализации.

Рассматривались два частных случая решения задачи (4.1). В частном случае 1 $m=1$ и $a_2^- = a_1^+$. В частном случае 2 первые $m\ (m>1)$ членов упорядоченной по возрастанию последовательности $\{a_i^-\}$ равны между собой, т.е. $a_i^- = a_1^-$, $i=\overline{1,m}$ и, кроме того, $a_{m+1}^- = a_1^+$.

Для этих двух частных случаев выведены формулы функций распределения случайной величины a, а также математических ожиданий и дисперсий для различных вариантов задания параметров как случайных величин.

Рассматривались следующие варианты задания случайными параметров:

- случайные параметры векторы p, $\hat{z}$ и скаляр $\hat{h}$;
- случайные параметры векторы p, $\hat{z}$ и скаляр $\hat{h}$ и элементы матрицы A;
- случайные параметры векторы p, $\hat{z}$ и скаляр $\hat{h}$ и элементы матриц A и U;
- случайные параметры векторы p, $\hat{z}$, ξ, скаляр $\hat{h}$ и элементы матриц A и U.

Для этих вариантов получены формулы функций плотности распределений величин a_l в зависимости от функций распределений случайных параметров. Показано, что плотности распределения величин a_l практически всегда будут иметь нормальные распределения, если в рассматриваемом варианте присутствуют случайная матрица A. В качестве функций распределений случайных параметров рассматривались равномерный закон на отрезке, усеченный нормальный закон на отрезке и нормальный закон на положительной полуоси. Выбор распределения случайных параметров зависит от конкретного производственного проекта и его условий.

Анализ вариантов задания случайных параметров показывает, что параметры плотностей распределений случайных величин a_l содержат детерминированные значения и поправочные члены, обусловленные случайным характером величин p, $\hat{z}$, ξ, $\hat{h}$, A и U.

Задание случайных параметров в динамической модели приводит к трактовке динамического процесса как стохастического. Показано, что динамический процесс, определенный в третьей части статьи можно представить как процесс Маркова. Для основного показателя динамического процесса – процесса закладки и выпуска продукции с учетом случайности параметров p, ξ, $\hat{h}$ и V_{ijr}^{t} получено выражение для переходной функции, позволяющей на каждом шаге стохастического динамического процесса получать его числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и т.д.). Это позволяет определить наиболее вероятные характеристики динамического процесса в каждой точке реализации производственного проекта и их возможные отклонения с заданной вероятностью.

Полученные из решения стохастической динамической модели числовые характеристики траектории точки процесса в фазовом пространстве позволяют скорректировать данные, полученные на детерминированной динамической модели или представить движение точки процесса в фазовом пространстве в пределах полученных интервалов с рассчитанными вероятностями их реализации.

5. РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ИНВЕСТИЦИЙ, ПРИБЫЛЬНОСТИ И ОКУПАЕМОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЕКТА

5.1. Методика расчета инвестиций в производственный проект

В 1-4 частях статьи разработаны математические модели и методики расчета оптимальных показателей реализации заданного производственного проекта с учетом технических и экономических рисков. Общая сумма инвестиций в заданный производственный проект слагается из нескольких составных частей:

- стоимости проектных работ;
- стоимости оборудования, которое требуется установить на перепрофилируемых предприятиях;
- стоимости оборудования, которое требуется установить на вновь построенных объектах;
- стоимости строительства зданий и сооружений;
- стоимости подготовки кадров;
- стоимости средств, необходимых для запуска в производство новых изделий и выхода на плановый уровень производства.

Для каждого предприятия из состава предприятий, реализующих заданный производственный проект, определяется стоимость затрат, которые необходимы для выполнения предприятием своего задания в рамках общего производственного проекта. Таким образом для каждого предприятия определяется сумма инвестиций, необходимых для участия в реализации общего производственного проекта, а сумма инвестиций по всем предприятиям составляет общую потребную сумму инвестиций в этот проект.

Стоимость проектных работ зависит от размера инвестиций, которые вкладываются в реализацию заданного производственного проекта и определяется объемом строительных работ и работ по перепрофилированию предприятий и цехов. Эти объемы определены в разделах 2.3-2.5.

Стоимость оборудования, которое требуется установить на перепрофилируемых вновь строящихся предприятиях и цехах определяется на основе алгоритмов, разработанных в разделах 2.4, 3.3 и 3.4. Стоимость оборудования, которое требуется установить на i-м предприятии, перепрофилируемом под выпуск продукции j-го предприятия, обозначаемая через $F^{p}_{i_j}$ определяется суммированием соответствующего выражения из 3.3 по индексам r и k:

$$F^{p}_{i_j} = \sum_{r \in I_P} \sum_{k \in I_F} \upsilon_{rki_j} \Delta F_{ki_j}.$$

Стоимость оборудования, которое требуется установить на вновь построенном i-м предприятии, обозначаемая через F^{c}_{i}, определяется суммированием соответствующего выражения из раздела 3.4 по индексам r и k:

$$F^{c}_{i} = \sum_{r \in I_P} \sum_{k \in I_F} \upsilon^{c}_{rki} \Delta F_{ki}.$$

Алгоритм расчета стоимости строительства зданий и сооружений разработан в разделах 2.5 и 3.5. Стоимость необходимого объема строительства зданий и сооружений на i- м предприятии, обозначаемая S^{c}_{i}, определяется по формуле:

$$S^{c}_{i} = s_i \Delta P_i.$$

Стоимость подготовки кадров, требуемых для обеспечения реализации предприятием своего участия в заданном производственном проекте определяется количеством работников, которых требуется обучить или переобучить на новые специальности, временем переобучения, затратами труда преподавателей и оборудования, необходимых для обеспечения процесса обучения или переобучения. Алгоритм подготовки кадров и организации труда на предприятии разработан в разделе 3.7, где рассматривается время обучения (переобучения) работников. Введем величину w_{mni}, представляющую собой стоимость затрат на проведение одного часа занятий по переобучению из n-й специальности в m-ю специальность на i-м предприятии. Тогда общую стоимость подготовки кадров на i-м предприятии, обозначаемую через S^{L}_{i} можно рассчитать по формуле:

$$S^{L}_{i} = \sum_{m=1}^{L} \sum_{n=1}^{L} w_{mni} d_{mni} \varsigma_{mni},$$

где d_{mni} – время переобучения из n-й специальности в m-ю специальность на i-м предприятии;

ς_{mni} – количество работников с n-й специальностью, которых надо переобучить на m-ю специальность на i-м предприятии.

Стоимость средств, необходимых для запуска в производство новых изделий и выхода на плановый уровень производства зависит от различных условий, в которых осуществляется деятельность предприятия, в частности в зависимости от рыночных условий и возможностей сбыта продукции и других факторов.

В разделе 5.2 разработан алгоритм расчета на каждом шаге по времени в процессе производства продукции денежных средств, которые в случае необходимости должны быть привлечены (займы, кредиты) в целях обеспечения запуска производства продукции и выхода на плановый уровень.

Общая сумма денежных средств, которые должны быть привлечены на i-м предприятии, обозначаемая через Z_i, определяется суммированием сумм, привлекаемых в каждой точке по времени:

$$Z_i = \sum_{t=1}^{T_i} Z_i(t),$$

где T_i – период времени в течение которого i-е предприятие выходит на плановый уровень производства.

Общая сумма инвестиций в i-е предприятие, участвующее в реализации заданного производственного проекта, обозначаемая через Inv_i, составляется из перечисленных выше затрат и будет равна:

$$Inv_i = Pr_i + F^{P}_{i_j} + F^{C}_{i} + S^{C}_{i} + S^{L}_{i} + Z_i.$$

5.2. Модель расчета прибыльности и срока окупаемости производственного проекта

После того, как рассчитана общая сумма инвестиций в реализуемый производственный проект, требуется оценить срок его окупаемости, который может быть рассчитан исходя из рентабельности деятельности каждого из предприятий из состава этого производственного проекта. Для определения рентабельности деятельности предприятия необходимо рассчитать получаемую предприятием прибыль как разницу между затратами, требуемыми для обеспечения производственного процесса и выручкой, получаемой в результате реализации произведенной продукции. Для оценки прибыли целесообразно использовать динамическую модель закладки и выпуска продукции, разработанную в третьей части статьи, дополнив ее элементами, позволяющими рассчитать выручку, получаемую в результате реализации продукции и другие финансовые показатели деятельности предприятия.

Основным дополнительным элементом является уравнение для расчета в каждый текущий момент времени остатков денежных средств в наличной или безналичной форме. Это уравнение в каждой точке по времени выражает баланс расхода и прихода денежных средств за отрезок времени между предыдущей и текущей точкой с учетом остатка денежных средств в предыдущей точке по времени.

Приход денежных средств осуществляется за счет выручки от продажи продукции предприятия и полученных кредитов (займов, субвенций и т.д.), а расход определяется затратами на закупку необходимого сырья, материалов, комплектующих, выполнением необходимых для обеспечения производства работ и оказания услуг, выплатой заработной платы работникам предприятия, оплатой процентов по полученным кредитам и займам, возвратом сумм кредитов и займов, уплатой налогов и другими затратами.

Кроме основного уравнения движения денежных средств для расчета их остатка систему целесообразно дополнить также соотношениями, характеризующими временные запаздывания (лаги) поступления и расходования денежных средств. Запаздывания поступлений денежных средств могут быть связаны с задержкой реализации товаров или задержкой платежей уже реализованных товаров. Задержка расходования денежных средств может быть связана с предоставлением предприятию товарных кредитов (рассрочкой оплаты купленных товаров).

На движение денежных средств могут оказывать влияние также некоторые не прямые факторы, как например, затоваривание складских помещений – складов исходных материалов и складов готовой продукции. Для более точного учета динамики движения материальных и соответствующих им денежных ресурсов целесообразно также учесть и эти влияния.

Предоставляемые предприятию займы (кредиты, субвенции и т.д.) обычно учитываются как экзогенные величины, расчет и обоснование которых осуществляется вне данной модели. Однако весьма важно обосновывать и рассчитывать необходимую величину займов именно эндогенно, т.е. в рамках самой модели, увязывая их величину с другими параметрами. Такой подход принят в данной модели – на каждом шаге по времени при нехватке денежных ресурсов рассчитывается потребная сумма привлеченных денежных ресурсов.

С учетом изложенного выше разработанная в третьей части статьи модель и алгоритм расчета динамики выпуска продукции на предприятиях модифицирована и позволяет рассчитать основные финансовые показатели деятельности предприятия и, тем самым определить рентабельность предприятия и срок окупаемости производственного проекта.

В алгоритме расчета рентабельности предприятия как и в модели третьей части статьи производство ограничивается производственными мощностями по изготовлению изделий и количеством занятых (с учетом сменности), которые рассчитываются по методикам, изложенным во 2 и 3 частях статьи. Задается период расчетов, в течение которого требуется моделировать процессы производства и сбыта производимой продукции. Планирование производства продукции осуществляется на основе заключаемых договоров с покупателями и с учетом возможностей реализации на свободном рынке. В последнем случае сбыт может колебаться в зависимости от рыночной конъюнктуры. В соответствие с этим могут рассчитываться несколько вариантов реализации выпускаемой продукции:

- вся выпускаемая продукция реализуется в течение шага расчетов по времени (месяца);
- каждый вид продукции реализуется с задержкой, равной заданному проценту от выпуска.

Нереализованная готовая продукция хранится на складах готовой продукции. При переполнении этих складов производство приостанавливается до реализации излишков.

Денежные средства выручки от продажи каждого вида продукции также могут поступать с задержкой. Поэтому целесообразно рассмотреть следующие варианты:

- поступление без задержки (в течение месяца – шага расчетов);
- с задержкой, равной кратному числу шагов расчета (оцениваются исходя из контрактов на поставку или на основе предыдущей практики).

Увеличение выпуска продукции в течение всего периода расчетов осуществляется за счет роста производственных мощностей и увеличения количества занятых на производстве продукции и (или) увеличения количества рабочих смен. Количество закупаемых материалов и комплектующих ограничивается емкостью складских помещений. При переполнении склада материалов и комплектующих их закупка приостанавливается до достижения допустимого значения остатков материалов. При переполнении склада готовой продукции производство приостанавливается до достижения допустимого значения остатков готовой продукции.

Могут также задаваться несколько вариантов выплаты заработной платы: с учетом предполагаемой инфляции и роста производства – исходя из полученной прибыли в виде процента отчислений в фонд заработной платы.

На каждом шаге рассчитывается остаток денежных средств. Если денежных средств не хватает, то рассчитывается необходимое пополнение денежных средств (кредиты, займы, субвенции и т.д.). Остаток денежных средств на каждом шаге вычисляется с учетом их остатка на предыдущем шаге плюс выручка от реализации и пополнение за счет заимствования и минус расходы и уплачиваемые налоги. На каждом шаге вычисляется налог на имущество, налог на добавленную стоимость, налог на прибыль и единый социальный налог. Если вычет по налогу на добавленную стоимость превышает выручку, то формируется сумма к возврату из бюджета на текущем шаге и эта сумма используется на последующих шагах для уменьшения начисляемого налога на добавленную стоимость.

Алгоритм расчетов начинается с расчета выпуска каждого вида номенклатуры продукции (в ценах себестоимости) по формуле:

$$DXL(l,t)=\frac{ear(l)PL(l,t)}{ptearsum(l)}, \qquad (5.1)$$

где

$DXL(l,t)$ – выпуск изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

$PL(l,t)$ – количество занятых на выпуске изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

$ear(l)$ – средняя заработная плата на одного цехового работника, производящего l-е изделие;

$ptearsum(l)$ – доля цеховых затрат на заработную плату (включая ЕСН), приходящихся на единицу l-го изделия от общих цеховых затрат на заработную плату.

Далее проверяется ограничение на выпуск каждого вида номенклатуры продукции (в ценах себестоимости), которое не должно превышать производственную мощность линий по производству данной продукции. Это ограничение записывается в виде:

$$DXL(l,t)\le MXL(l,t),$$

где

$MXL(l,t)$ – производственная мощность по выпуску изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t.

Затраты материалов и комплектующих на выпуск каждого вида номенклатуры продукции определяются по формуле:

$$DVL(l,t)=DXL(l,t)ptmatsum(l),$$

где

$DVL(l,t)$ – расход материалов на изготовление изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

$ptmatsum(l)$ – доля материальных затрат от всех затрат (цеховых) на единицу изделия l-го типа.

Суммарные затраты материалов и комплектующих на производство продукции вычисляются суммированием расходов по каждой номенклатуре:

$$DV(t)=\sum_{l=1}^{PR}DVL(l,t),$$

где

$DV(t)$ – расход материалов за период между точками по времени $t-1$ и t;

PR – период времени моделирования.

На каждом шаге по времени рассчитывается остаток материалов на складе материалов и комплектующих, который определяется из уравнения:

$$V(t)=V(t-1)+PV(t)-DV(t),$$

где

$V(t)$ – остаток материалов и комплектующих на складе в точке по времени $t-1$;

$PV(t)$ – приход материалов и комплектующих за период между точками по времени $t-1$ и t.

Из предыдущего уравнения следует, что величина $DV(t)$ должна удовлетворять ограничению:

$$DV(t)\le V(t-1)+PV(t).$$

При максимальном использовании материалов величина $DV(t)$ будет равна

$$DV(t)=V(t-1)+PV(t).$$

В этой формуле остается неизвестным приход материалов и комплектующих на текущем шаге по времени, т.е. величина $PV(t)$.

Приход материалов зависит от стратегии их закупки и может быть реализован в 2-х вариантах:

1-й вариант: закупка осуществляться в размере, определяемом предыдущей формулой, но при нехватке денежных средств рассчитывается сумма необходимых денежных средств на текущем отрезке времени за счет предоставляемых кредитов. В этом случае величина $PV(t)$ вычисляется по формуле:

$$PV(t)=DV(t)-V(t-1).$$

2-й вариант: закупка определяется имеющимися на предприятии в начале текущего отрезка времени денежными средствами.

Величина прихода материалов и комплектующих на текущем отрезке времени в этом случае определяется ниже при расчете остатка денежных средств на предприятии. При этом может измениться и расход материалов и комплектующих на производство продукции и, соответственно, и выпуск продукции. В этом случае выпуск продукции, т.е. величина $DXL(l,t)$ должна вычисляться по формуле, учитывающей в отличие от формулы (5.1) затраты материалов и комплектующих:

$$DXL(l,t)=\frac{DVL(l,t)}{ptmatsum(l)}. \qquad (5.2)$$

Суммарные запасы материалов и комплектующих на производство продукции ограничиваются размером складских помещений, в которых размещаются материалы и комплектующие, что можно записать в виде неравенства:

$$V(t)\le SKLMAT,$$

где $SKLMAT$ – емкость склада материалов (в стоимостном выражении). Если это ограничение не выполняется, на этом шаге по времени закупка материалов и комплектующих не производится, т.е. $PV(t)=0.$

Валовой выпуск продукции (по ценам себестоимости) определяется суммированием выпуска каждой номенклатуры:

$$DX(t)=\sum_{l=1}^{PR}DXL(l,t),$$

где $DX(t)$ – валовой выпуск продукции по ценам себестоимости за период между точками по времени $t-1$ и t.

Выпуск продукции в продажных ценах равен произведению выпуска по ценам себестоимости на коэффициент наценки:

$$DPRL(l,t)=DXL(l,t)(ptincome(l)+1), \qquad (5.3)$$

где $DPRL(l,t)$ – выпуск изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

$ptincome(l)$ – средняя наценка на себестоимость изделия l-го типа.

Валовой выпуск продукции в продажных ценах определяется суммированием выпуска по всей номенклатуре продукции:

$$DPR(t)=\sum_{l=1}^{PR} DXL(l,t)\,(ptincome(l)+1),$$

где $DPR(t)$ – выпуск продукции за период между точками по времени $t-1$ и t.

Предполагается, что реализация готовой продукции может быть с задержкой, равной заданному проценту от выпуска и вычисляется по формуле:

$$DREALL(l,t)=DPRL(l,t)ptreal(l)), \qquad (5.4)$$

где $DPRLL(l,t)$ – реализация изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

Общий объем реализованной продукции на текущем шаге определяется суммированием реализации всех видов номенклатуры:

$$DREAL(t)=\sum_{l=1}^{PR} DREALL(l,t).$$

Остаток каждого вида номенклатуры продукции, нереализованной продукции на текущем шаге, определяется как разность:

$$DPRSKL(l,t)=DPRL(l,t)-DREALL(l,t), \qquad (5.5)$$

где $DPRSKL(l,t)$ – остаток изделий l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

Остаток всех видов продукции, не-реализованной продукции на текущем шаге, определяется суммированием остатков каждого вида номенклатуры:

$$DPRSK(t)=\sum_{l=1}^{PR} DPRSKL(l,t), \qquad (5.6)$$

где $DPRSK(t)$ – остаток продукции за период между точками по времени $t-1$ и t.

На каждом шаге также рассчитывается общий остаток готовой продукции, накопленный за все предыдущие шаги:

$$PRSK(t)=PRSK(t-1)-DPRSK, \qquad (5.7)$$

где $PRSK(t)$ – общий остаток продукции, накопленный за все предыдущие шаги по времени до точки t.

Если количество готовой продукции превышает объем складских помещений готовой продукции, равный $SKLPR$, то производство снижается до уровня

$$DXL(l,t)=sklkoef\,\frac{ear(l)PL(l,t)}{ptearsum(l)}, \qquad (5.8)$$

где коэффициент $sklkoef$ вычисляется по формуле

$$sklkoef=\frac{SKLPR}{PRSK(t)}, \qquad (5.9)$$

где $SKLPR$ – емкость склада готовой продукции (в стоимостном выражении).

Предполагается также, что денежная выручка от реализации готовой продукции может быть получена с задержкой, кратной числу периодов. Тогда в текущем периоде выручка от реализации вида номенклатуры продукции вычисляется по формуле:

$$DCL(l,t)=DREALL(l,t)ptmoney(l)+$$
$$+DREALL(l,t-tmoney(l)(1-ptmoney(l)),$$

где $DCL(l,t)$ – денежная выручка от реализации изделий l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

$ptmoney(l)$ – доля изделий l-го типа, денежная выручка от реализации которых приходит с задержкой;

$tmoney(l)$ – задержка поступления денежной выручки от реализации изделий l-го типа (число периодов времени).

