ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ

Царев И.Г., к.х.н., заместитель начальника отдела

Федеральное агентство по строительству и жилищно-коммунальному хозяйству (Росстрой)

В настоящей работе предложено использовать несколько моделей, описывающих колебание цены и объема выпуска товаров при помощи нелинейных дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям колебания нелинейных элементов механики и радиотехники. Сформулированы правила для построения экономических моделей. Вводится представление о цене товара как о комплексной величине. Под обратной связью в экономической системе предложено понимать «рефлексивность», т.е. взаимодействие, в котором как ситуация на рынке, так и взгляды его участников являются зависимыми переменными. Показано, что колебания цены на биржевом рынке и экономической системы в целом около равновесного значения возникают при мягкой потере устойчивости, а кризисные явления возникают как жесткое установление автоколебаний. Показана принципиальная невозможность долгосрочного прогнозирования рынка ввиду чувствительной зависимости от начальных условий. Предложены динамические модели программного, оптимального и адаптивного управления экономической системой.

ВВЕДЕНИЕ

В экономической науке существуют различные теории, претендующие на объяснение вида, размера и тенденций в колебаниях цен. Тот *факт*, что цены претерпевают значительные изменения, не только не подвергается сомнению, но и является основой существования фондового рынка. Однако *причина* этих колебаний была обойдена вниманием экономистов.

Классическое утверждение А. Маршалла заключается в следующем: «Когда спрос и предложение пребывают в равновесии, количество товара, производимого в единицу времени, можно назвать *равновесным количеством*, а цену, по которой он продается, *равновесной ценой*. Такое равновесие является *устойчивым*, т.е. цена при некотором отклонении от него будет стремиться к возвращению в прежнее положение подобно тому, как маятник колеблется в ту и другую сторону от своей низшей точки» [1, с. 28].

Причина этих постоянных колебаний подробно не рассматривается. Обычно экономисты считают достаточным объяснение, что колебания цены связаны со случайными актами обмена. Но ведь если эти колебания не затухают со временем в точке равновесия, значит, точка равновесия на самом деле не является устойчивой. В то же время колебательное движение происходит не произвольно, а вокруг этой самой неустойчивой равновесной точки, т.е. само движение – устойчиво. Понятие устойчивости хорошо известно в математике (см. [2] – [7]), но данный математический аппарат мало используется в экономической науке [8].

Математическую формализацию понятия состояния динамической (движущейся) системы дал А. Пуанкаре (1854-1912). Он был геометр по образу мышления и мыслил геометрически. Во всяком случае, так он сам говорил [9, 10].

Модель Пуанкаре исходит из представления множества возможных состояний системы в виде некоторого пространства состояний или фазового пространства, где в качестве переменных выступают не только координаты, но и скорости. Поэтому состояния динамических систем будут близкими, если близки не только их конфигурации, но и их скорости. Задание координат и скоростей полностью определяет движение системы, поэтому в отличие от привычного нам евклидового пространства из любой точки фазового пространства может выходить только одна траектория. Фазовые траектории никогда не пересекаются, так как в каждой точке состояние системы определено однозначно, и, следовательно, однозначно задано дальнейшее движение. Так что все фазовое пространство разбивается на непересекающиеся фазовые траектории.

Режимы движения динамической системы могут качественно отличаться. Так, например, математический маятник может совершать колебания, а может вращаться вокруг своей оси. Поэтому фазовое пространство разбивается на области качественно разных режимов движения (разной динамики), отвечающие траекториям разного топологического типа. Области разной динамики отделены друг от друга фазовыми траекториями, называемыми сепаратрисами (separate – разделять, отделять). Фазовое пространство, разбитое на области разной динамики дает фазовый портрет динамической системы.

Правило, по которому значения динамических переменных в любой последующий момент времени получаются из исходного набора, задает оператор эволюции системы.