Общая сумма выручки от реализации продукции на текущем шаге определяется суммированием выручки от реализации всех видов:

$$DC(t)=\sum_{l=1}^{PR} DCL(l,t),$$

где $DC(t)$ – общая сумма денежной выручки от реализации всех изделий, заработная плата вычисляется по формуле :

$$DL(t)=LADM+\sum_{l=1}^{PR} PL(l,t)\ ear(l),$$

где

$PL(l,t)$ – количество занятых цеховых работников на производстве изделия l-го типа за период между точками по времени $t-1$ и t;

$LADM$ – заработная плата административно-управленческого аппарата.

Расходы на производство продукции составляют:

$$DRASH(t)=PV(t)+DL(t)+DAM,$$

где

$DRASH(t)$ – общие затраты на производство продукции;

$PV(t)$ – закупка материалов и комплектующих, используемых на производство продукции;

DAM – отчисления на амортизацию основных средств.

Налог на имущество вычисляется по формуле:

$$DTIM(t)=STNIM\ F(t)/1200,$$

где

$DTIM(t)$ – налог на имущество ;

$F(t)$ – остаточная стоимость основных средств;

$STNIM$ – ставка налога на имущество в %.

Налог на добавленную стоимость рассчитывается по формуле:

$$DTNDS(t)=STNDS\,(DC(t)-PV(t))/100,$$

где

$DTNDS(t)$ – налог на добавленную стоимость;

$STNDS$ – ставка налога на добавленную стоимость в %.

Балансовая прибыль (до налогообложения) рассчитываются по формуле:

$$PR(t)=DC(t)-DRASH(t)-DTESN(t)-DTIM(t),$$

где $PR(t)$ – балансовая прибыль.

Налог на прибыль рассчитывается по формуле:

$$DTPR(t)=STNPR*PR(t),$$

где

$DTPR(t)$ – налог на прибыль;

$STNPR$ – ставка налога на прибыль в %.

Общая сумма уплачиваемых налогов равна:

$$DT(t)=DTPR(t)+DTNDS(t)+DTESN(t)+DTIM(t),$$

где $DT(t)$ – общая сумма уплачиваемых налогов.

Чистая прибыль после уплаты налога на прибыль соответственно равна:

$$PRC(t)=PR(t)-DT(t).$$

Суммарная прибыль, получаемая за период времени моделирования, обозначаемая через PRC, равна:

$$PRC=\sum_{l=1}^{PR} PRC(t).$$

В конце каждого шага по времени рассчитывается остаток денежных средств (касса, расчетные счета и др.) по формуле:

$$MONEY(t)=MONEY(t-1)+DC(t)+$$
$$+Z(t-1)-DRASH(t)-DT(t), \qquad (5.10)$$

где $MONEY(t)$ – остаток денежных средств в момент времени t.

Если на каком-либо шаге по времени возникает условие

$$MONEY(t)+DC(t)<DRASH(t)+DT(t),$$

то рассчитывается необходимое привлечение денежных средств (займы, кредиты и т.д.) по формуле:

$$Z(t)=DRASH(t)+DT(t)-MONEY(t)-DC(t). \qquad (5.11)$$

Этот случай соответствует 1-му варианту стратегии закупок материалов и комплектующих, необходимых для обеспечения производства продукции. Во 2-м варианте этой стратегии величина $PV(t)$, входящая в состав $DRASH(t)$ определяется из выражения:

$$PV(t)=MONEY(t-1)+$$
$$+DC(t)+Z(t-1)-DL(t)-DAM-DT(t).$$

Однако в этом случае уравнение (6.10) для определения величины $MONEY(t)$ становится нелинейным, поскольку после вычисления величины $PV(t)$ может измениться и величина расхода материалов и комплектующих $DV(t)$ и соответственно выпуск продукции. Для его решения можно использовать метод последовательных приближений. В этом методе расчеты следует повторять, начиная с расчета выпуска продукции по формуле (5.2) при другом значении расхода материалов и комплектующих $DV(t)$. При этом величина $DVL(l,t)$ рассчитывается по формуле:

$$DVL(l,t)=DV(t)ptmat(l),$$

где $ptmat(l)$ – доля материалов и комплектующих, затрачиваемых на производство единицы продукции l-го типа.

Цикл последовательных приближений повторяется до тех пор, пока значение величины $MONEY(t)$ для соседних приближений не будет отличаться от заданной точности приближений.

На каждом шаге по времени также рассчитывается остаточная стоимость основных средств по формуле:

$$F(t)=F(t-1)-DAM.$$

В приведенном алгоритме в качестве исходных данных выступают мощности по производству продукции и количество занятых на производстве этой продукции. Систему уравнений этой задачи можно назвать прямой, а в качестве обратной рассматривать задачу, в которой в качестве исходных данных задаются требуемый объем производства продукции или объем сбыта. Поскольку сбыт может отставать по времени от производства, то их объемы не равны в каждой точке по времени и в качестве исходных данных может приниматься задаваемый как функция времени объем производства или сбыта. В обратной задаче требуется определить необходимое количество занятых, чтобы получить заданный объем производства или сбыта. Считая, что величина t задана, из формулы (6.1) получаем выражение для количества занятых, которое необходимо для выпуска заданного объема продукции, равного $DXL(l,t)$:

$$PL(l,t)=\frac{ptearsum(l)DXL(l,t)}{ear(l)}. \qquad (5.12)$$

При этом безусловно предполагается, что задаваемая функция объема производства не превышает мощность по производству этой продукции.

В том случае, когда задан требуемый объем сбыта, который реализуется с задержкой от выпуска, то требуемое количество занятых и объем производства вычисляются по следующему алгоритму. Сначала из формулы (5.4) рассчитывается выпуск продукции в продажных ценах, который необходим для обеспечения сбыта с заданной задержкой:

$$DPRL(l,t)=\frac{DREALL(l,t)}{ptreal(l)}.$$

Затем из формулы (6.3) определяем требуемый выпуск продукции в ценах себестоимости:

$$DXL(l,t)=\frac{DPRL(l,t)}{(ptincome(l)+1)}.$$

Затем по формуле (5.12) определяем количество занятых, необходимое для выпуска требуемого объема продукции. Кроме того, надо проверить, не превышает ли объем производства на текущем шаге по времени объем складских помещений готовой продукции. Для этого по формулам (5.5)-(5.9) рассчитывается тот объем производства, который при заданной задержке реализации не превышает объема складских помещений готовой продукции. После этого по формуле (6.12) вычисляется окончательное количество занятых, которое необходимо для обеспечения заданного объема сбыта продукции при условии сбыта с заданной задержкой после выпуска.

В разделе 5.1 определен алгоритм расчета инвестиций, которые необходимы для реализации участия предприятия в заданном производственном проекте. Данная модель позволяет также рассчитать срок окупаемости производственной деятельности предприятия, обозначаемый через T^{PR}. Этот срок можно найти из решения следующего интегрального уравнения:

$$Inv=\sum_{l=1}^{T^{PR}} PRC(t), \qquad (5.13)$$

где Inv – объем инвестиций, требуемых для участия предприятия в заданном производственном проекте.

Разработанная модель расчета прибыльности и срока окупаемости производственного проекта позволяет также рассчитать основные обобщающие показатели хозяйственной деятельности предприятий, реализующих заданный производственный проект, выполнить анализ уровня и динамики финансовых результатов, оценить рентабельность деятельности как отдельных предприятий, так и производственного проекта в целом.

5.3. Модель расчета прибыльности и срока окупаемости производственного проекта в стохастической интерпретации (первый алгоритм)

В четвертой части статьи разработаны модели реализации производственного проекта в стохастической интерпретации. Это означает, что модели в случае неопределенности их параметров можно рассматривать как стохастические. В частности в разделе 4.3 была разработана стохастическая динамическая модель в виде процесса Маркова на основе детерминированной динамической модели, разработанной в третьей части статьи. Этот процесс определялся в виде рекуррентных соотношений для выходных показателей модели, причем данный процесс не является в собственном смысле случайным процессом, а представляет собой определенную имитацию этого процесса.

Имитация связана с представлением параметров процесса как случайных величин с известными функциями их распределения. Поскольку модель предыдущего раздела представляет собой дополненный вариант динамической модели третьей части статьи, ее также можно представить в стохастической интерпретации на основе принципов, изложенных в разделе 4.7, т.е. в виде процесса Маркова.

В качестве выходных показателей, для которых целесообразно разработать стохастическую интерпретацию можно использовать выпуск продукции $\boldsymbol{DXL(l,t)}$ (прямая задача) и количество занятых $\boldsymbol{PL(l,t)}$, которое требуется для обеспечения заданного объема выпуска продукции на предприятии в каждой точке по времени (обратная задача). В качестве неопределенных переменных, которые задаются функциями распределений на заданных интервалах в первом случае рассмотрим параметры $\boldsymbol{PL(l,t)}$, $\boldsymbol{MXL(l,t)}$, $\boldsymbol{DVL(l,t)}$, $\boldsymbol{ear(l)}$, $\boldsymbol{ptearsum(l)}$, $\boldsymbol{ptmatsum(l)}$, $\boldsymbol{ptmat(l)}$, а во второй задаче (обратной), соответственно величина $\boldsymbol{PL(l,t)}$ заменяется на $\boldsymbol{DXL(l,t)}$.

Рассмотрим прямую задачу, когда в качестве выходного показателя рассматривается величина $\boldsymbol{DXL(l,t)}$. При расчете этой величины, как указывалось выше, могут использоваться два алгоритма, в которых отличается расчет величины $\boldsymbol{DXL(l,t)}$. В первом алгоритме нет ограничений на расход материалов и комплектующих, поскольку, в случае недостатка денежных средств, необходимый приход обеспечивается за счет займов и кредитов. Во втором алгоритме есть ограничения на расход материалов и комплектующих, поскольку их количество определяется наличием денежных средств на предприятии. Рассмотрим сначала первый алгоритм.

В первом алгоритме выражение для вычисления показателя выпуска продукции записывается в виде:

$$\boldsymbol{DXL(l,t)=min\left\{\frac{ear(l)PL(l,t)}{ptearsum(l)},MXL(l,t)\right\}}. \qquad \boldsymbol{(5.14)}$$

В соответствии с данным алгоритмом выпуск продукции может изменяться при изменении количества занятых и при изменении расхода исходных материалов и комплектующих. Сначала рассмотрим вариант, когда неопределенными считаются только величины $\boldsymbol{PL(l,t)}$ и $\boldsymbol{MXL(l,t)}$. Эти величины трактуются как случайные с заданными функциями распределений. Зависимости этих величин как функции времени (двух соседних точек) можно записать в виде неслучайного слагаемого и случайного приращения:

$$\boldsymbol{PL(l,t)=\overline{PL}(l,t-1)+\Delta PL(l,t)};$$

$$\boldsymbol{MXL(l,t)=\overline{MXL}(l,t-1)+\Delta MXL(l,t)},$$

где

$\boldsymbol{\overline{PL(l,t-1)}}$ – среднее значение количества занятых на производстве продукции $\boldsymbol{l}$-го типа на отрезке времени перед точкой $\boldsymbol{t}$;

$\boldsymbol{\Delta PL(l,t)}$ – случайное изменение количества занятых на производстве продукции $\boldsymbol{l}$-го типа на отрезке времени после точки $\boldsymbol{t}$;

$\boldsymbol{\overline{MXL}(l,t-1)}$ – среднее значение мощности по производству продукции $\boldsymbol{l}$-го типа на отрезке времени перед точкой $\boldsymbol{t}$;

$\boldsymbol{\Delta MXL(l,t)}$ – случайное изменение мощности по производству продукции $\boldsymbol{l}$-го типа на отрезке времени после точки $\boldsymbol{t}$.

Подставляя эти выражения в формулу для вычисления выпуска продукции $\boldsymbol{DXL(l,t)}$ и после преобразований получаем рекуррентное выражение процесса Маркова для этой величины:

$$\boldsymbol{DXL(l,t)=min\{DXL(l,t-1)\}+}$$
$$\boldsymbol{+min\left\{\frac{ear(l)\Delta PL(l,t)}{ptearsum(l)},\Delta MXL(l,t)\right\}}.$$

Первое слагаемое в этой сумме представляет собой неслучайную величину, а второе случайную. Поэтому для определения переходной функции процесса Маркова случайной величины $\boldsymbol{DXL(l,t)}$ требуется только вычислить переходную функцию второго слагаемого. В [65] доказано, что переходная функция процесса Маркова для рекуррентной величины $\boldsymbol{DXL(l,t)}$ за один шаг по времени это функция распределения этой величины. Конечной целью построения стохастической модели является определение числовых характеристик выходных показателей, в частности, случайной величины $\boldsymbol{DXL(l,t)}$. Обычно такими характеристиками являются математическое ожидание и дисперсия, для расчета которых используется не функция распределения, а плотность этой функции, т.е. продифференцированная функция распределения. Поскольку выражения случайных величин, $\boldsymbol{\Delta PL(l,t)}$, $\boldsymbol{\Delta MXL(l,t)}$ и $\boldsymbol{DXL(l,t)}$ одинаковы для любого индекса $\boldsymbol{l}$ и шага по времени $\boldsymbol{t}$, то для удобства записи их опустим и обозначим эти случайные величины так:

$$\boldsymbol{z=\frac{ear(l)\Delta PL(l,t)}{ptearsum(l)};\ y=\Delta MXL(l,t)};$$

$$\boldsymbol{\varphi=DXL(l,t)=min(z,y)}.$$

Полагая случайные величины $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y}$ независимыми (никаких оснований считать обратное нет), плотность функции распределения случайной величины φ, обозначаемой через $\boldsymbol{f_\varphi}$, записывается в виде [80]:

$$\boldsymbol{f_\varphi=f_z[1-F_y]+f_y[1-F_z]}, \qquad \boldsymbol{(5.15)}$$

где

f_z и f_y плотности распределения случайных величин z и y;

F_z и F_y функции распределения случайных величин z и y.

Как уже указывалось, рассматриваемые случайные величины не являются действительно случайными, которые можно определить из опытных данных. Эти величины представляют собой имитацию случайных величин посредством задания их функций распределения. При этом задаются функции распределения элементарных величин нижнего уровня, на основе которых в дальнейшем определяются функции распределения величин, являющиеся функциями элементарных. В четвертой части статьи в качестве функций распределения элементарных случайных величин рассматривалось равномерное и нормальное распределения. То и другое распределение имеет определенные преимущества и недостатки при имитации неопределенности параметров.

Равномерное распределение более подходит в тех случаях, когда нельзя ничего сказать о преимуществе тех или иных значений параметров. В то же время в некоторых случаях имитации неопределенности параметров целесообразнее исходить из преимущества близких к среднему значений и описывать распределения в виде нормальных. Поэтому целесообразно рассмотреть использование как равномерного, так и нормального распределений.

Элементарными случайными величинами в данном случае являются величины z и y. Эти случайные величины распределены на интервалах с границами (z_-, z_+) и (y_-, y_+). Тогда математическое ожидание случайной величины φ, обозначаемое через M_φ вычисляется по формуле:

$$M_\varphi = \int_{z_-}^{z_+} z f_z(z)[1-F_y(z)]dz + \int_{y_-}^{y_+} y f_y(y)[1-F_z(y)]dy .$$

Функции и плотности равномерного распределения F_z, F_y, f_z, f_y имеют вид:

$$F_z = \frac{z-z_-}{\Delta z}; \; F_y = \frac{y-y_-}{\Delta y}; \; f_z = \frac{1}{\Delta z}; \; f_y = \frac{1}{\Delta y},$$

где $\Delta z = z_+ - z_-$; $\Delta y = y_+ - y_-$.

После подстановки выражений для функций и плотностей распределения случайных величин z и y в формулу для математического ожидания и взятия интегралов получаем:

$$M_\varphi = \frac{\Delta z + \Delta y}{12} .$$

Дисперсия, обозначаемая через D_φ, вычисляется по формуле:

$$D_\varphi = \int_{z_-}^{z_+} (z-\bar{z})^2 f_z(z)[1-F_y(z)]dz + \int_{y_+}^{y_+} (y-\bar{y})^2 f_y(y)[1-F_z(y)]dy .$$

После подстановки выражений для функций и плотностей распределения случайных величин z и y в формулу для дисперсии и взятия интегралов получаем:

$$D_\varphi = \frac{\Delta z^2 + \Delta y^2}{12} .$$

При использовании нормального распределения для неопределенных величин, заданных на конечном отрезке, функция распределения усечена за границами этого отрезка. Плотности и функции нормального распределения случайных величин z и y записываются в виде:

$$f_z = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}};$$

$$f_y = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-M_y)^2}{2\sigma_y^2}};$$

$$F_z = \Phi\left(\frac{z-M_z}{\sigma_z}\right), \; F_y = \Phi\left(\frac{y-M_y}{\sigma_y}\right),$$

где M_z, M_y, σ_z, σ_y – математические ожидания и средние квадратические отклонения (корни квадратные из дисперсий) случайных величин z и y;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt .$$

После подстановки выражений для функций и плотностей нормального распределения случайных величин z и y в формулу для математического ожидания получаем:

$$M_\varphi = M_z - \int_{z_-}^{z_+} z \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}} \Phi\left(\frac{z-M_z}{\sigma_z}\right) dz + M_y - \int_{y_-}^{y_+} y \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-M_y)^2}{2\sigma_y^2}} \Phi\left(\frac{y-M_y}{\sigma_y}\right) dy .$$

Интегралы в этой формуле не выражаются через элементарные функции. Чтобы избежать численного интегрирования, можно выполнить следующие операции над подинтегральным выражением, позволяющие, в конечном итоге, интегрировать через элементарные функции. Заменим функцию $\Phi(x)$ на близкую к ней логистическую функцию (см. часть 4 раздел 4.2), которая имеет для переменной z вид:

$$\Phi\left(\frac{z-M_z}{\sigma_z}\right) \cong \frac{e^{\frac{z-M_z}{\bar{\sigma} z}}}{e^{\frac{z-M_z}{\bar{\sigma} z}} + 1},$$

где $\bar{\sigma} z = 1{,}7\sigma_z$.

Приближенно логистическую функцию можно представить разложением в ряд Тейлора в точке $z=0$, ограничившись тремя членами. Проще всего это можно сделать воспользовавшись известным разложением числителя (разложение знаменателя отличается свободным членом, который больше чем у знаменателя на единицу) [81] и затем почленно поделив числитель на знаменатель. В итоге получаем приближенное выражение логистической функции в виде многочлена:

$$\frac{e^{\frac{z-M_z}{\sigma z}}}{e^{\frac{z-M_z}{\sigma z}}+1} \cong p_z+q_z z+r_z z^2,$$

где

$$p_z=\frac{e^{-\frac{M_z}{\sigma z}}}{e^{-\frac{M_z}{\sigma z}}+1}; \; q_z=\frac{1}{\sigma_z}p_z(1-p_z);$$

$$r_z=p_z(1-p_z)\left(1-\frac{p_z}{\frac{-2}{\sigma z}}\right).$$

Функцию плотности распределения также можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в точке $z=0$. Ограничиваясь тремя членами разложения получим:

$$\frac{1}{\sigma_{z_l}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}} \cong a_z(1+b_z z+c_z z^2),$$

где

$$a_z=\frac{e^{-\frac{M_z^2}{\sigma_z^2}}}{\sigma_z^2\sqrt{2\pi}}; \; b_z=\frac{1}{\sigma_z^2}; \; c_z=\frac{1}{2}b_z(b_z M_z^2-1).$$

После выполнения преобразований подинтегральное выражение принимает вид легко интегрируемой целой рациональной функции:

$$\int_{z_-}^{z_+} z\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}}\Phi\left(\frac{z-M_z}{\sigma_z}\right)dz \cong$$

$$\cong a_z\int_{z_-}^{z_+}[p_z z+(p_z b_z+q_z)z^2+(p_z c_z+b_z q_z+r_z)z^3+$$

$$+(c_z q_z+r_z b_z)z^4+r_z c_z z^5]dz.$$

Интегрирование проводим на отрезке между максимальным и минимальным значениям и этой переменной. После интегрирования по этому отрезку получаем:

$$a_z\int_{z_-}^{z_+}[p_z z+(p_z b_z+q_z)^2+(p_z c_z+b_z q_z+r_z)z^3+$$

$$+(c_z q_z+r_z b_z)z^4+r_z c_z z^5]dz=$$

$$=a_z\left\{\frac{p_z}{2}\Delta Z_2+\frac{(p_z b_z+q_z)}{3}\Delta Z_3+\frac{(p_z c_z+b_z q_z+r_z)}{4}\Delta Z_4\right\}+$$

$$+\frac{(c_z q_z+r_z b_z)}{5}\Delta Z_5+\frac{r_z c_z}{6}\Delta Z_6.$$

Аналогичное выражение имеет и второй интеграл (по переменной y) в формуле математического ожидания M_φ. Окончательно получаем:

$$M_\varphi=M_z-a_z\left\{\frac{p_z}{2}\Delta Z_2+\frac{(p_z b_z+q_z)}{3}\Delta Z_3+\right.$$

$$+\frac{(p_z c_z+b_z q_z+r_z)}{4}\Delta Z_4+\frac{(c_z q_z+r_z b_z)}{5}\Delta Z_5+$$

$$\left.+\frac{r_z c_z}{6}\Delta Z_6\right\}+M_y-a_y\left\{\frac{p_y}{2}\Delta Y_2+\frac{(p_y b_y+q_y)}{3}\Delta Y_3+\right.$$

$$+\frac{(p_y c_y+b_y q_y+r_y)}{4}\Delta Y_4+\frac{(c_y q_y+r_y b_y)}{5}\Delta Y_5+$$

$$+\frac{r_y c_y}{6}\Delta Y_6.$$

Выражение для дисперсии в рассматриваемом случае имеет вид:

$$D_\varphi=D_z-$$

$$-\int_{z_-}^{z_+}(z-M_z)^2\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-M_z)^2}{2\sigma_z^2}}\Phi\left(\frac{z-M_z}{\sigma_z}\right)dz+$$

$$+D_y-\int_{-\infty}^{\infty}(y-M_y)^2\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-M_y)^2}{2\sigma_y^2}}\Phi\left(\frac{y-M_y}{\sigma_y}\right)dy.$$

Выполняя аналогичные операции к подинтегральным выражениям окончательно получаем интеграл для переменной z:

$$a_z\int_{z_-}^{z_+}[p_z M_z^2+(q_z M_z^2-2p_z M_z)z+$$

$$+(p_z-2q_z M_z+q_z b_z M_z^2+r_z M_z^2)z^2+$$

$$+(q_z-2q_z b_z M_z+q_z c_z M_z^2-r_z b_z M_z^2)z^3+$$

$$+(q_z b_z-2c_z q_z M_z+r_z-2b_z r_z M_z+r_z c_z M_z^2)z^4+$$

$$+(q_z c_z+r_z b_z+r_z c_z M_z^2)z^5+r_z c_z z^6]dz=$$

$$=a_z\left[p_z M_z^2\Delta Z+\frac{q_z M_z^2-2p_z M_z}{2}\Delta Z_2+\right.$$

$$+\frac{p_z-2q_z M_z+q_z b_z M_z^2+r_z M_z^2}{3}\Delta Z_3+$$

$$+\frac{q_z+2b_z q_z M_z+q_z c_z M_z^2-2r_z M_z^2+r_z b_z M_z^2}{4}\Delta Z_4+$$

$$+\frac{q_z b_z-2c_z q_z M_z^2+r_z-2b_z r_z M_z^2+r_z c_z M_z^2}{5}\Delta Z_5+$$

$$\left.+\frac{q_z c_z+r_z b_z+r_z c_z M_z^2)}{6}\Delta Z_6+\frac{r_z c_z}{7}\Delta Z_7\right].$$

Поскольку для переменной y выражение интеграла аналогично, то окончательно можно записать следующее выражение для дисперсии:

$$D_{\varphi}=D_z-a_z\left[p_zM_z^2\Delta Z+\frac{q_zM_z^2-2p_zM_z}{2}\Delta Z_2+\right.$$
$$+\frac{p_z-2q_zM_z+q_zb_zM_z^2+r_zM_z^2}{3}\Delta Z_3+$$
$$+\frac{q_z+2b_zq_zM_z+q_zc_zM_z^2-2r_zM_z^2+r_zb_zM_z^2}{4}\Delta Z_4+$$
$$+\frac{q_zb_z-2c_zq_zM_z^2+r_z-2b_zr_zM_z^2+r_zc_zM_z^2}{5}\Delta Z_5+$$
$$\left.+\frac{q_zc_z+r_zb_z+r_zc_zM_z^2)}{6}\Delta Z_6+\frac{r_zc_z}{7}\Delta Z_7\right]+$$
$$+D_y-a_y\left[p_yM_y^2\Delta Z+\frac{q_yM_y^2-2p_yM_y}{2}\Delta Y_2+\right.$$
$$+\frac{p_y-2q_yM_y+q_yb_yM_y^2+r_yM_y^2}{3}\Delta Y_3+$$
$$+\frac{q_y+2b_yq_yM_y+q_yc_yM_y^2-2r_yM_y^2+r_yb_yM_y^2}{4}\Delta Y_4+$$
$$+\frac{q_yb_y-2c_yq_yM_y^2+r_y-2b_yr_yM_y^2+r_yc_yM_y^2}{5}\Delta Y_5+$$
$$\left.+\frac{q_yc_y+r_yb_y+r_yc_yM_y^2)}{6}\Delta Y_6+\frac{r_yc_y}{7}\Delta Y_7\right].$$

Рассмотрим теперь вариант, когда неопределенными, наряду с величинами $PL(l,t)$ и $MXL(l,t)$, считаются также величины $ear(l)$ и $ptearsum(l)$. В этом случае выражение (5.14) будет сложной случайной величиной – функцией случайных величин $ear(l,t)$, $PL(l,t)$, $ptearsum(l)$ и $MXL(l,t)$. Зависимости этих величин как и в предыдущем варианте запишем в виде неслучайного слагаемого и случайного приращения:

$$ear(l,t)=\overline{ear}(l,t-1)+\Delta ear(l,t);$$

$$PL(l,t)=\overline{PL}(l,t-1)+\Delta PL(l,t);$$

$$ptearsum(l)=\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l);$$

$$MXL(l,t)=\overline{MXL}(l,t-1)+\Delta MXL(l,t),$$

где

$\overline{ear}(l,t-1)$ – среднее значение заработной платы занятых на производстве продукции l-го типа на отрезке времени перед точкой t;

$\overline{\Delta ear}(l,t)$ – случайное изменение величины заработной платы занятых на производстве продукции l-го типа на отрезке времени после точки t;

$\overline{ptearsum}(l)$ – среднее значение доли цеховых расходов на заработную плату при производстве продукции l-го типа;

$\Delta ptearsum(l)$ – случайное изменение доли цеховых расходов на заработную плату при производстве продукции l-го типа.

Подставляя эти выражения в формулу для вычисления выпуска продукции, после преобразований получаем:

$$DXL(l,t)=min*$$
$$*\left\{\frac{\overline{ear}(l,t-1)\overline{PL}(l,t-1)}{\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l)},\overline{MXL}(l,t-1)\right\}+$$
$$+min\left\{\frac{\Delta ear(l,t)\overline{PL}(l,t-1)+\Delta PL(l,t)\overline{ear}(l,t-1)}{\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta ear(l,t)\Delta PL(l,t)}{\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l)},\Delta MXL(l,t)\right\}. \quad (5.16)$$

Первое слагаемое в этом выражении, как и второе, представляет собой случайную величину. Однако в первом слагаемом случайной является только элементарная случайная величина $\Delta ptearsum(l)$. Примем в этом выражении следующие упрощающие предположения. Положим, что случайные величины $\Delta ptearsum(l)$ малы по сравнению с их средними значениями и пренебрежем этой величиной в первом слагаемом, поскольку она не сильно влияет на его значение.

Тогда только второе слагаемое будет случайной величиной. При этом надо учесть, что для случайной величины $\Delta ptearsum(l)$ должно выполняться условие:

$$\sum_{l=1}^{PR} ptearsum(l)=$$
$$=\sum_{l=1}^{PR}[\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l)]=1. \quad (5.17)$$

В силу этого случайные величины $\Delta ptearsum(l)$ зависимы и могут быть коррелированы (а в случае использования нормального распределения обязательно будут коррелированы). Поэтому и случайные величины с индексом l, которые представляют собой значения этого слагаемого как функции элементарных величин в совокупности также могут быть коррелированы.

Для средних значений величин $\overline{ptearsum}(l)$ существует условие:

$$\sum_{l=1}^{PR}\overline{ptearsum}(l)=1.$$

Тогда из выражения (5.17) следует:

$$\sum_{l=1}^{PR}\Delta ptearsum(l)=0. \quad (5.18)$$

Поэтому во втором слагаемом выражения (5.16) величина $\Delta ptearsum(l)$ с определенным значением индекса k является функцией от величин $\Delta ptearsum(l)$ с индексами, $l\neq k$, что можно выразить в виде:

$$\Delta ptearsum(k)=-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR-1}\Delta ptearsum(l).$$

Все случайные величины $\Delta ptearsum(l)$ в совокупности по индексу l зависимы, тогда как случайные величины $\Delta ptearsum(l)$, $l=\overline{1,PR-1},\ l\neq k$ уже независимы. Тогда во втором слагаемом (5.16) заменим $\Delta ptearsum(k)$ на $-\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR}\Delta ptearsum(l)$. Второе слагаемое выражения (5.16) при определенном значении $l=k$ является сложной функцией случайных величин $\Delta ear(k)$, $\Delta PL(k,t)$, $\Delta MXL(k,t)$ и $\Delta ptearsum(l)$, $l=\overline{1,PR-1}$, $l\neq k$, которую обозначим через φ:

$$\varphi=\min\left\{\frac{\Delta ear(k,t)\overline{PL}(k,t-1)+\Delta PL(k,t)\overline{ear}(k,t-1)t)}{\overline{ptearsum}(k)-\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR-1}ptearsum(l)}+\frac{\Delta ear(k)\Delta PL(k,t)}{\overline{ptearsum}(k)-\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR-1}ptearsum(l)},\Delta MXL(k,t)\right\}.$$

Для упрощения записи примем во внимание, что для каждого шага по времени t это выражение неизменно, поэтому индекс t опустим, а также для простоты записи опустим фиксированный индекс k и обозначим:

$$r=\Delta ear(k,t);\ p=\Delta PL(k,t);\ \bar{r}=\overline{ear}(k,t-1);$$
$$\bar{p}=\overline{PL}(k,t-1);\ y=\Delta MXL(k,t);\ q_l=\Delta ptearsum(l),$$
$$l=\overline{1,PR-1},\ l\neq k,\ \overline{q_k}=\overline{ptearsum}(k).$$

Тогда предыдущее выражение будет выглядеть так:

$$\varphi=\min\left\{\frac{r\bar{p}+p\bar{r}+rp}{\bar{q}_k-\sum\limits_{l=1}^{PR-1}q_l},y\right\},$$

где

φ – сложная случайная величина, являющаяся функцией элементарных случайных величин r, p, y и q_l.

Для вычисления математического ожидания и дисперсии этой случайной величины надо определить плотность ее распределения как функции входящих в ее состав элементарных случайных величин. Чтобы найти плотность распределения целесообразно найти сначала функцию ее распределения, которую обозначим через F_φ. Эта функция имеет вид [63]:

$$F_\varphi=\iiint\limits_{(G_\varphi)}\int\ldots\int f(r,p,y,q_1\ldots q_{PR-1})*$$
$$*dedpdydq_1\ldots dq_{PR-1},$$

где

$f(r,p,y,q_1\ldots q_{PR-1})$ – функция плотности совместного распределения случайных величин r, p, y, $q_1\ldots q_{PR-1}$.

G_φ – область интегрирования как функция случайной величины φ.

Зависимость функции F_φ от аргумента φ появляется в результате интегрирования по области G_φ. Эта область представляет собой множество, которое образуется как проекция сечения множества, заданного функцией φ гиперплоскостью $(r,p,y,q_1\ldots q_{PR-1})$ перпендикулярной оси φ и на расстоянии φ от начала координат.

Чтобы определить конкретно область интегрирования представим функцию φ в виде суперпозиции составляющих ее функций, в результате чего интегрирование многомерного интеграла можно свести к взятию интегралов меньших порядков. Обозначим $u=r\bar{p}+\bar{r}p+rp$, $v=-\sum\limits_{l=1}^{PR-1}q_l$ и $z=\frac{u}{v}$. Тогда функцию φ и ее функцию распределения перепишем в виде:

$$\varphi=\min(z,y);\ F_\varphi=\iint\limits_{(G_{zy})}f_{zy}(z,y)dzdy, \qquad (5.19)$$

где

$f_{zy}(z,y)$ – функция плотности совместного распределения случайных величин z и y;

G_{zy} – область интегрирования, представляющая собой область на плоскости определяемой координатами z,y справа и выше прямых $z=\varphi$ и $y=\varphi$, являющуюся функцией случайной величины φ [80].

Случайные величины z и y в нашем случае независимы, поэтому для определения плотности распределения случайной величины φ как функции случайных величин z и y можно использовать формулу, аналогичную формуле (5.15), использованной в предыдущем случае, когда случайные величины z и y были элементарными. В данном случае случайная величина z является функцией случайных величин r, p и γ, а случайная величина γ, в свою очередь, зависит от случайных величин $q_1\ldots q_{PR-1}$, но функция плотности распределения случайной величины φ имеет аналогичный предыдущему случаю вид:

$$f_\varphi=f_z(z)[1-F_y(z)]+f_y(y)[1-F_z(y)].$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины φ, обозначаемые через M_φ и D_φ вычисляются по формулам:

$$M_\varphi=\int\limits_{G_z}z\{f_z(z)[1-F_y(z)]\}dz+$$
$$+\int\limits_{G_y}f_y(y)[1-F_z(y)]\}dy;$$

$$D_\varphi=\int\limits_{G_z}z^2\{f_z(z)[1-F_y(z)]dz-M_z^2+$$
$$+\int\limits_{G_y}f_y(y)[1-F_z(y)]\}dy-M_y^2,$$

где G_z, G_y – области интегрирования по z и y.

Для того, чтобы найти M_φ и D_φ, надо сначала найти плотность распределения случайной величины z как функции входящих в ее состав элементарных случайных величин r, p и $q_1...q_{PR-1}$. Но для этого в соответствии с принципом суперпозиции надо сначала определить распределение случайной величины z как частного от деления случайных величин u и v, а затем распределение случайных величин u и v как функций элементарных случайных величин r, p и $q_1...q_{PR-1}$.

Обозначим плотность функции распределения случайной величины z через $f_z(z)$. Полагая что случайные величины u и v независимы (никаких оснований считать их зависимыми нет) и учитывая, что областью их определения является положительный квадрант системы координат u и v, функцию $f_z(z)$ можно в общем случае записать в виде [80]:

$$f_z(z)=\int_0^\infty v f_v(v) f_u(zv)dv, \qquad (5.20)$$

где $f_u(zv)$ – плотность распределения случайной величины u как функции произведения случайных величин z и v;

f_v – плотность распределения случайной величины v.

Далее найдем плотность распределения случайной величины w как произведения случайных величин r и p. Учитывая, что областью определения случайных величин r и p является прямоугольник в положительном квадранте со сторонами $\Delta r=r_+-r_-$ и $\Delta p=p_+-p_-$, и случайные величины r и p независимы, плотность функции распределения случайной величины w, обозначаемую через $f_w(w)$ можно записать в виде [63]:

$$f_w(w)=\int_{G_w}\frac{1}{r}f_r(r)f_p\left(\frac{w}{r}\right)dr, \qquad (5.21)$$

где $f_r(r)$ – плотность функции распределения случайной величины r;

$f_p(p)$ – плотность функции распределения величины p;

G_w – область интегрирования как функция случайной величины w.

Теперь найдем плотность распределения случайной величины u, как суммы случайных величин w, $r\bar{p}$ и $p\bar{r}$, обозначаемую как $f_u(u)$. Плотность распределения суммы случайных величин удобнее находить в два этапа: сначала найти функцию распределения, а затем посредством дифференцирования и саму плотность распределения. Функция распределения этих случайных величин, обозначаемая как $F_u(u)$, вычисляется по формуле:

$$F_u(u)=\overline{r}\,\overline{p}\iiint_{G_u} f(w,r\bar{p},p\bar{r})dwdrdp,$$

где G_u – область интегрирования как функция случайной величины u;

$f(w,r\bar{p},p\bar{r})$ – функция совместного распределения случайных величин w, $r\bar{p}$ и $p\bar{r}$.

Область интегрирования G_u представляет собой часть прямоугольника со сторонами в виде отрезков изменения случайных переменных u, $r\bar{p}$ и $p\bar{r}$, отсекаемую плоскостью $u=w+r\bar{p}+p\bar{r}$ и находящуюся ближе к началу координат.

Наконец остается найти $f_v(v)$ – плотность распределения случайной величины v как функции суммы элементарных случайных величин $q_1...q_{PR-1}$. Случайная величина v представляет собой суперпозицию случайных величин $q_1...q_{PR-1}$. Величина PR это количество видов продукции, выпускаемой на предприятии. Будем рассматривать предприятия, которые выпускают не менее 5-7 видов продукции. В этом случае независимо от видов распределения случайных величин $q_1...q_{PR-1}$ случайная величина v будет иметь распределение близкое к нормальному. Математические ожидания величин $q_1...q_{PR-1}$ в силу соотношения (5.18) равны нулю.

Учитывая сказанное, функцию распределения $f_v(v)$ запишем в виде нормального закона:

$$f_v(v)=\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}},$$

где $\sigma_v^2=\sum_{l=1}^{PR-1}\sigma_{q_l}^2$.

После того, как определены формулы для вычисления всех плотностей распределения случайной величины φ в соответствии с принципом суперпозиции, можно рассчитать ее числовые характеристики, такие как математическое ожидание и дисперсия. Для этого надо сначала задать вид функций распределения входящих в состав случайной величины φ элементарных случайных величин. Рассмотрим сначала случай, когда элементарные случайные величины распределены по закону равномерной (постоянной) плотности на заданных отрезках с плотностями:

$$f_r=\frac{1}{\Delta r};\; f_p=\frac{1}{\Delta p};\; f_y=\frac{1}{\Delta y}.$$

Процесс вычисления $f_\varphi(\varphi)$ будем выполнять в обратном порядке выполненного выше разложения сложной функции на элементарные функции на основе представления сложной функции в виде суперпозиции элементарных функций. Сначала найдем функцию – плотность распределения случайной величины w как функцию произведения случайных величин r и p по формуле (5.21). Интегрирование по формуле (5.21) выполняется на отрезке (r_-,r_+). Верхний предел как функция случайной величины w находим из соотношения $w=r_+p_+$. Отсюда $r_+=\frac{u}{p_+}$ и интеграл (5.21) запишется в виде:

$$f_w(w)=\int_{r-}^{\frac{w}{p+}}\frac{1}{r}f_r(r)f_p\left(\frac{w}{r}\right)dr.$$

После интегрирования получаем:

$$f_W(w)=\frac{1}{\Delta r\Delta p}[\ln w-\ln r_-p_+] .$$

Вычисление плотности функции распределения $f_U(u)$ можно упростить, если выполнить это в два этапа: сначала вычислить плотность суммы двух случайных величин $r\bar{p}$ и $p\bar{r}$ равномерной плотности обозначаемой через s, а затем плотность распределения случайной величины u, как суммы случайных величин s и w. Плотность s суммы случайных величин равномерной плотности также целесообразно искать в два этапа: сначала найти функцию распределения, а затем плотность получить дифференцированием функции распределения [63].