Динамические модели экономики относятся к динамическим системам. Конкретные динамические системы могут быть как детерминированными, так и стохастическими. Фазовое пространство, на котором задана система, может быть не только непрерывным, но и дискретным. Оно может быть в одних своих частях непрерывным, в других – дискретным. В случае, когда фазовое пространство непрерывно, оно может быть конечной или бесконечной размерности. Оператор динамической системы может быть задан аналитическими или логическими формулами, он может быть задан дифференциальными уравнениями или некоторыми вычислительными алгоритмами.

Мы рассмотрим некоторые динамические модели, объясняющие различные экономические процессы и интерпретирующие различные экономические функции в качестве соответствующих членов дифференциальных уравнений.

Заранее сформулируем несколько правил для построения экономических моделей, справедливость которых будет показана ниже:

Во-первых, модель не должна быть слишком сложной. Если в модели содержится больше двух переменных, то она будет проявлять стохастический характер.

Во-вторых, для модели нужно выбрать правильный временной горизонт, т.к. существуют «быстрые» и «медленные» переменные, зависящие от времени.

В третьих, нужно определить параметры, которые являются ключевыми для изучаемых процессов, и которые изменяют свойства системы при прохождении через свои бифуркационные точки.

1. МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЯ ЦЕНЫ, АНАЛОГИЧНАЯ ОСЦИЛЛЯТОРУ

Если динамическую систему (например, вышеупомянутый маятник), обладающую состоянием *устойчивого равновесия*, вывести из этого состояния каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, то возникающие в системе колебания вблизи устойчивого равновесия называют *собственными или свободными*. Способную совершать собственные колебания систему называют *осциллятором*.

Применим известную модель гармонического осциллятора для объяснения рыночных явлений.

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0 . \qquad (1)$$

Любое экономическое событие должно происходить в неком пространстве. Значит, первым шагом в построении нашей модели должно быть определение пространства, на котором задана система. С пространством связывают некую систему отсчета координат (экономических переменных), позволяющих определить положение любой точки относительно начала координат (точки отсчета).

Представляется самым простым *определить в качестве координат экономического пространства количества благ (активов, товаров) нашей системы, выраженные в неких условных единицах.* Положение точки в пространстве задает соответствующие количества активов, существующие в системе в данный момент времени.

Если количества благ неизменны, то точка неподвижна (система покоится), однако это состояние неинтересно для анализа. Если количества благ начинают изменяться, то система приходит в движение. В этом случае мы должны учесть скорость и направление движения системы, вводя с этой целью дополнительные координаты, *количества благ (активов, товаров) нашей системы, которые производятся и потребляются в системе за определенный промежуток времени (единицу времени).* Тем самым мы вводим в качестве дополнительных координат производные от количества блага по времени, которые дают скорость изменения благ в системе.

«Движение» экономической системы будем понимать как изменение равновесной координаты q_0 на величину q.

Произведение цен на объем товара дает его стоимость, обозначим ее как Ф, которую участники рынка стремятся максимизировать. При отклонении экономической системы от равновесия на малую величину товара q, общая стоимость товара уменьшается, и возникает «сила рынка», возвращающая систему в точку равновесия. Если принять точку равновесия за начало координат, то при разложении в ряд Тейлора представление функции стоимости около этой точки имеет вид: $\Phi_q = \Phi_0 + \frac{cq^2}{2} + ...$, т.к. первая производная Φ в точке равновесия равна нулю, а представление силы имеет вид: $f_q = cq + ...$. Для малых отклонений от равновесия прочие члены можно не учитывать. Возвращающая «сила рынка» как раз и есть третий член уравнения (1). Если система отклонилась от равновесия, то при этом нарушается баланс спроса и предложения, и под действием «рыночных сил» $f_q = \omega^2 q$ возникает изменение баланса скорости производства и потребления товара для возврата системы к точке равновесия, т.е. возникает величина $\ddot{q}$ – ускорение экономической системы.