Функция распределения суммы двух случайных величин $r\bar{p}$ и $p\bar{r}$ постоянной плотности, обозначаемая через $F_S(s)$, равна:

$$F_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\Delta r\Delta p}\int_{G_S} drdp ,$$

где G_s – часть прямоугольника со сторонами $\Delta r\bar{p}$ и $\Delta p\bar{r}$, лежащая левее и ниже прямой $s=r\bar{p}+p\bar{r}$. Из геометрических соображений получаем выражение для этой площади прямоугольника как функции s:

1) при $s<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}$

$$F_S(s)=0 ;$$

2) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}<s<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}$

$$F_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}(s-r_-\bar{p}-p_-\bar{r})^2}{2\Delta r\Delta p} ;$$

3) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}<s<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}$

$$F_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\Delta r\Delta p}\left[\frac{(\Delta r\bar{p})^2}{2}+\Delta r\bar{p}(s-r_-\bar{p}-2\Delta r\bar{p})\right];$$

4) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}<s<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}$

$$F_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\Delta r\Delta p}*$$

$$*\left[\frac{(\Delta r\bar{p})^2}{2}+\Delta r\bar{p}(\Delta p\bar{r}-\Delta r\bar{p})+\frac{(s-r_-\bar{p}-\Delta r\bar{p}-\Delta p\bar{r})^2}{2}\right];$$

5) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}<s$

$$F_S(s)=0 .$$

Дифференцируя функцию распределения по s, получаем плотность распределения $f_S(s)$:

1) при $s<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}$

$$f_S(s)=0 ;$$

2) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}<s<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}$

$$f_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\Delta r\Delta p}(s-r_-\bar{p}-p_-\bar{r}) ;$$

3) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}<s<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}$

$$f_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}^2}{\Delta p} ;$$

4) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}<s<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}$

$$f_S(s)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\Delta r\Delta p}(s-r_-\bar{p}-\Delta r\bar{p}-\Delta p\bar{r}) ;$$

5) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}<s$

$$f_S(s)=0 .$$

Теперь можно вычислить плотность распределения случайной величины u как суммы случайных величин s и w по формуле:

$$f_U(u)=\int_{w_-}^{w_+} f_S(u-w)f_W(w)dw ,$$

где $w_-=r_-p_-$; $u_+=r_+p_+$.

Учитывая, что функция $f_S(u-w)$ задана на различных участках различными уравнениями, а функция $f_W(w)$ одним уравнением, запишем выражения функции $f_U(u)$ в следующем виде:

1) при $w<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-\bar{p}$

$$f_U(u)=0 ;$$

2) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-<w<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_-$

$$f_U(u)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{(\Delta r\Delta p)^2}*$$

$$*\int_{w_-}^{w_+}(u-w-r_-\bar{p}-p_-\bar{r})(\ln w-\ln r_-p_+)dw ;$$

3) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_- <w<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+$

$$f_U(u)=\frac{\bar{r}\bar{p}^2}{\Delta r(\Delta p)^2}\int_{w_-}^{w_+}(\ln w-\ln r_-p_+)dw ;$$

4) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+<w<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+$

$$f_U(u)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{(\Delta r\Delta p)^2}*$$

$$*\int_{w_-}^{w_+}(u-w-r_-\bar{p}-\Delta r\bar{p}-\Delta p\bar{r})(\ln w-\ln r_-p_+)dw ;$$

5) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+ <w$

$$f_U(u)=0 .$$

После интегрирования получаем:

1) при $w<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-$

$$f_U(u)=0 ;$$

2) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-<w<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_-$

$$f_U(u)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{(\Delta r\Delta p)^2}[A(u-c)+D];$$

3) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_- <w<r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+$

$$f_u(u)=A\frac{\bar{r}\bar{p}^2}{\Delta r(\Delta p)^2};$$

4) при $r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+<w<r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+$

$$f_u(u)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{(\Delta r\Delta p)^2}\left[A(u-f)+D\right];$$

5) при $r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+<w$

$$f_u(u)=0,$$

где

$$A=\Delta a-\Delta w(1-\ln d);\ D=\bar{w}\Delta w\left(\ln d+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta b}{2};$$

$$\Delta a=w_+\ln w_+-w_-\ln w_-;\ \Delta b=w_+^2\ln w_+-w_-^2\ln w_-;$$

$$\Delta w=w_+-w_-;\ \bar{w}=\frac{w_++w_-}{2};\ d=r_-p_+;$$

$$c=r_-\bar{p}-p_-\bar{r};\ f=r_-\bar{p}-\Delta r\bar{p}-\Delta p\bar{r}.$$

Плотность функции распределения $f_z(z)$ случайной величины z также как и плотность распределения $f_u(u)$ будет представлена на трех участках переменной z. Интеграл, представляющий собой функцию $f_z(z)$ не берется в элементарных функциях, поскольку в него входит функция $f_v(v)$, являющаяся нормальным распределением. Для взятия этого интеграла, который в элементарных функциях не берется, разложим плотность распределения $f_v(v)$ в степенной ряд в точке $v=0$, ограничиваясь двумя членами получим:

$$f_v(v)\cong\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right).$$

Теперь для получения $f_z(z)$ остается подставить функции $f_v(v)$ и $f_u(zv)$ в формулу (5.20). Границы интервала неопределенности для случайной величины v можно принять в виде отрезка как пересечение двух отрезков, один из которых ограничен (знаками – и +) тремя значениями квадратного корня из дисперсии, внутри которых практически полностью укладывается нормальное распределение, а другой – отрезок ограничен (знаками – и +) значениями $\frac{v}{\sqrt{2}\sigma_v}$. Обозначим минимальное и максимальное значения этого отрезка через v_- и v_+.

Подставив функции $f_v(v)$ и $f_u(zv)$ в формулу (5.20) получаем и проинтегрировав на отрезке (v_-,v_+) получим:

1) при $z<\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-}{v_+}$

$$f_z(z)=0;$$

2) при $\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-}{v_+}<z<\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_-}{v_-}$

$$f_z(z)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2}*$$

$$*\int_{v_-}^{v_+}v\left(1-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\left[A(zv-c)+D\right]dv;$$

3) при $\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_-}{v_-}<z<\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+}{v_+}$

$$f_z(z)=\frac{\bar{r}\bar{p}^2}{\sigma_v\sqrt{2\pi}\Delta r(\Delta p)^2}\int_{v^-}^{v^+}Av\left(1-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)dv;$$

4) при $\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+}{v_+}<z<\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+}{v_-}$

$$f_z(z)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2}*$$

$$*\int_{v^-}^{v^+}v\left(1-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\left[A(zv-f)+D\right]dv;$$

5) при $\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+}{v_-}<z$

$$f_z(z)=0.$$

Выполнив интегрирование получаем:

1) при $z<\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-}{v_+}$

$$f_z(z)=0;$$

2) при $\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+r_-p_-}{v_+}<z<\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_-p_-}{v_-}$

$$f_z(z)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2}*$$

$$*\left[Az\left(\frac{\Delta V_3}{3}-\frac{\Delta V_5}{10\sigma_v^2}\right)-(Ac-D)\left(\frac{\Delta V_2}{2}-\frac{\Delta V_4}{8\sigma_v^2}\right)\right];$$

3) при $\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+r_+p_-}{v_-}<z<\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+}{v_+}$

$$f_z(z)=\frac{A\bar{r}\bar{p}^2}{\sigma_v\sqrt{2\pi}\Delta r(\Delta p)^2}\left(\frac{\Delta V_2}{2}-\frac{\Delta V_3}{6\sigma_v^2}\right);$$

4) при $\frac{r_-\bar{p}+\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_-p_+}{v_+}<z<\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+}{v_-}$

$$f_z(z)=\frac{\bar{r}\bar{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2}*$$

$$*\left[Az\left(\frac{\Delta V_3}{3}-\frac{\Delta V_5}{10\sigma_v^2}\right)-(Af-D)\left(\frac{\Delta V_2}{2}-\frac{\Delta V_4}{8\sigma_v^2}\right)\right];$$

5) при $\frac{r_-\bar{p}+2\Delta r\bar{p}+\Delta p\bar{r}+r_+p_+}{v_-}<z$

$$f_z(z)=0,$$

где: $\Delta V_i = v_+^i - v_-^i$, $i = \overline{2,5}$.

После того, как вычислена функция $f_z(z)$, можно перейти к вычислению математического ожидания и дисперсии случайной величины φ по приведенным выше формулам, но предварительно надо вычислить функции распределения случайных величин z и y, обозначаемые через $F_z(z)$ и $F_y(y)$. Поскольку в данном варианте элементарные случайные величины, входящие в функцию φ, распределены равномерно, то функция $F_y(y)$ известна (линейная функция) и записывается в виде:

$$F_y(y) = \frac{y - M_y}{\Delta y},$$

где $\Delta y = y_+ - y_-$; M_y – математическое ожидание случайной величины y.

Функция $F_z(z)$ вычисляется как интеграл от плотности распределения также на отдельных участках изменения переменной z. Выполнив интегрирование по формуле $F_z(z) = \int_0^z f_z(z)dz$ получаем:

1) при $z < \dfrac{r_-\bar{p} + \Delta r\bar{p} + r_-p_-}{v_+}$

$$F_z(z) = 0;$$

2) при $\dfrac{r_-\bar{p} + \Delta r\bar{p} + r_-p_-}{v_+} < z < \dfrac{r_-\bar{p} + 2\Delta r\bar{p} + r_-p_-}{v_-}$

$$F_z(z) = \frac{\overline{r}\,\overline{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2} *$$

$$* \left[z^2 A\left(\frac{\Delta V_3}{6} - \frac{\Delta V_5}{20\sigma_v^2}\right) - z(Ac - D)\left(\frac{\Delta V_2}{2} - \frac{\Delta V_4}{8\sigma_v^2}\right)\right];$$

3) при $\dfrac{r_-\bar{p} + 2\Delta r\bar{p} + r_+p_-}{v_-} < z < \dfrac{r_-\bar{p} + \Delta r\bar{p} + \Delta p\bar{r} + r_-p_+}{v_+}$

$$F_z(z) = z\frac{A\overline{r}\,\overline{p}^2}{\sigma_v\sqrt{2\pi}\Delta r(\Delta p)^2}\left(\frac{\Delta V_2}{2} - \frac{\Delta V_3}{6\sigma_v^2}\right);$$

4) при $\dfrac{r_-\bar{p} + \Delta r\bar{p} + \Delta p\bar{r} + r_-p_+}{v_+} < z < \dfrac{r_-\bar{p} + 2\Delta r\bar{p} + \Delta p\bar{r} + r_+p_+}{v_-}$

$$F_z(z) = \frac{\overline{r}\,\overline{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2} *$$

$$* \left[z^2 A\left(\frac{\Delta V_3}{6} - \frac{\Delta V_5}{10\sigma_v^2}\right) - z(Af - D)\left(\frac{\Delta V_2}{2} - \frac{\Delta V_4}{8\sigma_v^2}\right)\right];$$

5) при $\dfrac{r_-\bar{p} + 2\Delta r\bar{p} + \Delta p\bar{r} + r_+p_+}{v_-} < z$

$$F_z(z) = 0.$$

Для получения формулы математического ожидания случайной величины φ надо подставить выражения для $F_z(z)$ и $F_y(y)$ в формулу

$$M_\varphi = \int_{z_-}^{z_+} z f_z(z)[1 - F_y(z)]dz + \int_{y_-}^{y_+} y f_y(y)[1 - F_z(y)]dy$$

и выполнить интегрирование. Поскольку функции f_z и F_z представлены на трех участках, то и каждый из интегралов в формуле математического ожидания представляет сумму трех интегралов, всего шесть интегралов. Обозначим их через M_{φ_i}.

Тогда

$$M_\varphi = \sum_{i=1}^{6} M_{\varphi_i},$$

где

$$M_{\varphi_1} = G\left[B\frac{\Delta Z_4}{4} - (BE + C)\frac{\Delta Z_3}{3} + CE\frac{\Delta Z_2}{2}\right];$$

$$M_{\varphi_2} = Q\left(\frac{\Delta Z_3}{3} - E\frac{\Delta Z_2}{2}\right);$$

$$M_{\varphi_3} = G\left[B\frac{\Delta Z_4}{4} - (BE + H)\frac{\Delta Z_3}{3} + HE\frac{\Delta Z_2}{2}\right];$$

$$M_{\varphi_4} = GB\frac{\Delta Y_4}{4} - GC\frac{\Delta Y_3}{3} + \bar{y};\quad M_{\varphi_5} = \frac{Q\Delta Y_3}{3} + \bar{y};$$

$$M_{\varphi_6} = GB\frac{\Delta Y_4}{4} - GH\frac{\Delta Y_3}{3} + \bar{y},$$

где

$$B = A\left(\frac{\Delta V_3}{3} - \frac{\Delta V_5}{10\sigma_v^2}\right);$$

$$C = (Ac - D)\left(\frac{\Delta V_2}{2} - \frac{\Delta V_4}{8\sigma_v^2}\right);$$

$$H = (Af - D)\left(\frac{\Delta V_2}{2} - \frac{\Delta V_4}{8\sigma_v^2}\right);$$

$$E = M_y + \Delta y;\quad G = \frac{\overline{r}\,\overline{p}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}(\Delta r\Delta p)^2};$$

$$Q = \frac{A\overline{r}\,\overline{p}^2}{\Delta y\sigma_v\sqrt{2\pi}\Delta r(\Delta p)^2};$$

$$\Delta Z_i = z_+^i - z_-^i;\quad \Delta Y_i = y_+^i - y_-^i,\quad i = \overline{2,4}.$$

Дисперсия случайной величины φ вычисляется по формуле:

$$D_\varphi = \int_{z_-}^{z_+} z^2 f_z(z)[1 - F_y(z)]dz - M_z^2 +$$

$$+ \int_{y_-}^{y_+} y^2 f_y(y)[1 - F_z(y)]dy - M_y^2.$$

Каждый из интегралов в этой формуле, как и в формуле математического ожидания представляет сумму трех интегралов, а величины M_z^2 и M_y^2 это суммы:

$$M_z^2 = \sum_{i=1}^{3} M_{\varphi_i}^2 , \; M_y^2 = \sum_{i=4}^{6} M_{\varphi_i}^2 .$$

Тогда взяв интегралы, дисперсию случайной величины φ можно представить в виде:

$$D_\varphi = \sum_{i=1}^{6} D_{\varphi_i} ,$$

где

$$D_{\varphi_1} = G\left[B\frac{\Delta Z_5}{5} - (BE + C)\frac{\Delta Z_4}{4} + CE\frac{\Delta Z_3}{3} \right];$$

$$D_{\varphi_2} = Q\left(\frac{\Delta Z_4}{4} - E\frac{\Delta Z_3}{3} \right);$$

$$D_{\varphi_3} = G\left[B\frac{\Delta Z_5}{5} - (BE + H)\frac{\Delta Z_4}{4} + HE\frac{\Delta Z_3}{3} \right];$$

$$D_{\varphi_4} = GB\frac{\Delta Y_5}{5} - GC\frac{\Delta Y_4}{4} + y_+^2 + y_+y_- + y_-^2 ;$$

$$D_{\varphi_5} = \frac{Q\Delta Y_4}{4} + y_+^2 + y_+y_- + y_-^2 ;$$

$$D_{\varphi_6} = GB\frac{\Delta Y_5}{5} - GH\frac{\Delta Y_4}{4} + y_+^2 + y_+y_- + y_-^2 .$$

Выведем теперь выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины φ в случае нормального распределения элементарных случайных величин, входящих в ее состав. В этом случае плотности распределения для случайных величин r и p имеют вид:

$$f_r = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-M_r)^2}{2\sigma_r^2}} ;$$

$$f_p = \frac{1}{\sigma_p\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(p-M_p)^2}{2\sigma_p^2}} .$$

Подставляя эти выражения в функцию плотности распределения $f_w(w)$ получаем:

$$f_w(w) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_0^\infty \frac{1}{r}\, e^{-\frac{(r-M_r)^2 + (\frac{w}{r} - M_p)^2}{2\sigma_r^2\sigma_p^2}} dr .$$

Этот интеграл не берется в элементарных функциях. Кроме того, экспоненциальную функцию в подинтегральном выражении нельзя разложить в ряд Тейлора. Поэтому упростить подинтегральное выражение не представляется возможным. Однако функцию $f_w(w)$ можно получить другим способом, а именно с использованием аппарата характеристических функций.

Характеристическая функция для функции $f_w(w)$ (прямое преобразование Фурье), обозначаемая через $E_t(t)$, имеет вид:

$$E_t(t) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{itrp}\, e^{-\frac{(r-M_r)^2}{2\sigma_r^2}}\, e^{-\frac{(p-M_p)^2}{2\sigma_p^2}} drdp .$$

Искомая функция $f_w(w)$ вычисляется по формуле (обратное преобразование Фурье):

$$f_w(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-itw} E_t(t)\, dt .$$

Если функция распределения случайных величин r и p четная, как в нашем случае, то формулу для характеристической функции и искомой функции $f_w(w)$ можно записать в виде [81]:

$$E_t(t) = \int_0^\infty\int_0^\infty \cos(trp)\, e^{-\frac{(r-M_r)^2}{2\sigma_r^2}}\, e^{-\frac{(p-M_p)^2}{2\sigma_p^2}} drdp ;$$

$$f_w(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos(tw) E_t(t)\, dt .$$

Для упрощения вычислений в подинтегральном выражении величины $f_w(w)$ представим функцию $\cos(trp)$ в виде разложения в ряд Тейлора в точке $t=0$, оставив два члена разложения:

$$\cos(trp) \cong 1 - \frac{(trp)^2}{2} .$$

Плотности функций распределений случайных величин r и p представим также в виде разложения в ряд Тейлора в точках математических ожиданий, ограничившись 3-мя членами разложений:

$$e^{-\frac{(r-M_r)^2}{2\sigma_r^2}} \cong a_r(1 + b_r r + c_r r^2) ;$$

$$e^{-\frac{(p-M_p)^2}{2\sigma_p^2}} \cong a_p(1 + b_p p + c_p p^2) ,$$

где

$$a_r = \frac{e^{-\frac{M_r^2}{2\sigma_r^2}}}{\sigma_r^2\sqrt{2\pi}} ; \; b_r = \frac{1}{\sigma_r^2} ; \; c_r = \frac{1}{2} b_r (b_r M_r^2 - 1) ;$$

$$a_p = \frac{e^{-\frac{M_p^2}{2\sigma_p^2}}}{\sigma_p^2\sqrt{2\pi}} ; \; b_p = \frac{1}{\sigma_p^2} ; \; c_p = \frac{1}{2} b_p (b_p M_p^2 - 1) .$$

Учитывая приближенность подинтегрального выражения, интеграл характеристической функции $E_t(t)$ будет расходящимся. Чтобы избежать этого, интегрирование по переменным r и p будем выполнять на конечных отрезках, которые обозначим через (r_-, r_+) и (p_-, p_+). Эти отрезки определяются равными $3\sigma_r$ и $3\sigma_p$ или же частями этих отрезков, одна или обе точки которых определяются условием $\cos(trp)=0$, если эти точки попадают внутрь отрезков шириной $3\sigma_r$ и $3\sigma_p$. Основанием для такого приближения является то, что нормальное распределение практически полностью укладывается на этих отрезках. В нашем случае распределение не нормальное, а произведение нормального на косинус, свойство которого с точки зрения выбора интервала интегрирования не хуже нормального и надо лишь отбросить те участки, где $\cos(trp)<0$.

Учитывая что интегрирование ведется на конечных отрезках, получаем приближенное выражение для характеристической функции $E_t(t)$:

$$E_t(t) \cong \frac{1}{\sigma_r^2\sigma_p^2}\int_{r_-}^{r_+}\int_{p_-}^{p_+}\left[1-\frac{(trp)^2}{2}\right]*$$

$$*\left[a_r(1+b_r r+c_r r^2)\right]*\left[a_p(1+b_p p+c_p p^2)\right]drdp.$$

Выполнив интегрирование, получаем:

$$E_t(t)=A-Bt^2,$$

где

$$A=\frac{a_r a_p}{\sigma_r^2\sigma_p^2}\left(\Delta R\Delta P+\frac{b_r}{2}\Delta R_2\Delta P+\frac{c_r}{3}\Delta R_3\Delta P+\right.$$

$$+\frac{b_p}{2}\Delta R\Delta P_2+\frac{b_r b_p}{4}\Delta R_2\Delta P_2+\frac{c_r b_p}{6}\Delta R_3\Delta P_2+$$

$$\left.+\frac{c_p}{3}\Delta R\Delta P_3+\frac{b_r c_p}{6}\Delta R_2\Delta P_3+\frac{c_r c_p}{9}\Delta R_3\Delta P_3\right);$$

$$B=\frac{a_r a_p}{\sigma_r^2\sigma_p^2}\left(\frac{\Delta R_3\Delta P_3}{18}+\frac{b_r}{24}\Delta R_4\Delta P_3+\frac{c_r}{30}\Delta R_5\Delta P_3+\right.$$

$$+\frac{b_p}{24}\Delta R_3\Delta P_4+\frac{b_r b_p}{32}\Delta R_4\Delta P_4+\frac{c_r b_p}{40}\Delta R_5\Delta P_4+$$

$$\left.+\frac{c_p}{30}\Delta R_3\Delta P_5+\frac{b_r c_p}{40}\Delta R_4\Delta P_5+\frac{c_r c_p}{50}\Delta R_5\Delta P_5\right);$$

$$\Delta R_i=r_+^i-r_-^i;\ \Delta P_i=p_+^i-p_-^i,\ i=\overline{1,5}.$$

После того, как получена характеристическая функция, искомая функция $f_w(w)$ вычисляется по формуле обратного преобразования Фурье. Для упрощения интегрирования разложим функцию $\cos(tw)$ в точке 0 в ряд Тейлора, оставив два члена:

$$\cos(tw)\cong 1-\frac{(tw)^2}{2}.$$

Учитывая что функция $\cos(tw)$ периодическая, и в разложении в ряд Тейлора оставлено два члена, то интегрирование будем проводить на отрезке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$:

$$f_w(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{(tw)^2}{2}\right](A-Bt^2)\,dt.$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$f_w(w)=C+Dw^2,$$

где $C=\frac{A}{2}-\frac{B\pi^3}{12}$; $D=\frac{B\pi^4}{320}-\frac{A\pi 2}{48}$.