Второй член уравнения $\gamma\dot{q}$ выполняет роль обратной связи в экономической системе. Принцип обратной связи – это общий принцип действия любого регулятора. В случае когда $\gamma > 0$, в системе возникает сила, аналогичная силе трения в механической системе. Под трением, видимо, следует понимать транзакционные издержки. Вспомним определение Коуза: «Транзакционные издержки это издержки сбора и обработки информации, издержки проведения переговоров и принятия решений, издержки контроля и юридической защиты выполнения контракта» [23, с. 9]. Из перечисленных издержек не всегда поддаются учету издержки достоверности информации и принятых решений. Чем больше скорость производства товара $\dot{q}$, тем большее сопротивление среды испытывает производитель, при этом γ больше нуля.

Таким образом, за счет транзакционных издержек экономическая система имеет свойство «саморегуляции». Трение сглаживает возникающие в системе колебания и приводит систему к равновесию. В этом случае говорят, что система устойчива.

Ажиотажный спрос или паника дестабилизируют рынок и выводят его из равновесия, появляется «отрицательное трение» $\gamma < 0$. Возникающие в системе случайные колебания начинают усиливаться, и система все дальше и дальше уходит от положения равновесия.

В приведенной во Введении цитате Маршалл говорит как о колебаниях цены товара, так и о колебаниях объема производства. Цена товара p является функцией его количества q: $p = \varphi(q)$. Данная функция является кривой спроса на данный товар. Согласно Маршаллу [1, с. 308] $qp^n = C$. Очевидно, что колебания должны происходить вокруг точки равновесия (q_0, p_0), причем $p_0 = \varepsilon q_0^{-\xi}$, где $\xi = 1/n, \varepsilon = C^{\xi}$. Однако мы можем принять эту точку за начало координат и разложить функцию в ряд вблизи точки равновесия, тогда $p_0 + p = \varepsilon(q_0 + q)^{-\xi} = \varepsilon\left(q_0^{-\xi} - \xi q_0^{-\xi-1} q + ...\right)$. Для достаточно малых q мы можем ограничиться первыми двумя членами ряда. Значит $p = -\varepsilon\xi q_0^{-\xi-1} q$, и уравнение для цены товара совершенно аналогично предыдущему для объема товара

$$\ddot{p} + 2\gamma\dot{p} + \omega^2 p = 0 .$$

Следовательно, колебания относительных значений как цены, так и количества блага происходят по одному и тому же закону.

Мы можем записать уравнение в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 , \qquad (2)$$

где x означает как изменение цены, так и изменение количества блага в системе.

2. МЯГКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Чтобы в системе возникли *автоколебания*, т.е. собственные периодические незатухающие колебания, необходимо наличие *обратной связи*, которая придает системе способность управлять поступающей извне энергией. Форма, амплитуда и частота колебаний при этом задаются самой системой.

Следовательно, рассматривая теорию рынков, нам, кроме изучения существующего колебательного процесса, необходимо сделать некие предположения, которые смогли бы объяснить появление необходимых и достаточных условий для возникновения этих самых автоколебаний в экономической системе.

Смысл обратной связи в экономической системе, видимо, состоит в том, что участники рынка пытаются понять ситуацию, возникающую на рынке, и предпринять выгодные с их точки зрения действия. Это взаимодействие, в котором как ситуация, так и взгляды участников являются зависимыми переменными, называется, по терминологии Дж. Сороса, «рефлексивностью» [11, с. 51]. В качестве термина использовано слово, которое французы употребляют для обозначения глагола, субъект и объект которого совпадают.

Источником энергии в экономике, без сомнения, является труд.

Коэффициент затухания γ, определяющий величину транзакционных издержек, не является постоянным и зависит от ожиданий участников рынка. При стабильном рынке γ имеет положительное значение, при возникновении «неверных» представлений или ожиданий участников рынка может возникнуть ситуация «отрицательного трения». В то же время коэффициент γ должен изменяется «не очень сильно» или для «не очень больших» q, т.е. наша нелинейная система близка к линейной системе.

Запишем уравнение в виде:

$$\ddot{x} + 2\gamma\left[1 - \alpha f(x)\right]\dot{x} + \omega^2 x = 0\,. \qquad (3)$$

Параметр α играет роль коэффициента обратной связи, обеспечивающего «рефлексивность» рынка.