После определения функции распределения величины $w=rp$ переходим к определению функции распределения величины $s=r\bar{p}+p\bar{r}$. Для нормально распределенных случайных величин $r\bar{p}$ и $p\bar{r}$ плотность распределения их суммы также является нормальной функцией с параметрами $M_s=M_r+M_p$, $\sigma_s^2=\sigma_r^2+\sigma_p^2$.

Для того, чтобы далее можно было с помощью интегрирования получить плотность функции распределения величины $u=s+w$, разложим плотность распределения величины $s=r\bar{p}+p\bar{r}$ в ряд Тейлора в точке $s=0$ и оставив 3 члена разложения получим:

$$\frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(s-M_s)^2}{2\sigma_s^2}}\cong a_s(1+b_s s+c_s s^2),$$

где $a_s=\frac{e^{-\frac{M_s^2}{2\sigma_s^2}}}{\sigma_s^2\sqrt{2\pi}}$; $b_s=\frac{1}{\sigma_s^2}$; $c_s=\frac{1}{2}b_s(b_s M_s^2-1)$.

Плотность функции распределения величины $u=s+w$ записывается в виде:

$$f_u(u)=\int_{w_-}^{w_+}f_s(u-w)f_w(w)dw.$$

Подставив выражения для функций $f_s(u-v)$ и $f_w(w)$ проинтегрировав получаем:

$$f_u(u)=\int_{w_-}^{w_+}a_s[1+b_s(u-w)+$$

$$+c_s(u-w)^2][C+Dw^2]dw=E+Fu+Gu^2,$$

где

$$E=a_s\left[C\Delta w+\frac{D-Cb_s}{3}\Delta w_3+\right.$$

$$\left.+\frac{Cc_s-Db_s}{4}\Delta w_4+\frac{Dc_s}{5}\Delta w_5\right];$$

$$F=a_s\left[Cb_s\Delta w+\frac{Db_s-2Cc_s+Dc_s}{3}\Delta w_3-\frac{Dc_s}{4}\Delta w_4\right];$$

$$G=a_s Cc_s\Delta w;\ \Delta w=w_+-w_-;\ \Delta w_i=w_+^i-w_-^i,\ i=\overline{2,5}.$$

Теперь можно получить плотность распределения величины $z=\frac{u}{v}$ взяв интеграл

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} v f_v(v) f_u(zv)dv\ .$$

Плотность функции распределения величины $v=-\sum_{l=1}^{PR-1} q_l$ в случае нормально распределенных элементарных случайных величин q_l у которых математические ожидания равны нулю, также будет нормальной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной сумме дисперсий элементарных случайных величин.

Чтобы можно было взять последний интеграл представим функцию $f_v(v)$ в виде разложения в ряд Тейлора в точке 0, оставив 2 члена разложения, как это уже делалось выше:

$$f_v(v)\cong\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right).$$

Такое приближение приводит к расходимости интеграла от бесконечных пределов. Чтобы это избежать будем проводить интегрирование на конечном интервале, который обозначим как (v_-,v_+). Этот интервал образуется как пересечение трех отрезков: один из которых равен $3\sigma_v$ с нулем в центре, другой определяется точками, являющимися корнями уравнения:

$$E+Fv+Gv^2=0\ ,$$

а третий отрезок ограничен (знаками – и +) значениями $\frac{v}{\sqrt{2}\sigma_v}$.

Основанием для такого приближения является то, что функция $f_v(v)$ нормальная, а функция в подинтегральном выражении является произведением нормальной функции на линейную функцию и параболу, свойство которой с точки зрения выбора интервала интегрирования не хуже нормального распределения и надо лишь найти отрезок, являющийся пересечением отрезка со значениями $3\sigma_v$, отрезка определяемого точками, являющимися решением вышеуказанного уравнения и отрезка, определяемого корнями параболы со значениями $\frac{v}{\sqrt{2}\sigma_v}$.

Подставив это разложение в интеграл $f_z(z)$ и взяв его, получим

$$f_z(z)=\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_{v_-}^{v_+} v\left(1-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)*(E+Fzv+Gz^2v^2)dv=P+Qz+Rz^2\ ,$$

где

$$P=\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\left[\frac{E}{2}\Delta v_2-\frac{E}{8\sigma_v^2}\Delta v_4\right];$$

$$Q=\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\left[\frac{F}{3}\Delta v_3-\frac{F}{10\sigma_v^2}\Delta v_5\right];$$

$$R=\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\left[\frac{G}{4}\Delta v_4-\frac{G}{12\sigma_v^2}\Delta v_6\right];$$

$$\Delta v_i=v_+^i-v_-^i,\ i=\overline{2,6}\ .$$

Кроме плотности распределения величины z нам нужна функция распределения, которую находим интегрированием плотности распределения:

$$F_z(z)=Pz+Q\frac{z^2}{2}+R\frac{z^3}{3}\ .$$

Зная распределения случайных величин z и y можно определить плотность распределения случайной величины $\varphi=min(z,y)$, а затем их математическое ожидание и дисперсию по приведенным выше формулам. Чтобы выполнить интегрирование в элементарных функциях, как и раньше нормальную плотность распределения случайной величины y разложим в ряд Тейлора в точке 0, оставив 3 члена:

$$f_y(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-M_y)}{2\sigma_y^2}}\cong a_y(1+b_y y+c_y y^2)\ ,$$

где

$$a_y=\frac{e^{-\frac{M_y^2}{\sigma_y^2}}}{\sigma_y^2\sqrt{2\pi}}\ ;\ b_y=\frac{1}{\sigma_y^2}\ ;\ c_y=\frac{1}{2}b_y(b_yM_y^2-1)\ .$$

Функцию распределения величины $\varphi=min(z,y)$ получаем интегрированием плотности распределения:

$$F_\varphi(\varphi)\cong a_\varphi(\varphi+\frac{b_y}{2}\varphi^2+\frac{c_y}{3}\varphi^3)\ .$$

Поскольку математическое ожидание и дисперсия состоят из двух слагаемых, после интегрирования получаем:

$$M_\varphi=M_z+M_y\ ;D_\varphi=D_z+D_y\ ,$$

где

$$M_z=a_y\left[P\frac{\Delta z_2}{2}+(Q-P)\frac{\Delta z_3}{3}+\right.$$

$$+\left(R-Q-\frac{Pb_y}{2}\right)\frac{\Delta z_4}{4}-\left(R+\frac{Qb_y}{2}+\frac{c_yP}{3}\right)\frac{\Delta z_5}{5}-$$

$$\left.-\left(\frac{Rb_y}{2}+\frac{c_yQ}{3}\right)\frac{\Delta z_6}{6}-c_yR\frac{\Delta z_7}{21}\right];$$

$$M_y=a_y\left[\frac{\Delta y_2}{2}+(b_y-P)\frac{\Delta z_3}{3}+\right.$$

$$+\left(c_y-Pb_y-\frac{Q}{2}\right)\frac{\Delta y_4}{4}-\left(Pc_y+\frac{Qb_y}{2}+\frac{R}{3}\right)\frac{\Delta y_5}{5}-$$

$$\left.-\left(\frac{Qc_y}{2}+\frac{Rb_y}{3}\right)\frac{\Delta y_6}{6}-c_yR\frac{\Delta y_7}{21}\right];$$

$$D_z = a_y \left[P\frac{\Delta z_3}{3} + (Q-P)\frac{\Delta z_4}{4} + \right.$$

$$+\left(R - Q - \frac{Pb_y}{2}\right)\frac{\Delta z_5}{5} - \left(R + \frac{Qb_y}{2} + \frac{c_y P}{3}\right)\frac{\Delta z_6}{6} -$$

$$\left. -\left(\frac{Rb_y}{2} + \frac{c_y Q}{3}\right)\frac{\Delta z_7}{7} - c_y R\frac{\Delta z_8}{24}\right];$$

$$D_y = a_y \left[\frac{\Delta y_3}{3} + (b_y - P)\frac{\Delta z_4}{4} + \right.$$

$$\left(c_y - Pb_y - \frac{Q}{2}\right)\frac{\Delta y_5}{5} - \left(Pc_y + \frac{Qb_y}{2} + \frac{R}{3}\right)\frac{\Delta y_6}{6} -$$

$$\left. -\left(\frac{Qc_y}{2} + \frac{Rb_y}{3}\right)\frac{\Delta y_7}{7} - c_y R\frac{\Delta y_8}{24}\right];$$

$$\Delta z_i = z_+^i - z_-^i,\ i = \overline{2,8};\ \Delta y_i = y_+^i - y_-^i,\ i = \overline{2,8}.$$

5.4. Модель расчета прибыльности и срока окупаемости производственного проекта в стохастической интерпретации (второй алгоритм)

Рассмотрим теперь второй алгоритм для вычисления показателя выпуска продукции. В этом алгоритме выражение для вычисления показателя выпуска продукции записывается в виде:

$$DXL(l,t) = \min\left\{\frac{ear(l)PL(l,t)}{ptearsum(l)}, MXL(l,t), \frac{DVL(l,t)}{ptmatsum(l)}\right\}.$$

Это выражение отличается от предыдущего включением в правой части третьего компонента, выражающего ограничение на расход материалов и комплектующих. В стохастической интерпретации выпуск продукции может изменяться наряду с изменением количества занятых и производственных мощностей, а также при изменении расхода исходных материалов и комплектующих.

Эта компонента включает переменные, которые будем также считать случайными в пределах заданных границ. Зависимость этих переменных как функцию времени (двух соседних точек) можно записать в виде неслучайного слагаемого и случайного приращения:

$$ptmatsum(l) = \overline{ptmatsum(l)} + \Delta ptmatsum(l);$$

$$DVL(l,t) = \overline{DVL}(l,t-1) + \Delta DVL(l,t),$$

где $\overline{DVL(l,t-1)}$ – среднее значение расхода материалов, расходуемых на производство продукции l-го типа на отрезке времени перед точкой t;

$\Delta DVL(l,t)$ – случайное изменение расхода материалов на производство продукции l-го типа на отрезке времени после точки t;

$\overline{ptmatsum(l)}$ – среднее значение доли материалов, расходуемых на производство продукции l-го типа;

$\Delta ptmatsum(l)$ – случайное изменение доли материалов, расходуемых на производство продукции l-го типа.

Как и в первом алгоритме первое слагаемое в этой сумме представляет собой неслучайную величину, а второе случайную. Поэтому для определения переходной функции процесса Маркова величины $DXL(l,t)$ требуется вычислить переходную функцию только второго слагаемого.

Подставляя выражения для случайных величин $DVL(t,l)$ и $ptmatsum(l)$, а также аналогичные выражения для других случайных величин в формулу для вычисления выпуска продукции $DXL(l,t)$, после преобразований и делая те же допущения для случайных величин, что и в первом алгоритме, получаем аналогичное рекуррентное выражение процесса Маркова для второго алгоритма:

$$DXL(l,t) = \overline{DXL}(l,t-1) + \varphi,$$

где $\varphi = \min\{z,y,x\}$, $x = \frac{d}{s}$; $d = \Delta DVL(l,t)$;

$s = \sum_{l=1}^{PR-1} s_l$; $s_l = \Delta ptmatsum(l)$.

Переменные z и y обозначают те же случайные величины, что и в первом алгоритме.

Положим, что случайные величины z, y и x независимы. Тогда плотность распределения случайной величины φ записывается в виде [80]:

$$f_\varphi = f_z(z)[1-F_y(z)][1-F_x(z)] +$$
$$+ f_y(y)[1-F_z(y)][1-F_x(y)] +$$
$$+ f_x(x)[1-F_z(x)][1-F_y(x)],$$

где f_z, f_y, f_x – плотности распределения случайных величин z, y и x;

F_z, F_y, F_x – функции распределения случайных величин z, y и x.

Функции и плотности случайных величин z и y были найдены в первом алгоритме. Во втором алгоритме остается только найти выражения для плотности и функции распределения случайной величины x. Рассмотрим случай равномерного распределения элементарных случайных величин, входящих в величину x. Принимая допущения, аналогичные для делителя случайной величины z, распределение делителя величины x также будет нормальным с нулевым математическим ожиданием. В этом случае плотность распределения величины x можно получить взяв интеграл

$$f_x(x) = \int_0^\infty s f_s(s) f_p(xs)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Delta p \sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty s e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}} ds = \frac{\sigma_s}{\Delta p \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_s^2}}.$$

Чтобы упростить интегрирование при выводе формул математического ожидания и дисперсии величины φ разложим функцию $f_x(x)$ в ряд Тейлора в точке $x=0$, оставив два члена разложения:

$$f_x(x) \cong \frac{\sigma_s}{\Delta p\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Проинтегрировав по x, получим необходимую для вычислений математического ожидания и дисперсии величины φ функцию распределения величины x:

$$F_x(x)\cong\frac{\sigma_s}{\Delta p\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{6\sigma_s^2}\right).$$

Формулы математического ожидания и дисперсии в данном варианте записываются в виде:

$$M_\varphi=M_z+M_y+M_x,$$

где $M_z=\int\limits_{z_-}^{z_+}zf_z(z)[1-F_y(z)][1-F_x(z)]dz$;

$$M_y=\int\limits_{y_-}^{y_+}yf_y(y)[1-F_z(y)][1-F_x(y)]dy;$$

$$M_x=\int\limits_{x_-}^{x_+}xf_x(x)[1-F_z(x)][1-F_y(x)]dx;$$

$$D_\varphi=D_z+D_y+D_x,$$

где $D_z=\int\limits_{z_-}^{z_+}z^2f_z(z)[1-F_y(z)][1-F_x(z)]dz-M_z^2$;

$$D_y=\int\limits_{y_-}^{y_+}yf_y(y)[1-F_z(y)][1-F_x(y)]dy-M_y^2;$$

$$D_x=\int\limits_{y_-}^{y_+}xf_x(x)[1-F_z(x)][1-F_x(x)]dx-M_x^2.$$

Подставляя выражения для плотностей и функций распределения величин z, y и x в формулы математического ожидания и дисперсии получаем:

$$M_z=\sum_{i=1}^{3}M_{z_i};\ M_y=\sum_{i=1}^{3}M_{y_i};\ M_x=\sum_{i=1}^{3}M_{x_i},$$

где

$$M_{z_1}=v[-3\sqrt{2\pi}EGC\Delta p\sigma_s\Delta z_2-(3\sqrt{2\pi}EGB\Delta p\sigma_s+$$
$$+2EGC\sigma_s^2+2-\sqrt{2\pi}GC\Delta p\sigma_s)\Delta z_3-$$
$$-\frac{3EGB\sigma_s^2+3\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+3GC\sigma_s^2}{2}\Delta z_4+$$
$$\left.+\frac{6GB\sigma_s^2+EGC}{5}\Delta z_5+\frac{EGB+GC}{6}\Delta z_6-\frac{GB}{7}\Delta z_7\right];$$

$$M_{z_2}=vQR*$$
$$*\left[3\sqrt{2\pi}E\Delta p\sigma_s\Delta z_2-2\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s+2E\sigma_s^2)\Delta z_3+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\sigma_s^2\Delta z_4+\frac{E}{5}\Delta z_5-\frac{1}{6}\Delta z_6\right];$$

$$M_{z_3}=v\left[-3\sqrt{2\pi}EGH\Delta p\sigma_s\Delta z_2-\right.$$
$$-(3\sqrt{2\pi}EGB\Delta p\sigma_s+2EGH\sigma_s^2+2\sqrt{2\pi}GH\Delta p\sigma_s)\Delta z_3-$$
$$-\frac{3EGB\sigma_s^2+3\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma+3GH\sigma_s^2}{2}\Delta z_4+$$
$$\left.+\frac{6GB\sigma_s^2-EGH}{5}\Delta z_5+\frac{EGB+GH}{6}\Delta z_6-\frac{GB}{7}\Delta z_7\right];$$

$$M_{y_1}=v*$$
$$*\left[3\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s\Delta y_2-(2\sqrt{2\pi}GC\Delta p\sigma_s-2\sigma_s^2)\Delta y_3-\right.$$
$$-\frac{3\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+6GC\sigma_s^2}{4}\Delta y_4+$$
$$\left.+\frac{2+6GB\sigma_s^2}{10}\Delta y_5+\frac{GC}{6}\Delta y_6-\frac{GB}{14}\Delta y_7\right];$$

$$M_{y_2}=v*$$
$$*\left[3\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s\Delta y_2-(2\sigma_s^2+2\sqrt{2\pi}QR\Delta p\sigma_s)\Delta y_3+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}QR\sigma_s^2\Delta y_4+\frac{\Delta y_5}{5}-\frac{QR}{6}\Delta y_6\right];$$

$$M_{y_3}=v*$$
$$*\left[3\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s\Delta y_2-(2\sqrt{2\pi}GH\Delta p\sigma_s-2\sigma_s^2)\Delta y_3-\right.$$
$$-\frac{3\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+6GH\sigma_s^2}{4}\Delta y_4+$$
$$\left.+\frac{2+6GB\sigma_s^2}{10}\Delta y_5+\frac{GH}{6}\Delta y_6-\frac{GB}{14}\Delta y_7\right];$$

$$M_{x_1}=w*$$
$$*\left[\frac{E}{2}\Delta x_2-\frac{EGC-1}{3}\Delta x_3-\left(\frac{E}{8\sigma_s^2}+\frac{EGB}{8}+\frac{GC}{4}\right)\Delta x_4+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{10\sigma_s^2}+\frac{GB}{10}+\frac{EGC}{10\sigma_s^2}\right)\Delta x_5+$$
$$\left.+\left(\frac{EGB}{24\sigma_s^2}+\frac{GC}{12\sigma_s^2}\right)\Delta x_6-\frac{GB}{28\sigma_s^2}\Delta x_7\right];$$

$$M_{x_2}=w*$$
$$*\left[\frac{E}{2}\Delta X_2-\frac{EQR+1}{3}\Delta x_3+\left(\frac{QR}{4}-\frac{E}{8\sigma_s^2}\right)\Delta x_4+\right.$$
$$\left.+\frac{EQR+1}{10\sigma_s^2}\Delta x_5-\frac{QR}{12\sigma_s^2}\Delta x_6\right];$$

$$M_{x_3}=w*$$
$$*\left[\frac{E}{2}\Delta X_2-\frac{EGH-1}{3}\Delta x_3-\left(\frac{E}{8\sigma_s^2}+\frac{EGB}{8}+\frac{GH}{4}\right)\Delta x_4+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{10\sigma_s^2}+\frac{GB}{10}+\frac{EGH}{10\sigma_s^2}\right)\Delta x_5+$$
$$\left.+\left(\frac{EGB}{24\sigma_s^2}+\frac{GH}{12\sigma_s^2}\right)\Delta x_6-\frac{GB}{28\sigma_s^2}\Delta x_7\right];$$

$$D_{z_1}=v\left[-\frac{3\sqrt{2\pi}EGC\Delta p\sigma_s}{2}\Delta z_3+\right.$$
$$+\frac{6\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+6GBE\sigma_s^2+6GC\sigma_s^2}{5}\Delta z_5+$$
$$\left.+\frac{6GB+EGC}{6}\Delta z_6+\frac{EGB+GC}{7}\Delta z_7-\frac{GB}{8}\Delta z_8\right];$$

$$D_{z_2}=vQR*$$
$$*\left[2\sqrt{2\pi}E\Delta p\sigma_s\Delta z_3-\frac{3\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s+3E\sigma_s^2}{2}\Delta z_4+\right.$$
$$\left.+\frac{6\sigma_s^2}{5}\Delta z_5+\frac{E}{6}\Delta z_5-\frac{1}{7}\Delta z_7\right];$$