Перепишем систему в так называемой нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y; \\ \dot{y} = -\omega x + \dfrac{2\gamma}{\omega}\,[\alpha f(x) - 1]\dot{x}. \end{cases} \qquad (4)$$

Случаи, когда удается найти точные решения в явной аналитической форме, представляют, скорее, исключение из правил. Поэтому в теории колебаний разработан богатый арсенал приближенных или *асимптотических* методов. Перейдем к полярной системе координат $x = r\cos(\omega t + \theta)$, $y = -r\sin(\omega t + \theta)$, причем r и θ независимые переменные, медленно меняющиеся от времени t:

$$\begin{cases} \dot{r}\cos(\omega t + \theta) - r\dot{\theta}\sin(\omega t + \theta) = 0; \\ -\dot{r}\sin(\omega t + \theta) - r\dot{\theta}\cos(\omega t + \theta) = \\ = 2\gamma\,[\alpha f(x) - 1](-r\sin(\omega t + \theta). \end{cases}$$

Разрешив систему относительно $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r\gamma\,[\alpha f(x) - 1]\sin^2(\omega t + \theta); \\ \dot{\theta} = 2\gamma\,[\alpha f(x) - 1]\sin(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \theta). \end{cases} \qquad (5)$$

Так как формулы преобразования содержали явно время, то новая система уравнений неавтономна, хотя исходная система была автономной. *Усредним* правые части уравнений *по явно входящему времени* за период t = 2π, считая медленные r и θ константами:

$$\begin{cases} \dot{r} = 2\gamma \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} r[\alpha f(x) - 1]\sin^2(\omega t + \theta)dt = \Phi(r,\theta); \\ \dot{\theta} = 2\gamma \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [\alpha f(x) - 1]\sin(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \theta)dt = \Psi(r,\theta). \end{cases} \qquad (6)$$

Этот прием, когда исходные нелинейные дифференциальные уравнения заменяются также на нелинейные, однако более простые, носит название метода Ван-дер-Поля.

Если исследуемая фазовая траектория – неподвижная точка или предельный цикл (состояние равновесия), то усредненное за один период значение $\dot{r}$ очевидно равно нулю, так как радиус – вектор должен возвратиться в исходную точку. Значит, координаты этих состояний равновесия суть корни уравнения:

$$\Phi(r,\theta) = 0\,. \qquad (7)$$

Исходя из условия на экстремум, состояние равновесия $r = r_i$ будет устойчивым, если $\Phi'_r(r_i) < 0$, и неустойчивым, если $\Phi'(r_i) > 0$. Остальные движения будут либо асимптотически приближаться к ним, либо асимптотически удаляться от них при $t \to \infty$.

Теперь перейдем ко второму уравнению (6). Если $\Psi(r) \equiv 0$, то второе уравнение интегрируется сразу: $\dot{\theta} = 0, \theta = const = \theta_0$, и мы можем представить себе картину фазовых траекторий. Все интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало координат под углом θ_0. Движение вдоль каждой из этих прямых определяется уравнением $\dot{r} = \Phi(r,\theta)$. Если мы вспомним теперь про собственную частоту вращения ω, то каждая из этих прямых будет вращаться. Корни уравнения r_i дадут круговые предельные циклы, а прочие точки прямой образуют траектории движения, асимптотически приближающиеся к состояниям равновесия или асимптотически удаляющиеся от них.

Перейдем теперь к случаю, когда второе уравнение не тождественно нулю. Пусть уравнение $\Psi(r,\theta) = 0$ имеет несколько корней r_j, которые не совпадают с состояниями равновесия r_i. Тогда движение изображающей точки по какому-нибудь предельному циклу подчиняется уравнениям:

$$r_i = const,\ \ \theta = \mu\Psi(r_i) + \theta_0\,.$$

Устойчивость или неустойчивость рассматриваемого предельного цикла определяется устойчивостью или неустойчивостью соответствующего состояния равновесия, а направление вращения – знаком Ψ.

Выберем $f(x) = 1 + \beta x - x^2$. Постоянный член характеризует «отрицательное трение», квадратичный ограничивает действие постоянного члена «не очень большими» значениями x, третий член является произвольным. Два коэффициента из трех выбраны равными единице для упрощения выкладок. Этого результата всегда можно добиться заменой переменной x на x/x_0, т.е выбором «правильного» масштаба измерений.

$$\dot{r} = \frac{\gamma r}{\pi}\int_0^{2\pi}[\alpha - 1 + \alpha\beta r\cos(\omega t + \theta) - \\ -\alpha r^2\cos^2(\omega t + \theta)]\sin^2(\omega t + \theta)dt$$

Получаем:

$$\dot{r} = \gamma r\left[\alpha - 1 - \frac{\alpha}{4}r^2\right].$$

Для Ψ:

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}[\alpha - 1 + \alpha\beta r\cos(\omega t + \theta) - \\ -\alpha r^2\cos^2(\omega t + \theta)]\sin(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \theta)dt\,.$$

Получаем $\dot{\theta} = 0$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{r} = \gamma r\left[\alpha - 1 - \dfrac{\alpha}{4}r^2\right]; \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство, выражение для f содержало член βx, который, однако, совершенно не входит в общее решение. Это обстоятельство весьма общее для любых нечетных членов. Если мы аппроксимируем $f(x)$ в виде любого многочлена, нечетные члены не оказывают никакого влияния.

Мы всегда можем подобрать безразмерный r таким образом, чтобы записать:

$$\dot{r} = \varepsilon r - r^3\,. \qquad (9)$$

При отрицательных $\varepsilon(\alpha < 1)$ устойчивым положением системы всегда является начало координат. Если $\varepsilon > 0$, уравнение при положительных r имеет два положения равновесия: $r_{1,2} = 0; \sqrt{\varepsilon}$. Первое положение равновесия неустойчиво. При любом малом возмущении r , скорость изменения $\dot{r}$ становится положительной, и r растет, пока не достигнет второй точки равновесия $\sqrt{\varepsilon}$, которая устойчива. При дальнейшем увеличении r , $\dot{r}$ становится отрицательной, и система стремится вернуться в эту точку. Мы имеем неустойчивое положение равновесия в начале координат и устойчивый предельный цикл радиуса $\sqrt{\varepsilon}$.

Остальные траектории разбиваются на два класса: на траектории, наматывающиеся снаружи на предельный цикл, и на траектории, наматывающиеся изнутри на предельный цикл (рис. 1, а, б). После потери устойчивости равновесия *установившимся режимом* оказывается *колебательный периодический режим* вблизи положения равновесия.

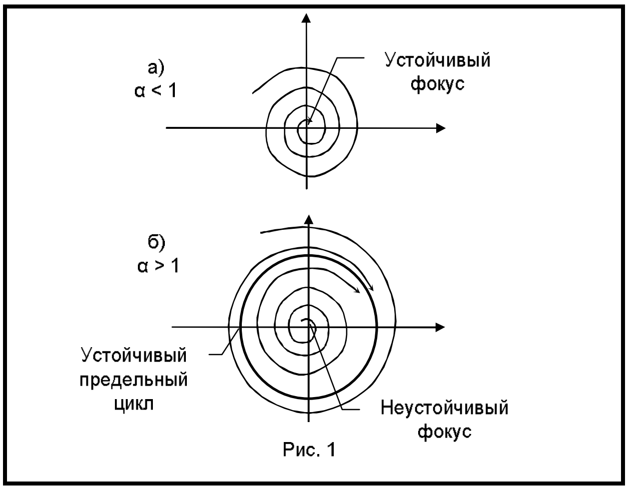


Рис. 1. Траектории, наматывающиеся снаружи на предельный цикл, и траектории, наматывающиеся изнутри на предельный цикл