$$D_{z_3}=v\left[-\frac{3\sqrt{2\pi}EGH\Delta p\sigma_s}{2}\Delta z_3+\right.$$
$$+\frac{3\sqrt{2\pi}EGB\Delta p\sigma_s-3\sqrt{2\pi}GB+3EGH}{2}\Delta z_4-$$
$$-\frac{6\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+6GBE\sigma_s^2+6GH\sigma_s^2}{5}\Delta z_5+$$
$$\left.+\frac{6GB+EGH}{6}\Delta z_6+\frac{EGB+GH}{7}\Delta z_7-\frac{GB}{8}\Delta z_8\right];$$

$$D_{y_1}=v*$$
$$*\left[2\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s\Delta y_3-\frac{3\sqrt{2\pi}GC\Delta p\sigma_s-3\sigma_s^2}{2}\Delta y_4-\right.$$
$$-\frac{6\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+6GC\sigma_s^2}{5}\Delta y_5+$$
$$\left.+\frac{1+6GB\sigma_s^2}{6}\Delta y_6+\frac{GC}{7}\Delta y_7-\frac{GB}{8}\Delta y_8\right];$$

$$D_{y_2}=v*$$
$$*\left[2\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s\Delta y_3-\frac{3\sigma_s^2+3\sqrt{2\pi}QR\Delta p\sigma_s}{2}\Delta y_4+\right.$$
$$\left.+\frac{6}{5}QR\sigma_s^2\Delta y_5+\frac{\Delta y_6}{6}-\frac{QR}{7}\Delta y_7\right];$$

$$D_{y_3}=v*$$
$$*\left[2\sqrt{2\pi}\Delta p\sigma_s\Delta y_3-\frac{3\sqrt{2\pi}GH\Delta p\sigma_s-3\sigma_s^2}{2}\Delta y_4-\right.$$
$$-\frac{6\sqrt{2\pi}GB\Delta p\sigma_s+6GH\sigma_s^2}{5}\Delta y_5+$$
$$\left.+\frac{1+6GB\sigma_s^2}{6}\Delta y_6+\frac{GH}{7}\Delta y_7-\frac{GB}{8}\Delta y_8\right];$$

$$D_{x_1}=w*$$
$$*\left[\frac{E}{3}\Delta X_3-\frac{EGC-1}{4}\Delta x_4-\left(\frac{E}{10\sigma_s^2}+\frac{EGB}{10}+\frac{GC}{5}\right)\Delta x_5+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{12\sigma_s^2}+\frac{GB}{30}+\frac{EGC}{12\sigma_s^2}\right)\Delta x_6+$$
$$\left.+\left(\frac{EGB}{28\sigma_s^2}+\frac{GC}{14\sigma_s^2}\right)\Delta x_7-\frac{GB}{32\sigma_s^2}\Delta x_8\right];$$

$$D_{x_2}=w\left[\frac{E}{2}\Delta x_3-\frac{EQR+1}{4}\Delta x_4+\left(\frac{QR}{5}-\frac{E}{10\sigma_s^2}\right)\Delta x_5+\right.$$
$$\left.+\frac{EQR+1}{12\sigma_s^2}\Delta x_6-\frac{QR}{14\sigma_s^2}\Delta x_7\right],$$

где

$$v=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}\Delta y\Delta p\sigma_s};\ w=\frac{\sigma_s}{\sqrt{2\pi}\Delta y\Delta p};$$

$$\Delta z_i=z_+^i-z_-^i,\ i=\overline{2,8};\ \Delta y_i=y_+^i-y_-^i,\ i=\overline{2,8};$$

$$\Delta x_i=x_+^i-x_-^i,\ i=\overline{2,8}.$$

Рассмотрим теперь случай нормального распределения элементарных случайных величин, входящих в величину x. В этом случае плотность распределения величины x можно получить взяв интеграл

$$f_x(x)=\int_0^\infty sf_s(s)f_d(xs)ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_d\sigma_s}\int_0^\infty se^{-\left[\frac{s^2}{2\sigma_s^2}+\frac{(xs-M_d)^2}{2\sigma_d^2}\right]}ds,$$

где

σ_s^2 – среднеквадратическое отклонение случайной величины s;

σ_d^2 – среднеквадратическое отклонение случайной величины d;

M_d – математ. ожидание случайной величины d.

Для упрощения взятия этого интеграла разложим экспоненциальную функцию в ряд Тейлора в точке $s=0$, оставив 3 члена:

$$e^{-\left[\frac{s^2}{2\sigma_s^2}+\frac{(xs-M_d)^2}{2\sigma_d^2}\right]}\cong a(b+cxs+dx^2s^2),$$

где $a=e^{-\frac{M_d^2}{\sigma_p^2}}$; $b=-\frac{1}{2\sigma_s^2}$; $c=\frac{3M_d}{2\sigma_p^2}$; $d=-\frac{1}{2\sigma_p^2}$.

Интеграл будем брать на конечном отрезке переменной s, определяемом условием, что среднеквадратические отклонения наиболее вероятно содержатся в пределах отрезка неопределенности (s_+, s_-). После взятия интеграла получаем:

$$f_x(x) = \int_{s_-}^{s_+} sa(b + cxs + dx^2 s^2)ds = a(p + rx + qx^2),$$

где

$$p = \frac{b}{2}\Delta s_2;\; r = \frac{c}{3}\Delta s_3;\; q = \frac{d}{4}\Delta s_4;\; \Delta s_i = s_+^i - s_-^i,\; i = \overline{2,4}.$$

Необходимую для дальнейших расчетов функцию распределения получаем интегрированием плотности распределения:

$$F_x(x) = a\left(px + \frac{r}{2}x^2 + \frac{q}{3}x^3\right).$$

Математическое ожидание и дисперсию величины $\varphi = min\{z, y, x\}$ вычисляем по вышеприведенным формулам. После интегрирования получаем:

$$M_\varphi = M_z + M_y + M_x,$$

где

$$M_z = \frac{P}{2}\Delta z_2 + \frac{Q - a_yP - apP}{3}\Delta z_3 +$$
$$+ \frac{2R - 2a_yQ - a_yb_yP - 2apQ + 2apa_yP - arP}{8}\Delta z_4 +$$
$$+ \frac{K_{\Delta z_5}}{30}\Delta z_5 + \frac{K_{\Delta z_6}}{72}\Delta z_6 + \frac{K_{\Delta z_7}}{84}\Delta z_7 +$$
$$+ \frac{K_{\Delta z_8}}{288}\Delta z_8 + \frac{3a_yarc_yR + 3aqa_yb_yR + 2aqa_yc_yQ}{162}\Delta z_9 +$$
$$+ \frac{aqa_yc_yR}{90}\Delta z_{10},$$

где

$$K_{\Delta z_5} = -6a_yR - 3a_yb_yQ - 2b_yc_yP - 6apR +$$
$$+ 6apa_yQ + 3apa_yb_y - 3arQ + 3a_yarP - 2aqP;$$

$$K_{\Delta z_6} = -6a_yb_yR - 4a_yc_yQ + 12apa_yR +$$
$$+ 6apa_yb_yQ + 4apa_yc_yP - 6arR +$$
$$+ 6a_yarQ + 3a_yarb_yP - 4aqQ + 4aqb_yP;$$

$$K_{\Delta z_7} = -4a_yc_yR + 6apa_yb_yR + 4apa_yc_yQ +$$
$$+ 6a_yarR + 3a_yarb_yQ + 2a_yarc_yP - 4aa_yR +$$
$$+ 4aqa_yQ + 2aqa_yb_yP;$$

$$K_{\Delta z_8} = 12ara_yb_yR + 9a_yarc_yQ + 6aqa_yb_yQ +$$
$$+ 12aqa_yc_yP + 6apa_yc_yR + 4aqa_yR;$$

$$M_y = \frac{a_y}{2}\Delta y_2 + \frac{a_yb_y - a_yP - a_yap}{3}\Delta y_3 +$$
$$+ \frac{2a_yc_y - 2a_yb_yP - a_yQ - 2a_yb_yap + 2a_yapP - a_yar}{8}\Delta y_4 +$$
$$+ \frac{K_{\Delta y_5}}{30}\Delta y_5 + \frac{K_{\Delta y_6}}{72}\Delta y_6 + \frac{K_{\Delta y_7}}{84}\Delta y_7 +$$
$$+ \frac{K_{\Delta y_8}}{288}\Delta y_8 + \frac{3a_yarc_yR + 3a_yc_yaqQ + 2a_yb_yaqR}{162}\Delta y_9 +$$
$$+ \frac{a_yc_yaqR}{90}\Delta y_{10},$$

где

$$K_{\Delta y_5} = -6a_yc_yP - 3a_yb_yQ - 2a_yR - 6a_yc_yap +$$
$$+ 6a_yb_yapP + 3a_yapQ - 3a_yb_yar + 3a_yarP - 2a_yaq;$$

$$K_{\Delta y_6} = -6a_yc_yQ - 4a_yb_yR + 12a_yc_yapP +$$
$$+ 6a_yb_yapQ + 4qapR - 6a_yc_yar + 6a_yb_yarP +$$
$$+ 3a_yarQ - 4a_yb_yaq + 4a_yaqP;$$

$$K_{\Delta y_7} = -4a_yc_yR + 6a_yc_yapQ + 4a_yb_yapR +$$
$$+ 6a_yc_yarP + 3a_yb_yarQ + 2a_yarR + 4a_yb_yaqP -$$
$$- 4a_yc_yaq + 2a_yaqQ;$$

$$K_{\Delta y_8} = 12a_yc_yapR + 9a_yc_yarQ + 6a_yb_yarR +$$
$$+ 12a_yc_yaqP + 6a_yb_yaqQ + 4a_yaqR;$$

$$M_x = \frac{ap}{2}\Delta x_2 + \frac{ar - apP - apa_y}{3}\Delta x_3 +$$
$$+ \frac{2aq - 2arP - apQ - 2a_yar + 2a_yapP - a_yb_yap}{8}\Delta y_4 +$$
$$+ \frac{K_{\Delta x_5}}{30}\Delta x_5 + \frac{K_{\Delta x_6}}{72}\Delta x_6 + \frac{K_{\Delta x_7}}{84}\Delta x_7 +$$
$$+ \frac{K_{\Delta x_8}}{288}\Delta x_8 + \frac{3a_yb_yaqR + 3a_yc_yaqQ + 2a_yc_yarR}{162}\Delta x_9 +$$
$$+ \frac{a_yc_yaqR}{90}\Delta x_{10} + 3a_yapQ - 3a_yb_yar +$$
$$+ 3a_yb_yapP - 2a_yc_yap;$$

$$K_{\Delta x_5} = -6aqP - 3arQ - 2apR - 6a_yaq + 6a_yarP +$$
$$+ 3a_yapQ - 3a_yb_yar + 3a_yb_yapP - 2a_yc_yap;$$

$$K_{\Delta x_6} = -6aqQ - 4arR + 12a_yaqP + 6a_yarQ +$$
$$+ 4a_yapR - 6a_yb_yaq + 6a_yb_yarP + 3a_yb_yapQ -$$
$$- 4a_yc_yar + 4a_yc_yapP;$$

$$K_{\Delta x_7} = -4aqR + 6a_yaqQ + 4a_yarR + 6a_yb_yaqP +$$
$$+ 3a_yb_yarQ + 2a_yb_yapR - 4a_yc_yaq + 4a_yc_yarP +$$
$$+ 2a_yc_yapQ;$$

$$K_{\Delta x_8}=12a_y aqR+9a_y b_y aqQ+6a_y b_y arR+$$
$$+12a_y c_y aqP+6a_y c_y arQ+4a_y c_y apR\ ;$$

$$D_\varphi=D_z+M_z^2+D_y+M_y^2+D_x+M_x^2\ ,$$

где

$$D_z=\frac{P}{3}\Delta z_3+\frac{Q-a_yP-apP}{4}\Delta z_4+$$
$$+\frac{2R-2a_yQ-a_yb_yP-2apQ+2apa_yP-arP}{10}\Delta z_5+$$
$$+\frac{D_{\Delta z_6}}{36}\Delta z_6+\frac{D_{\Delta z_7}}{84}\Delta z_7+\frac{D_{\Delta z_8}}{96}\Delta z_8+$$
$$+\frac{D_{\Delta z_9}}{324}\Delta z_9+\frac{D_{\Delta z_6}}{36}\Delta z_6+\frac{D_{\Delta z_7}}{84}\Delta z_7+$$
$$+\frac{D_{\Delta z_8}}{96}\Delta z_8+\frac{D_{\Delta z_9}}{324}\Delta z_9+$$
$$\frac{3a_yarc_yR+3aqa_yb_yR+2aqa_yc_yQ}{180}\Delta z_{10}+$$
$$+\frac{aqa_yc_yR}{99}\Delta z_{11}\ ;$$

$$D_{\Delta z_6}=-6a_yR-3a_yb_yQ-2a_yc_yP-6apR+$$
$$+6apa_yQ+3apa_yb_yP-3arQ+3a_yarP-2aqP\ ;$$

$$D_{\Delta z_7}=-6a_yb_yR-4a_yc_yQ+12apa_yR+$$
$$+6apa_yb_yQ+4apa_yc_yP-6arR+6a_yarQ+$$
$$+3a_yarb_yP-4aqQ+4aqa_yP\ ;$$

$$D_{\Delta z_8}=-4a_yc_yR+6apa_yb_yR+4apa_yc_yQ+$$
$$6a_yarR+3a_yarb_yQ+2a_yarc_yP-$$
$$-4aa_yR+4aqa_yQ+2aqa_yb_yP\ ;$$

$$D_{\Delta z_9}=12ara_yb_yR+9a_yarc_yQ+6aqa_yb_yQ+$$
$$+12aqa_yc_yP+6apa_yc_yR+4aqa_yR\ ;$$

$$D_y=\frac{a_y}{3}\Delta y_3+\frac{a_yb_y-a_yP-a_yap}{4}\Delta y_4+$$
$$+\frac{2a_yc_y-2a_yb_yP-a_yQ-2a_yb_yap+2a_yapP-a_yar}{10}\Delta y_5+$$
$$+\frac{D_{\Delta y_6}}{36}\Delta y_6+\frac{D_{\Delta y_7}}{84}\Delta y_7+\frac{D_{\Delta y_8}}{96}\Delta y_8+$$
$$+\frac{3a_yarc_yR+3a_yc_yaqQ+2a_yb_yaqR}{188}\Delta y_{10}+$$
$$+\frac{D_{\Delta y_9}}{324}\Delta y_9+\frac{a_yc_yaqR}{99}\Delta y_{11},$$

где

$$D_{\Delta y_6}=-6a_yc_yP-3a_yb_yQ-2a_yR-6a_yc_yap+$$
$$+6a_yb_yapQ+6a_yb_yapP+3a_yapQ-$$
$$3a_yb_yar+3a_yarP-2a_yaq\ ;$$

$$D_{\Delta y_7}=-6a_yc_yQ-4a_yb_yR+12a_yc_yapP+$$
$$+6a_yb_yapQ+4qapR-6a_yc_yar+6a_yb_yarP+$$
$$+3a_yarQ-4a_yb_yaq+4a_yaqP\ ;$$

$$D_{\Delta y_8}=-4a_yc_yR+6a_yc_yapQ+$$
$$+4a_yb_yapR+6a_yc_yarP+3a_yb_yarQ+$$
$$+2a_yarR+4a_yb_yaqP-4a_yc_yaq+2a_yaqQ\ ;$$

$$D_{\Delta y_9}=12a_yc_yapR+9a_yc_yarQ+6a_yb_yarR+$$
$$+12a_yc_yaqP+6a_yb_yaqQ+4a_yaqR\ ;$$

$$D_x=\frac{ap}{3}\Delta x_3+\frac{ar-apP-apa_y}{4}\Delta x_4+$$
$$+\frac{2aq-2arP-apQ-2a_yar+2a_yapP-a_yb_yap}{10}\Delta x_5+$$
$$+\frac{D_{\Delta x_6}}{36}\Delta x_6+\frac{D_{\Delta x_7}}{84}\Delta x_7+\frac{D_{\Delta x_8}}{96}\Delta x_8+$$
$$+\frac{3a_yb_yaqR+3a_yc_yaqQ+2a_yc_yarR}{180}\Delta x_{10}+$$
$$+\frac{D_{\Delta x_9}}{324}\Delta x_9+\frac{a_yc_yaqR}{99}\Delta x_{11}\ .$$

$$D_{\Delta x_6}=-6aqP-3arQ-2apR-6gaq+6a_yarP+$$
$$+3a_yapQ-3a_yb_yar+3a_yb_yapP-2a_yc_yap\ ;$$

$$D_{\Delta x_7}=-6aqQ-4arR+12a_yaqP+6a_yarQ+$$
$$4a_yapR-6a_yb_yaq+6a_yb_yarP+3a_yb_yapQ-$$
$$-4a_yc_yar+4a_yc_yapP\ ;$$

$$D_{\Delta x_8}=-4aqR+6a_yaqQ+4a_yarR+$$
$$+6a_yb_yaqP+3a_yb_yarQ+2a_yb_yapR-$$
$$-4a_yc_yaq+4a_yc_yarP+2a_yc_yapQ;$$

$$D_{\Delta x_9}=12a_yaqR+9a_yb_yaqQ+6a_yb_yarR+$$
$$+12a_yc_yaqP+6a_yc_yarQ+4a_yc_yapR\ .$$

5.5. Модель расчета прибыльности и срока окупаемости производственного проекта в стохастической интерпретации (обратная задача)

Во второй задаче (обратной) выходным показателем является количество занятых на предприятии – величина $PL(l,t)$, которая вычисляется по формуле (5.13).

В стохастической интерпретации эта величина будет функцией случайных величин, входящих в ее состав, а именно $DXL(l,t)$, $ptearsum(l)$ и $ear(l)$. Последние величины можно представить в виде неслучайного слагаемого и случайного приращения:

$$DXL(l,t)=\overline{DXL}(l,t-1)+\Delta DXL(l,t);$$

$$ptearsum(l)=\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l);$$

$$ear(l)=\overline{ear}(l)+\Delta ear(l),$$

где

$\overline{DXL}(l,t)$ – средний выпуск продукции l-го типа на отрезке времени перед точкой t;

$\Delta DXL(l,t)$ – случайное изменение выпуска продукции l-го типа на отрезке времени после точки t;

$\overline{ptearsum}(l)$ – среднее значение доли цеховых расходов на заработную плату от общих цеховых расходов при выпуске продукции l-го типа;

$\Delta ptearsum(l)$ – случайное изменение доли цеховых расходов на заработную плату от общих цеховых расходов при выпуске продукции l-го типа;

$\overline{ear}(l)$ – среднее значение заработной платы на одного цехового работника;

$\Delta ear(l)$ – случайное изменение заработной платы на одного цехового работника.

Подставляя выражения для случайных величин $DXL(l,t)$, $ptearsum(l)$ и $ear(l)$ в формулу для вычисления величины $PL(l,t)$ получаем рекуррентное выражение процесса Маркова в обратной задаче:

$$PL(l,t)=\frac{\overline{DXL}(l,t-1)\overline{ptearsum}(l)}{\overline{ear}(l)+\Delta ear(l)}+$$
$$+\frac{\Delta DXL(l,t)\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l)\overline{DXL}(l,t-1)}{\overline{ear}(l)+\Delta ear(l)}+$$
$$+\frac{\Delta DXL(l,t)\Delta ptearsum(l)}{\overline{ear}(l)+\Delta ear(l)}.$$

Первое слагаемое, как и второе представляют собой случайные величины. Однако в первом слагаемом случайной является только элементарная случайная величина $\Delta ear(l)$. Положим как и раньше, что случайные отклонения малы по сравнению со средней величиной и пренебрежем этой величиной в знаменателе первого слагаемого. Тогда только второе слагаемое будет случайной величиной. Поэтому для определения переходной функции процесса Маркова величины $\Delta ear(l)$ требуется вычислить переходную функцию только второго слагаемого.

При этом надо учесть, что для случайной величины $\Delta ptearsum(l)$ должно выполняться условие:

$$\sum_{l=1}^{PR}\Delta ptearsum(l)=$$
$$=\sum_{l=1}^{PR}[\overline{ptearsum}(l)+\Delta ptearsum(l)]=1.$$

В силу этого случайные величины $\Delta ptearsum(l)$ зависимы и могут быть коррелированы (а в случае использования нормального распределения обязательно будут коррелированы). Поэтому и случайные величины с индексом l, которые представляют собой значения этого слагаемого как функции элементарных величин в совокупности также могут быть коррелированы.

Однако и для средних значений величин $\overline{ptearsum}(l)$ существует условие $\sum_{l=1}^{PR}\overline{ptearsum}(l)=1$, откуда следует $\sum_{l=1}^{PR}\Delta ptearsum(l)=0$.

Поэтому во втором слагаемом рекуррентного выражения процесса Маркова величина $\Delta ptearsum(l)$ с определенным значением индекса k является функцией от величин $ptearsum(l)$ с индексами, $l\neq k$, что можно выразить в виде:

$$\Delta ptearsum(k)=-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR-1}\Delta ptearsum(l).$$

Все случайные величины $\Delta ptearsum(l)$ в совокупности по индексу l зависимы, тогда как случайные величины $\Delta ptearsum(l)$, $l=\overline{1,PR-1},\ l\neq k$ уже независимы, поскольку во-первых, функционально не связаны, а во-вторых, не зависимы по существу. Тогда во втором слагаемом рекуррентного выражения процесса Маркова заменим $\Delta ptearsum(k)$ на $-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR}\Delta ptearsum(l)$.

Для удобства дальнейших вычислений обозначим:

$$r=\Delta DXL(l,t);\ p_l=\Delta ptearsum(l);\ p=-\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{PR}p_l;$$

$$q=\Delta ear(l);\ \overline{r}=\overline{DXL}(l,t);\ \overline{p}=\overline{ptearsum}(l);$$
$$\overline{q}=\overline{ear}(l).$$

Тогда случайная величина – переходная функция процесса Маркова (второе слагаемое формулы процесса), которую обозначим через φ, запишется в виде:

$$\varphi=\frac{r\overline{p}-p\overline{r}-rp}{\overline{q}+q}.$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии этой величины надо определить ее плотность функции распределения. Рассмотрим сначала вариант равномерного распределения входящих в ее состав элементарных случайных величин. Поскольку в числитель функции φ входит сумма элементарных случайных величин p_l, то примем допущение, что на предприятии выпускается не менее 5-7 видов продукции (величина PR – максимальное значение индекса l). Тогда случайная величина p как сумма случайных величин p_l будет иметь распределение, даже при равномерном распределении входящих в ее состав случайных величин, близкое к нормальному с нулевым математическим ожиданием в силу $\sum_{l=1}^{PR}p_l=0$.

Как и в ранее рассмотренных случаях плотность функции распределения функции φ будем находить как суперпозицию распределений элементов этой сложной функции, которая представляет собой частное от деления числителя на знаменатель, а числитель – сумму элементов, в состав которых входит также произведение элементов.

Сначала находим плотности распределений внутренних элементов – сначала плотность распределения произведения случайных величин rp, которое обозначим через w, затем распределение разности случайных величин $r\bar{p}$ и $\bar{r}p$, которую обозначим через u и затем распределение разности случайных величин u и w, которую обозначим через v.

Затем окончательно находим распределение функции φ, как частного от деления случайной величины v на случайную величину $\bar{q}+q$. Распределение последней случайной величины равно распределению величины q с математическим ожиданием равным математическому ожиданию величины q плюс константа q, что и будем учитывать в вычислениях распределения функции φ.

Плотность распределения произведения случайных величин rp в случае равномерного распределения элементарных случайных величин, входящих в состав этого произведения при наших допущения о количестве выпускаемых видов продукции – это распределение произведения равномерного и нормального распределения, обозначаемое через $f_w(w)$, которое, при условии независимости случайных величин r и p, вычисляется посредством взятия интеграла:

$$f_w(w)=$$

$$=\int_{r_-}^{r_+} f_r(r) f_p\left(\frac{w}{r}\right)dr=\frac{1}{\Delta r\sigma_p\sqrt{2\pi}}\int_{r_-}^{r_+} e^{-\frac{w^2}{2r^2\sigma_p^2}}dr.$$

Поскольку при равномерном распределении область определения этой функции отрезок, то и интегрирование осуществляется на этом отрезке $\Delta r=(r_-,r_+)$. Этот интеграл не берется в элементарных функциях (в конечном виде), а подинтегральную функцию нельзя разложить в ряд Тейлора в точке $r=0$. Однако ее можно преобразовать к виду, позволяющему представить в виде разложения в ряд. Обозначим $t=\frac{1}{r\sqrt{2}\sigma_p}$ и сделав подстановку в подинтегральном выражении, получим:

$$f_w(w)=\frac{\sigma_p}{\Delta r\sqrt{\pi}}\int_{t_-}^{t_+}\frac{e^{-w^2t^2}}{t^2}dt,$$

где $t_-=\frac{1}{r_-\sqrt{2}\sigma_p}$; $t_+=\frac{1}{r_+\sqrt{2}\sigma_p}$.

Теперь числитель можно представить разложением в ряд Тейлора в точке $t=0$. Ограничившись 2 членами разложения, получим: $e^{-w^2t^2}\cong 1-2w^2t^2$. Разделив на числитель и проинтегрировав в итоге имеем:

$$f_w(w)\cong\frac{\sigma_p}{\Delta r\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Delta t}{t_+t_-}-2w^2\Delta t\right),$$

где $\Delta t=t_+-t_-$.

Плотность распределения случайной величины u, обозначаемая через $f_u(u)$ как разности случайных величин $r\bar{p}$ и $\bar{r}p$ вычисляется взятием интеграла:

$$f_u(u)=\frac{1}{\sigma_p\sqrt{2\pi}\,\bar{p}\Delta r}\int_{\bar{p}r_-}^{\bar{p}r_+} e^{-\frac{(r\bar{p}-u)^2}{2\sigma_p^2}}dr,$$

где интегрирование осуществляется как и для функции $f_w(w)$ на отрезке области равномерного распределения случайной величины $r\bar{p}=(\bar{p}r_-,\bar{p}r_+)$. Подинтегральная функция это нормальный закон распределения с центром рассеяния u и средним квадратическим отклонением σ_p, а интеграл – это вероятность попадания случайной величины, подчиненной этому закону на отрезок $r\bar{p}=(\bar{p}r_-,\bar{p}r_+)$, поэтому можно записать:

$$f_u(u)=\frac{1}{\bar{p}\Delta r}\left[\Phi\left(\frac{\bar{p}r_+-u}{\sigma_p}\right)-\Phi\left(\frac{\bar{p}r_--u}{\sigma_p}\right)\right],$$

где $\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

функция нормального распределения [63].

Теперь нужно вычислить плотность функции распределения случайной величины v как разности случайных величин u и w по формуле:

$$f_v(v)=\frac{\sigma_p}{\bar{p}(\Delta r)^2\sqrt{\pi}}*$$

$$*\int_{u_-}^{u_+}\left[\Phi\left(\frac{\bar{p}r_+-u}{\sigma_p}\right)-\Phi\left(\frac{\bar{p}r_--u}{\sigma_p}\right)\right]*\left[\frac{\Delta t}{t_+t_-}-2(u-v)^2\Delta t\right]du.$$

Выше было показано, что функцию $\Phi(u)$ можно представить в виде разложения в степенной ряд. Используя это разложение, запишем функцию $f_v(v)$:

$$f_v(v)\cong\frac{\sigma_p}{\bar{p}(\Delta r)^2\sqrt{\pi}}\int_{u_-}^{u_+}\left(\Delta l+\Delta mu+\Delta nu^2\right)*$$

$$*\left[\frac{\Delta t}{t_+t_-}-2(u-v)^2\Delta t\right]du,$$

где

$$\Delta l = l_- - l_+ ;\ \Delta m = m_- - m_+ ;\ \Delta n = n_- - n_+ ;$$

$$l_- = \frac{e^{-\frac{\bar{p}r_-}{\bar{\sigma} p}}}{e^{-\frac{\bar{p}r_-}{\bar{\sigma} p}} + 1} ;\ m_- = \frac{1}{\bar{\sigma} p} l_-(1 - l_-) ;$$

$$n_- = l_-(1 - l_-)\left(1 - \frac{l_-}{\bar{\sigma}^2 p}\right);$$

$$l_+ = \frac{e^{-\frac{\bar{p}r_+}{\bar{\sigma} p}}}{e^{-\frac{\bar{p}r_+}{\bar{\sigma} p}} + 1} ;\ m_+ = \frac{1}{\bar{\sigma} p} l_+(1 - l_+) ;$$

$$n_+ = l_+(1 - l_+)\left(1 - \frac{l_+}{\bar{\sigma}^2 p}\right);$$

$$\bar{\sigma} p = 1{,}7\sigma_p .$$

После преобразований и взятия интеграла получаем:

$$f_v(v) = \frac{\Delta t \sigma_p}{\bar{p}(\Delta r)^2 \sqrt{\pi}} (A + Bv + Cv^2) ,$$

где

$$A = \frac{\Delta u \Delta l}{t_+ t_-} + \frac{\Delta u_2 \Delta q}{2t_+ t_-} + \frac{\Delta u_3 \Delta s}{3t_+ t_-} - \frac{2\Delta u_3 \Delta l}{3} +$$

$$+ \Delta u_4 \Delta s - \frac{\Delta u_4 \Delta q}{2} - \frac{2\Delta u_5 \Delta s}{5} ;$$

$$B = 2\Delta u_2 \Delta l - \Delta u_2 \Delta q + 4\Delta u_3 \Delta s ;$$

$$C = 2\Delta u \Delta l - 2\Delta u_3 \Delta s ;$$

$$\Delta u = u_+ - u_- ;\ \Delta u_i = u_+^i - u_-^i ,\ i = \overline{2,5} .$$

И, наконец, плотность распределения функции φ получаем как плотность распределения частного от деления величин v и $\bar{q} + q$. Учитывая, что равномерная плотность функции распределения величины $\bar{q} + q$, обозначаемая через $f_q(q)$ равна:

$$f_q(q) = \frac{1}{\Delta q} .$$

Функция $f(\varphi)$ вычисляется по формуле:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\Delta q} \int_{q_-}^{q_+} q f_v(\varphi q) dq =$$

$$= \frac{\Delta t \sigma_p}{\Delta q \bar{p}(\Delta r)^2 \sqrt{\pi}} \int_{q_-}^{q_+} q(A + Bq\varphi + Cq^2 \varphi^2) dq .$$

После интегрирования получаем:

$$f(\varphi) = \frac{\Delta t \sigma_p}{\Delta q \bar{p}(\Delta r)^2 \sqrt{\pi}} \left(\frac{A\Delta q_2}{2} + \varphi \frac{B\Delta q_3}{3} + \varphi^2 \frac{C\Delta q_4}{4} \right),$$

где $\Delta q_i = q_+^i - q_-^i ,\ i = \overline{2,4}$.

Используя плотность функции распределения случайной величины φ получаем выражения для ее математического ожидания и дисперсии:

$$M_\varphi = \frac{\Delta t \sigma_p}{\Delta q \bar{p}(\Delta r)^2 \sqrt{\pi}} *$$

$$* \left(\frac{\Delta \varphi_2 A \Delta q_2}{4} + \frac{\Delta \varphi_3 B \Delta q_3}{9} + \frac{\Delta \varphi_4 C \Delta q_4}{12} \right);$$

$$D_\varphi = \frac{\Delta t \sigma_p}{\Delta q \bar{p}(\Delta r)^2 \sqrt{\pi}} *$$

$$* \left(\frac{\Delta \varphi_3 A \Delta q_2}{6} + \frac{\Delta \varphi_4 B \Delta q_3}{12} + \frac{\Delta \varphi_5 C \Delta q_4}{20} \right) + M_\varphi^2 ,$$

где

$$\Delta \varphi_i = \varphi_+^i - \varphi_-^i ,\ i = \overline{2,5} .$$

Рассмотрим теперь вариант, когда элементарные случайные величины распределены по нормальному закону. В этом случае алгоритм вычислений плотности распределения случайной величины φ схож с алгоритмом вычисления случайной величины z в прямой задаче с аналогичным строением этой функции и нормальным распределением элементарных случайных величин. Различие состоит в числителе, который в данной задаче представляет собой разность случайных величин.

Плотность распределения случайной величины $v = u - w$, где $u = r\bar{p} - \bar{p}r$ и $w = rp$ с нормально распределенными компонентами также будет нормальной с математическим ожиданием, равным разности математических ожиданий компонентов и дисперсий:

$$f_v(v) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v - M_v)^2}{2\sigma_v^2}} ,$$

где $M_v = \bar{p} M_r - \bar{r} M_p - M_w$; $\sigma_v^2 = \bar{p}^2 \sigma_r^2 - \bar{r}^2 \sigma_p^2 - \sigma_w^2$.

Все параметры в этой функции являются параметрами элементарных случайных величин, распределения которых предполагаются известными (в данном случае нормальные распределения) и, следовательно, известны сами параметры, за исключением параметров M_w и σ_w^2 случайной величины w, которые надо определить. Выше была определена функция распределения этой случайной величины. Используя её можно вывести формулы для расчета параметров M_w, σ_w^2:

$$M_w = \int_{-\infty}^{+\infty} wf(w)dw = \int_{-\infty}^{+\infty} w(C+Dw^2)dw\,;$$

$$D_w = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 f(w)dw - M_w^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(C+Dw^2)dw - M_w^2\,.$$

При интегрировании по всей числовой оси эти интегралы расходятся, поскольку при их выводе использовались приближения. Чтобы избежать бесконечности будем интегрировать на конечном интервале, который можно найти исходя из того, что подинтегральные выражения представляют собой произведения параболы на монотонно возрастающие функции, проходящие через 0. Поэтому в качестве интервала интегрирования возьмем интервал, обозначаемый (w_-, w_+) и определяемый корнями уравнения:

$$(C+Dw^2)=0\,.$$

После интегрирования получаем:

$$M_w = \frac{C}{2}\Delta w_2 + \frac{D}{3}\Delta w_3\,;$$

$$D_w = \frac{C}{3}\Delta w_3 + \frac{D}{5}\Delta w_5 - M_w^2\,,$$

где $\Delta w_i = w_+^i - w_-^i,\ i=\overline{2,5}$.

Функция $f_q(q)$ в случае нормального распределения записывается в виде:

$$f_q(q) = \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-M_q)^2}{2\sigma_q^2}}\,.$$

И, наконец, плотность распределения функции φ получаем как плотность распределения частного от деления величин v и $\bar{q}+q$ по формуле:

$$f(\varphi) = \int_0^{+\infty} qf_q(q)f_v(\varphi q)dq =$$

$$= \frac{1}{\sigma_v\sigma_q 2\pi}\int_0^{+\infty} q e^{-\frac{(\varphi q - M_v)^2}{2\sigma_v^2}} e^{-\frac{(q-M_q)^2}{2\sigma_q^2}} dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_q}\int_0^{+\infty} q e^{-\left[\frac{C(\varphi)}{2\sigma_v^2\sigma_q^2}\right]} dq\,,$$

где

$$C(\varphi) = q^2(\sigma_v^2 + \sigma_q^2\varphi^2) -$$

$$- q2(\sigma_v^2 M_q + \sigma_q^2 M_v\varphi) + (\sigma_q^2 M_v^2 + \sigma_v^2 M_q^2)\,.$$

Обозначив

$$U = \frac{\sigma_v^2 + \sigma_q^2\varphi^2}{2\sigma_v^2\sigma_q^2}\,;\ V = \frac{\sigma_v^2 M_q + \sigma_q^2 M_v \varphi^2}{2\sigma_v^2\sigma_q^2}\,;$$

$$W = \frac{\sigma_v^2 M_q^2 + \sigma_q^2 M_v^2}{2\sigma_v^2\sigma_q^2}\,;\ q - \frac{V}{U} = y\,,$$

выражение для функции $f(\varphi)$ можно проинтегрировать:

$$f(\varphi) = \frac{e^{-\left(W - \frac{V^2}{U}\right)}}{2\pi\sigma_v\sigma_q}\int_0^{+\infty}\left(y + \frac{V}{U}\right)e^{-Uy^2}dy =$$

$$= \frac{e^{-\left(W - \frac{V^2}{U}\right)}}{4U\pi\sigma_v\sigma_q}(V+1) = \frac{e^{-\left(W - \frac{V^2}{U}\right)}}{4U\pi\sigma_v\sigma_q}(2V+1) =$$

$$= \frac{e^{-W}}{2\pi\sigma_v\sigma_q} e^{\frac{A(\varphi)}{2(\sigma_v^2\sigma_q^4\varphi^2 + \sigma_v^4\sigma_q^2)}} \frac{B(\varphi)}{\sigma_q^2\varphi^2 + \sigma_v^2}\,,$$

где

$$A(\varphi) = \sigma_q^4 M_v^2\varphi^2 + 2\sigma_v^2\sigma_q^2 M_v M_q\varphi + \sigma_v^4 M_q^2\,;$$

$$B(\varphi) = \sigma_q^2 M_v\varphi + \sigma_v^2 M_q + \sigma_v^2\sigma_q^2\,.$$

Окончательно математическое ожидание и дисперсию случайной величины φ, обозначаемые через M_φ и D_φ, получаем по формулам:

$$M_\varphi = \int_0^{+\infty}\varphi f(\varphi)d\varphi\,;\ D_\varphi = \int_0^{+\infty}\varphi^2 f(\varphi)d\varphi\,.$$

Эти интегралы на положительной полуоси расходятся. Для получения конечных значений этих интегралов надо выполнить интегрирование на конечном интервале. Поскольку функция распределения $f(\varphi)$ является функцией нормальных распределений, то целесообразно выбрать этот конечный интервал как объединение конечных интервалов нормальных распределений, входящих в ее состав. В качестве таких интервалов могут быть выбраны интервалы переменных v и $\bar{q}+q$, равные соответственно $3\sigma_v$ и $3\sigma_q$, которые обозначим через (v_-,v_+) и (q_-,q_+). Тогда интервал интегрирования по φ, обозначаемый через (φ_-,φ_+), будет определяться как

$$\varphi_-=\frac{v_-}{q_+}$$

и

$$\varphi_+=\frac{v_+}{q_-}.$$

Для упрощения интегрирования разложим экспоненту в ряд Тейлора, оставив 2 члена разложения. Такое приближение определяется тем, что эта функция изменяется медленно и асимптотически приближается к 1, поэтому достаточно использовать линейное приближение.

$$e^{\frac{\sigma_q^4 M_v^2 \varphi^2+2\sigma_v^2\sigma_q^2 M_v M_q \varphi+\sigma_v^4 M_q^2}{2(\sigma_v^2\sigma_q^4\varphi^2+\sigma_v^4\sigma_q^2)}}\cong$$

$$\cong e^{\frac{M_q^2}{2\sigma_q^2}}(1+\varphi).$$

Тогда

$$M_\varphi=\frac{e^{-W}}{2\pi\sigma_v\sigma_q}e^{\frac{M_q^2}{2\sigma_q^2}}*$$

$$*\int_{\varphi_-}^{\varphi_+}\varphi(1+\varphi)\frac{\sigma_q^2 M_v\varphi+\sigma_v^2 M_q+\sigma_v^2\sigma_q^2}{\sigma_q^2\varphi^2+\sigma_v^2}d\varphi;$$

$$D_\varphi=\frac{e^{-W}}{2\pi\sigma_v\sigma_q}e^{\frac{M_q^2}{2\sigma_q^2}}*$$

$$*\int_{\varphi_-}^{\varphi_+}\varphi^2(1+\varphi)\frac{\sigma_q^2 M_v\varphi+\sigma_v^2 M_q+\sigma_v^2\sigma_q^2}{\sigma_q^2\varphi^2+\sigma_v^2}d\varphi-M_\varphi^2.$$

Взяв интегралы получаем:

$$M_\varphi=A\left[\frac{c}{2b}\ln\left|\frac{b}{d}\Delta\varphi_2+1\right|+\frac{a+c}{b}\Delta\varphi+\frac{a+c}{b}arctg\frac{b}{d}\Delta\varphi\right];$$

$$D_\varphi=A\left[\frac{c}{b}\Delta\varphi+\frac{c}{b}arctg\frac{b}{d}\Delta\varphi+\frac{d(a+c)}{2b}\Delta\varphi_2+\right.$$

$$\left.+\frac{c}{2b}\ln\left|\frac{b}{d}\Delta\varphi_2+1\right|++\frac{a}{3b}\Delta\varphi_3+\frac{\Delta\varphi}{b}++\frac{1}{b}arctg\frac{b}{d}\Delta\varphi\right],$$

где

$$A=\frac{e^{-W}}{2\pi\sigma_v\sigma_q}e^{\frac{M_q^2}{2\sigma_q^2}};\ a=\sigma_q^2M_v;\ b=\sigma_q^2;$$

$$c=\sigma_v^2M_q+\sigma_v^2\sigma_q^2;\ d=\sigma_v^2.$$

Выводы

В пятой части части статьи приводится алгоритм расчета полной стоимости заданного производственного проекта на основе данных оптимального моделирования производственных процессов, разработанного во второй части статьи. Кроме того, в пятой части разработана динамическая модель производственных процессов на предприятии, которая существенно отличается от динамической модели третьей части. Последняя модель ориентирована на моделирование производственных процессов на предприятиях на подготовительной стадии, когда осуществляется перепрофилирование имеющихся предприятий и строительство новых предприятий и цехов.