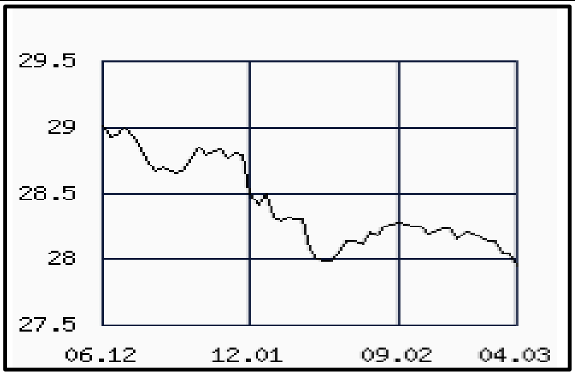
Говорят, что произошла *мягкая* потеря устойчивости, так как устанавливающийся колебательный режим при малой закритичности (отличии параметра от критического значения) мало отличается от состояния равновесия.

Если, начиная с некоторого значения параметра $\alpha > 1$, мы будем его непрерывно уменьшать (уменьшать «рефлексивность»), то радиус предельного цикла будет также непрерывно уменьшаться, стремясь к нулю при $\alpha \to 1$. При $\alpha = 1$ предельный цикл исчезнет, сольется с неустойчивым фокусом, передав фокусу свою устойчивость; мы видим, что $\alpha = 1$ является бифуркационным значением параметра α .

Таким образом, при малой рефлексивности рынка $(0 < \alpha < 1)$ мы имеем стабильную равновесную цену товара, однако с ростом рефлексивности возникают автоколебания цены, амплитуда которых, начиная с нуля, будет непрерывно увеличиваться.

В качестве примера можно привести изменение курса американского доллара к рублю за три месяца (рис. 2).

Рассмотренная модель объясняет возникновение синусоидальных колебаний небольшой амплитуды вблизи равновесной цены для любого блага. Подобные колебания не связаны с какими-то событиями на рынке и возникают исключительно благодаря психологическим особенностям поведения. Люди считают, что цена обязательно должна измениться, и она действительно меняется. Но когда отклонение достигает определенной величины, большинство участников рынка начинает считать, что цена должна вернуться к исходному значению, и цена изменяется в противоположную сторону.



Изменение за две недели		
04.03.06	27,9305	−0,0974
03.03.06	28,0279	+0,0034
02.03.06	28,0245	−0,0966
01.03.06	28,1211	−0,0012
28.02.06	28,1223	−0,0327
27.02.06	28,1550	−0,0277
23.02.06	28,1827	−0,0081
22.02.06	28,1908	+0,0457
21.02.06	28,1451	−0,0731

Рис. 2. Курс USD ЦБ РФ [http://www.yandex.ru/]

В целом мягкая потеря устойчивости приводит к колебаниям, амплитуда которых составляет около 3% от средней цены товара. На рис. 3-5 представлены изменения курса USD ЦБ РФ в течение года, а также изменения цены фьючерсных контрактов на нефть и золото за аналогичный период [www.quote.ru]. Мы видим, что амплитуда колебаний за маленькие промежутки времени укладывается в указанные рамки во всех случаях.

Согласно гипотезе фрактального рынка (fractal market hypothesis) [22] на небольшом промежутке времени (локально) траектории цен финансовых активов ведут случайно, а на промежутке времени в несколько месяцев или лет траектории ведут себя неслучайным образом.

Модель мягкой потери устойчивости объясняет возникновение именно локальных колебаний небольшой амплитуды.

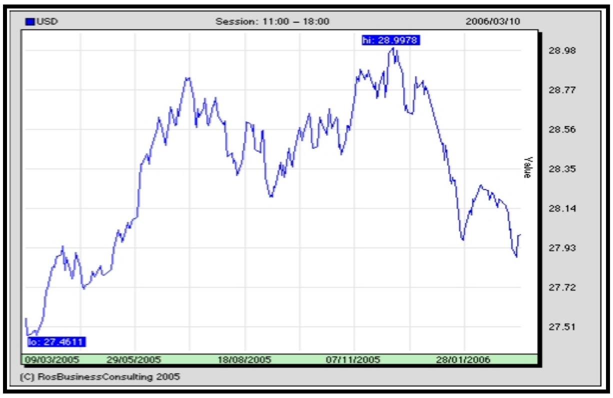


Рис. 3. Курс USD ЦБ РФ

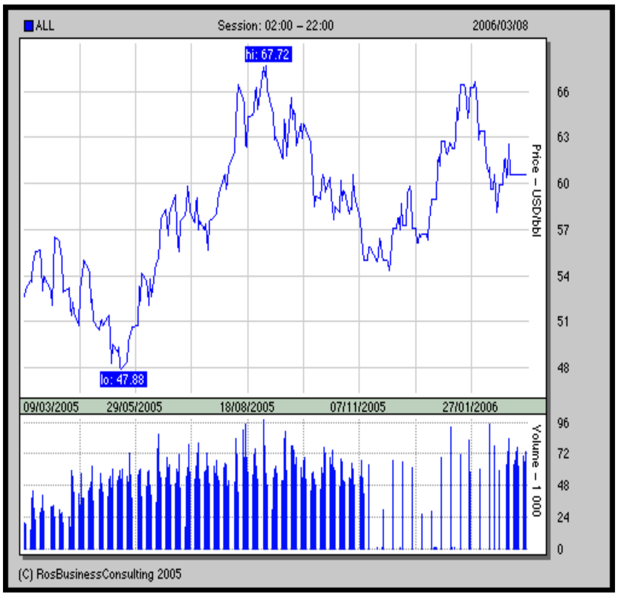


Рис. 4. Цена по сделкам с нефтяными фьючерсами Brent

На синусоидальные колебания могут накладываться разрывные колебания, модель возникновения которых будет рассмотрена в разделе 5, а также различные тренды. Кроме того возможна жесткая потеря устойчивости, рассмотренная в разделе 4, и характерная для кризисных явлений.

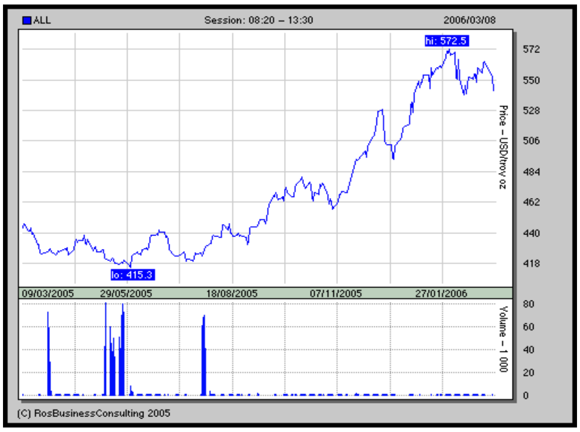


Рис. 5. Цена по фьючерсным сделкам на золото

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ЦЕНЕ КАК О КОМПЛЕКСНОЙ ВЕЛИЧИНЕ

В предыдущем параграфе мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r - r^3; \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases} \qquad (10)$$

Мы можем для удобства рассматривать не вещественную, а комплексную плоскость, что упрощает запись, не меняя результат. Одно комплексное уравнение – это два вещественных, так же как одно комплексное число – два вещественных. Переменная $w = f(z)$ называется функцией комплексного числа z, если каждому значению z отвечает определенное значение $f(z)$. Так как $z = x + iy$, где x – вещественная часть, y – мнимая часть, то задание z означает задание двух вещественных чисел x и y. При этом $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $u(x,y)$ и $iv(x,y)$ – вещественные функции.

Переходя к комплексному уравнению, получаем:

$$\dot{w} = (i\omega + \alpha)w - w|w|^2, \qquad (11)$$

где $w = \dot{r}e^{i\varphi}$.

Данное уравнение эквивалентно представленной выше системе, что проверяется непосредственно:

$$\dot{w} = \dot{r}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}re^{i\varphi} = (i\omega + \alpha)re^{i\varphi} - r^3e^{i\varphi} =$$
$$= (\alpha r - r^3)e^{i\varphi} + i\omega re^{i\varphi}.$$

Такое представление колебаний осциллятора на комплексной плоскости очень удобно и дает нам право рассматривать цену как комплексную величину: $w = \dot{r}e^{i\varphi}$.