После того, как запущены предприятия, выпускающие конечную продукцию в соответствии с заданным производственным проектом, начинается сбыт этой продукции и появляется доход, т.е. начинается вторая стадия реализации этого производственного проекта – переход на самоокупаемость, динамику которой требуется моделировать по иному, учитывая получаемый доход, зависящий от характера сбыта, и его распределение на элементы затрат.

Динамическая модель этой стадии реализации производственного проекта также включает основные элементы модели третьей части статьи, связанные с материальными и трудовыми затратами. Требуемые трудовые ресурсы определяются в модели третьей части статьи и поэтому в данной модели принимаются заданными экзогенно.

Элементы модели третьей части статьи дополнены новыми элементами, отражающими приход, расход и остаток денежных средств в наличной и безналичной форме, более детальный состав затрат и себестоимости производства продукции, амортизацию основных средств, расчет всех уплачиваемых предприятием налогов и отчислений в фонды, получение и выплату кредитов и займов.

Учитываются также возможные задержки сбыта выпускаемой продукции, различные формы оплаты за проданные товары, включая продажи с полной оплатой, оплатой в рассрочку, предоставление товарного кредита. При задержках сбыта учитываются ограничения на складские помещения готовой продукции. При превышении этих ограничений производство приостанавливается до рассасывания товарных излишков.

Предусмотрены также ограничения на производств конечной продукции исходя из имеющихся в текущий момент времени на складах количества исходных материалов и комплектующих, которые, в свою очередь, зависят от их закупок в предыдущие периоды времени. Учитываются также ограниченные размеры складских помещений для хранения исходных материалов и комплектующих. При превышении этих запасов закупки приостанавливаются до требуемого снижения объема запасов.

Кроме этого включен механизм пополнения оборотных средств за счет кредитов и займов. На каждом шаге по времени при недостатке оборотных средств рассчитываются необходимые размеры кредитов и займов, что позволяет рассчитать общий объем необходимых кредитов, распределение во времени их получения и выплаты долгов и процентов по ним.

Разработанная динамическая модель позволяет рассчитывать различные варианты выпуска продукции в зависимости от различных значений количественных параметров модели и различных сценариев сбытовой и производственной политики и определить для них сроки окупаемости производственного проекта. Кроме этой задачи, называемой прямой, разработанная динамическая модель позволяет решать и обратную задачу, а именно определение тех ресурсов, которые необходимы для выпуска заданного количества продукции, как функции времени.

Как и в модели третьей части статьи в данной модели разработан механизм учета неопределенности основных параметров. Этот механизм также построен на основе представления стохастического динамического процесса в виде цепей Маркова. В качестве законов распределений элементарных случайных величин выбраны два варианта: равномерное и нормальное распределения. Разработаны алгоритмы расчета основных характеристик случайного динамического процесса – математического ожидания и дисперсии на каждом шаге во времени в прямой и обратной задачах, что позволяет учесть технические и экономические риски при реализации заданного производственного проекта и определить возможные отклонения выходных показателей, такие как выход на максимальные мощности, сроки окупаемости проекта и др.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена разработанная автором математическая модель реализации группой предприятий производственного проекта. Основу модели составляет система уравнений производственных связей между предприятиями, реализующими заданный производственный проект. Эта система уравнений получена автором посредством видоизменения уравнений межотраслевых связей математической модели межотраслевого баланса (модели Леонтьева).

Математическая модель производственных связей между предприятиями сформулирована в виде динамической, оптимизационной и стохастической системы. Оптимизация осуществляется по трем критериям, два из которых требуется максимизировать, а один минимизировать. Стохастический характер модели определяется тем, что элементарные параметры (параметры самого нижнего уровня) модели считаются случайными величинами, для которых задаются функции распределения.

Эти параметры не являются случайными величинами в собственном смысле, а представляют собой имитацию случайных величин в виде имитации неопределенности параметров. При этом используемые различные функции распределения представляют собой различные виды учета неопределенности параметров. Равномерное распределение выражает такой вид неопределенности, когда ничего нельзя сказать о предпочтительности того или иного значения параметра, кроме того, что эти значения заключены в определенном интервале. Нормальное распределение выражает вид неопределенности, когда имеется информация о предпочтении значений параметров, и эти предпочтения выражаются в виде наиболее распространенного закона распределения случайных величин.

Алгоритм решения поставленной математической задачи разработан автором на основе ряда принципов и методов. В качестве общего принципа использован принцип декомпозиции. Согласно этому принципу поставленная динамическая оптимизационная и стохастическая задача декомпозируется на связанные между собой задачи – статическую оптимизационную и динамическую оптимизационную, каждая из которых в свою очередь рассматривается в детерминированной и стохастической постановке. Логика этого разбиения состоит в том, что по содержательному смыслу решение статической оптимизационной задачи представляет собой конечную точку по времени решения динамической оптимизационной задачи. Далее, зная начальную и конечную точку по времени, решается динамическая оптимизационная задача на быстродействие.

Статическая оптимизационная задача является нелинейной оптимизационной задачей, в силу нелинейности целевой функции, а в состав ограничений этой задачи входят величины, которые сами должны быть получены в результате ее решения. Кроме того эта оптимизационная задача является многокритериальной. В состав критериев входят объем производства продукции в заданном ассортименте, объем производства продукции в свободном ассортименте и общая стоимость работ по перепрофилированию предприятий и цехов. При этом первые два критерия требуется максимизировать, а последний минимизировать.

Эта задача также решается на основе принципа декомпозиции и метода условной оптимизации. Нелинейная оптимизационная многокритериальная задача разбивается на несколько взаимосвязанных однокритериальных линейных оптимизационных задач, в которых значения двух других критериев зафиксированы. Для однокритериальных задач разработаны достаточно простые алгоритмы решения, а общая задача решается методом последовательных приближений посредством циклов решений взаимосвязанных однокритериальных задач, в которых оптимизируется один критерий, а два других принимаются равными решениям из предыдущего цикла. В рамках статической оптимизационной задачи также решается задача оптимального размещения мощностей строительных предприятий по строительным объектам.

Динамическая оптимизационная задача решается методом динамического программирования на основе принципа оптимального управления Беллмана. Для упрощения численного решения на компьютере, система уравнений и ограничений динамического процесса записаны в конечно-разностной по времени форме. Эта система разбита на блоки и расчет в блоках осуществляется в той последовательности, которая отражает реальные производственные процессы на предприятии.

В состав динамической модели в качестве отдельного блока включена оптимизационная модель подготовки необходимых кадров на предприятиях. В качестве исходных данных для этой модели используются данные, получаемые в результате решения статической оптимизационной задачи и представляющие собой количество и структуру кадров на предприятиях в начале и конце периода реализации заданного производственного проекта. В модели подготовки кадров осуществляется оптимальное по критерию минимума времени переобучение имеющихся и вновь принимаемых кадров на те специальности и в том количестве, которые требуются для реализации заданного производственного проекта. В результате решения этой задачи моделируется динамика трудовых ресурсов, которые могут включиться в производственную деятельность. Эти ресурсы служат ограничениями в собственно динамической модели производственной деятельности на предприятии.

Динамическая модель разработана в двух вариантах, отражающих этапы реализации заданного производственного проекта группой предприятий. На первом этапе осуществляются подготовительные работы по перепрофилированию и строительству новых предприятий и цехов, подготовке трудовых ресурсов. Эти работы финансируются за счет инвестиций в реализацию заданного производственного проекта. Стоимость этого проекта, в основном, определяется на основе решения статической многокритериальной задачи как стоимост строительных работ, работ по перепрофилированию предприятий и цехов, стоимости вновь устанавливаемого оборудования, стоимости подготовки кадров и стоимости проектных работ.

После того, как подготовительные работы завершены, начинается второй этап реализации производственного проекта – переход на самоокупаемость. На этом этапе требуется определить такие показатели, как время выхода выпуска продукции на заданную или предельную мощность, срок окупаемости проекта и др. Для определения этих характеристик в динамической модели второго этапа введены финансовые блоки – блок учета выручки от сбыта продукции, блок расчета себестоимости выпускаемой продукции и учета всех видов затрат, блок расчета необходимых размеров кредитов и займов, учета их получения и погашения и другие блоки.

Финансовые блоки позволяют в каждой точке по времени получать численные значения доходов и расходов, прибыли или убытков, денежные остатки в наличной и безналичной форме, требуемые суммы кредитов и займов, полученные суммы кредитов и займов и суммы, направленные на погашение основных долгов и процентов по ним, уплачиваемы налоги и отчисления в фонды и другие финансовые показатели.

Кроме того, в динамической модели второго этапа более детально отражены процессы заготовления исходных материалов комплектующих и сбыта готовой продукции на предприятии. Включены ограничения на площади складских помещений для хранения исходных материалов и комплектующих и готовой продукции. При переполнении складских помещений для хранения исходных материалов и комплектующих моделируется снижение их закупок в предыдущие интервалы времени, поскольку их поступление предусмотрено с задержкой после оплаты или подписания договора о поставке. При переполнении складов готовой продукции также предусмотрено снижение ее выпуска до объема, позволяющего разместить на складе. Имеется возможность моделировать различные сценарии сбыта готовой продукции: сбыт всей выпускаемой продукции, сбыт продукции в заданных объемах, задержки в сбыте и другие варианты.

После того как эти задачи решены в детерминированной постановке, осуществляется решение в стохастической постановке, сначала статической оптимизационной задачи. Последняя задача относится к числу задач пассивного стохастического программирования, поскольку в ходе ее решения не предполагается коррекции управляющих воздействий. В результате решения этой стохастической задачи определяются ее числовые характеристики, такие как математические ожидания и дисперсии выходных показателей. Эти значения могут существенно отличаться от решения статической оптимизационной задачи в детерминированной постановке и поскольку последнее решение служит в качестве исходных данных для динамической модели, то расчет на ней также в детерминированной постановке повторяется.

После этого для получения окончательного суждения о ходе динамического процесса с учетом технических и экономических рисков, осуществляется решение динамической оптимизационной задачи в стохастической постановке. Последняя задача решается на основе представления динамического оптимизационного процесса в виде цепей Маркова. В результате ее решения на каждом шаге по времени определяются переходные функции, с помощью которых вычисляются числовые характеристики стохастического динамического процесса, такие как математические ожидания и дисперсии выходных показателей. Получены формулы для этих характеристик с учетом двух видов законов распределений элементарных параметров задачи – равномерного и нормального, что позволяет получить более обоснованные оценки технических и экономических рисков при реализации заданного производственного проекта.

Литература

1. Леонтьев В.В. и др. Исследования структуры американской экономики. Перев. с англ. Госстатиздат, 1958.
2. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 2 Сборник статей под ред. Акад. В.С. Немчинова. – М. : Соцэкгиз, 1961, 535 с.
3. Ченери Х., Кларк П. Экономика межотраслевых связей. М.: ИЛ, 1962, 381 с.
4. Оптимальное планирование. Сб. трудов. Вып. 8. – Новосибирск, Наука, 1967, 193 с.
5. Ершов Э.Б. Неопределенность информации и устойчивость решения статической модели планового межотраслевого баланса. Сб. статей НИЭИ Госплана СССР. – М.: Экономика, 1967, 356 с.
6. Аганбегян А.Г., Гранберг А.Г. Экономико-математический анализ межотраслевого баланса СССР .- М.: Мысль, 1968, 357 с.
7. Соловьев А. Финансово-производственные связи в народнохозяйственной модели планирования. – «Эконом. и матем. методы», 1967, т. 3, №1.
8. Проблемы оптимизации экономических решений. Сб. трудов под ред. И.П. Суслова и Р.А. Оганяна. – Новосибирск, ИЭ и ОПП, 1971, 272 с.
9. Проблемы народнохозяйственного оптимума. Сб. трудов под ред. К.К. Вальтуха. – Новосибирск, ИЭ и ОПП, 1973, 276 с.
10. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г. Система моделей народно-хозяйственного планирования. – М.: Мысль, 1972, 348 с.
11. Моделирование народно-хозяйственных процессов. Под ред. Дадаяна В.С.- М.: Экономика, 1973, 479 с.
12. Система моделей оптимального планирования. Под ред. Акад. Н.П. Федоренко. – М.: Наука, 1975, 376 с.
13. Коссов В.В. Межотраслевые модели. М.: Экономика, 1973.
14. Использование народнохозяйственных моделей в планировании. Под ред. А.Г. Аганбегяна и К.К. Вальтуха. – М.: Экономика, 1975, 231 с.
15. Клоцвог Ф.Н., Новичков В.А. Экспериментальные расчеты упрощенной динамической модели межотраслевого баланса. – В кн.: Проблемы моделирования народного хозяйства, ч. I. Новосибирск, 1970, с. 4-14.
16. Иванилов Ю.П., Петров А.А. Динамическая модель расширения и перестройки экономики. В сборнике статей: Кибернетику на службу коммунизму. Экономические модели. Математические методы. Исследование операций. – М.: Энергия, 1971, 304 с.
17. Шатилов Н.Ф., Гершензон М.А. Методические положения по использованию динамической модели межотраслевого баланса в сводном перспективном народнохозяйственном планировании. Новосибирск, 1971, 133 с.
18. Хоош Янош. Факторы экономического роста. – М.: Экономика, 1974, 223 с.
19. Гершензон М.А. Анализ упрощенных динамических моделей межотраслевого баланса. – М.: Наука, 1975, 216 с.
20. Использование народнохозяйственных моделей в планировании. Под ред. А.Г. Аганбегяна и К.К. Вальтуха. – М.: Экономика, 1975, 231 с.
21. Методы разработки материальных балансов. Под ред. И.А. Калинина и П.П. Карпова. – М.: Экономика, 1977, 228 с.
22. Гранберг А.Г. Математические модели социалистической экономики. – М.: Экономика, 1978, 351 с.
23. Лавровский Б.Л. Исследование свойств вероятностной модели межотраслевого баланса производственных мощностей. – В кн. Оптимизационные и балансовые модели народного хозяйства. – Новосибирск, Наука, 1977, 251 с.
24. Масаков В.М. Некоторые свойства моделей межотраслевого баланса производственных мощностей простейшего типа. В сб.: Проблемы моделирования народного хозяйства. Ч. 3. – Новосибирск, ИЭ и ОПП, 1973, 264 с.
25. Багриновский К.А., Бусыгин В.П. Математика плановых решений. – М.: Наука, 1980,224 с.
26. Дорошенко В.А. Динамическая межотраслевая модель региональной экономики. – М.: Экономика, 1980, 96 с.
27. Михалевский Б.Н. Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования. – М.: Наука, 1972, 474 с.
28. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М.: Наука 1979, 304 с.
29. Килин П.М. Региональные межотраслевые балансы. – М.: Наука, 1979, 188 с.
30. Левицкий Е.М. Адаптация в моделировании экономических систем. – Новосибирск: Наука, 1977, 205с.
31. Левицкий Е.М. Адаптивные эконометрические модели. – Новосибирск: Наука, 1981, 221 с.
32. Фаерман Е.Ю. Инвестиционные потребности социально-экономического развития Российской Федерации. Препринт.– М.: ЦЭМИ РАН, 1995, 105 с.
33. Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. Сб. статей под ред. И.Ф. Шахнова. – М.: Статистика, 1979, 184 с.
34. Эконометрическое моделирование. Серия: Проблемы построения и использования народнохозяйственных моделей. – Новосибирск: Наука,1979, 182 с.
35. Шаттелес Т. Современные эконометрические методы. – М.: Статистика, 1975, 240 с.
36. Браверман Э.М. Математические модели планирования и управления в экономических системах. - М.: Наука, 1972, 208 с.
37. Багриновский К.А. Модели и методы экономической кибернетики. – М.: Экономика, 1973, 206 с.

38. Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Введение в экономическую кибернетику. – М.: Экономика, 1975, 343 с.
39. Ланкастер К. Математическая экономика. – М.: Сов. Радио, 1972, 464 с.
40. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации (Задачи и методы стохастического программирования). – М.: Советское радио, 1974, 400 с.
41. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Советское радио, 1979, 392 с.
42. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976, 240 с.
43. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. – М.: Наука, 1979, 256 с.
44. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. – М.: Статистика, 1976, 231 с.
45. Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем. Сб. статей ВЦ АН СССР. – М.: ВЦ АН СССР, 1979, 105 с.
46. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: наука, 1981, 488 с.
47. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975, 528 с.
48. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971, 384 с.
49. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи. Принципы. Методология. – М.: Наука, 1980, 208 с.
50. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969, 120 с.
51. Арис Р. Дискретное динамическое программирование. – М.: Мир, 1969, 171 с.
52. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969, 384 с.
53. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М.: Наука, 1973, 256 с.
54. Кофман А. Методы и модели исследования операций. – М.: Мир, 1966, 523 с.
55. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980, 424 с.
56. Хохлюк В.И. Задачи целочисленной оптимизации. – Новосибирск: НГУ, 1979, 91 с.
57. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974, 519 с.
58. Современное состояние теории исследования операций. Под ред. Н.Н. Моисеева.- М.: Наука, 1979, 464 с.
59. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979, 496 с.
60. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976, 352 с.
61. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980, 576 с.
62. Кордонский Х.Б. Приложения теории вероятностей в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1963, 436 с.
63. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969, 572 с.
64. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Высшая школа, 1975, 320 с.
65. Невельсон М.Е., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972, 304 с.
66. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970, 656 с.
67. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1967, 496 с.
68. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979, 400 с.
69. Абезгауз Г.Г., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчетам. – М.: Воениздат, 1970, 536 с.
70. Стронгин. Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука, 1978, 240 с.
71. Мину М. Математическое программирование. – М.: Наука, 1990, 488 с.
72. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования. – М.: Наука, 1977, 368 с.
73. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1975, 272 с.
74. Снапелев Ю.М., Старосельский В.А. Моделирование и управление в сложных системах. – М.:Советское радио, 1974, 264 с.
75. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.:Наука, 1981, 340 с.
76. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976, 192 с.
77. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. – М.:Наука, 1975, 280 с.
78. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969, 384 с.
79. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969, 368 с.
80. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969, 368 с.
81. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. – М.: Физматгиз, 1958, 656 с.

Романов Борис Александрович

РЕЦЕНЗИЯ

Работа Романова Б.А. посвящена исследованию важной задачи управления функционированием и взаимодействием производственных единиц (предприятий) в ходе реализации совместного производственного проекта. Рассматривается некоторое ограниченное множество производственных предприятий, способных по своим технологическим возможностям выпускать заданную продукцию, множество предприятий, которые необходимо перепрофилировать для выпуска этой продукции, а также вновь создаваемых предприятий, если существующих недостаточно. Модель функционирования структуры строится по аналогии с моделью межотраслевого баланса (или модели «затрат - выпуска» Леонтьева). Приводится общая постановка многокритериальной динамической нелинейной стохастической оптимизационной задачи реализации проекта, она дополняется учетом неопределенности некоторых параметров, отражающей технические и экономические риски проекта. В общем виде решение такой задачи затруднительно, поэтому автор прибегает к многоуровневой ее декомпозиции с дополнительной декомпозицией еще и на отдельных уровнях. В конечном счете все декомпозированные задачи сводятся к линейным однокритериальным задачам, при этом общая задача решается методами последовательных приближений.

В целом данная работа представляет определенный научный интерес, а достигнутые в исследовании результаты по разработке приемлемого алгоритма определения оптимальных решений системы уравнений модели обладают признаками научной новизны и заслуживают положительного отношения.

Клейнер Б.Г., член-корр. РАН, профессор, зам. директора ЦЕМИ РАН