Может показаться странным, что наши переменные величины, которыми мы собираемся обозначать цены товаров, принимают мнимые значения. Однако ближайшее рассмотрение марксистской трактовки цены показывает, что: «*Цена*, или денежная форма товаров, как и вообще их стоимостная форма, есть нечто, отличное от их чувственно воспринимаемой вещественной формы, следовательно, – *форма лишь идеальная, существующая лишь в представлении*» [12, с. 105]. «Следовательно, возможность количественного несовпадения цены с величиной стоимости … заключена уже в самой форме цены.

Но форма цены не только допускает возможность количественного несовпадения величины стоимости с ценой, т.е. величины стоимости с ее собственным денежным выражением, – она может скрывать в себе качественное противоречие, вследствие чего цена вообще перестает быть выражением стоимости, хотя деньги представляют собой лишь форму стоимости товаров. Вещи, которые сами по себе не являются товарами, например совесть, честь и т.д., могут стать для своих владельцев предметом продажи и, таким образом… приобрести товарную форму. Следовательно, вещь формально может иметь цену, не имея стоимости. *Выражение цены является здесь мнимым, как известные величины в математике*. С другой стороны, мнимая форма цены – например цена не подвергавшейся обработке земли, которая не имеет стоимости, так как в ней не овеществлен человеческий труд, – может скрывать в себе действительное стоимостное отношение или отношение, производное от него» [12, с. 112]. «В выражении стоимость труда понятие стоимости не только совершенно исчезает, но и превращается в свою противоположность. Это такое же мнимое выражение, как, например, стоимость земли. Но такие мнимые выражения возникают из самих производственных отношений» [12, с. 547].

Мы могли бы предположить, что величина стоимости товара дает нам модуль комплексного значения цены r, а неверные представления людей о величине этой стоимости определяют аргумент ее комплексного значения φ. Тем самым *модуль цены или стоимость товара* r не совпадает с *действительной частью цены* x, т.е. с денежным выражением этой стоимости, так как $x = r\cos\varphi$.

Цена товара также может быть больше его действительной стоимости, в этом случае $\cos\varphi > 1$, и сами представления людей φ являются комплексной величиной. Так как $\varphi = \omega t$, следовательно, представления людей периодически повторяются во времени, что также соответствует действительности.

4. ЖЕСТКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Возьмем более точное аппроксимирующее выражение для $f(x)$.

Предположим, что

$$f(x) = 1 + \beta_1 x + \beta x^2 + \beta_3 x^3 - x^4. \qquad (12)$$

Тогда

$$\dot{r} = \mu\Phi(r), \dot{\theta} = 0,$$

где

$$\Phi(r) = \alpha\gamma r\left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{\beta r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\right]. \qquad (13)$$

Радиусы предельных циклов даются уравнением:

$$\Phi(r) = 0.$$

Уравнение всегда имеет корень $r_0 = 0$. При $\beta < 0$ ситуация аналогична рассмотренной в предыдущем примере, т.е. при $\alpha < 1$ уравнение не имеет положительных корней, а при $\alpha > 1$ имеет единственный положительный корень (мягкий режим). Если $\beta > 0$, то мы имеем более интересный случай. При $\alpha < \alpha_0 = \dfrac{1}{1 + \beta^2/8}$ уравнение не имеет положительных корней, при $\alpha > 1$ имеет единственный положительный корень (мягкий режим) и, наконец, при $\alpha_0 < \alpha < 1$ имеет два положительных корня, из которых устойчивым является больший.

Таким образом, при $\alpha_0 < \alpha < 1$ (рис. 6) устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл разделены неустойчивым предельным циклом.

Рис.6. Устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл

Поэтому траектории, начинающиеся внутри неустойчивого предельного цикла, будут идти к состоянию равновесия и только траектории, которые начинаются *вне* неустойчивого предельного цикла, будут наматываться на устойчивый предельный цикл.

Неустойчивый предельный цикл не соответствует, конечно, автоколебательным процессам. Он является границей, разделяющей «области притяжения» (аттракторы) устойчивого автоколебательного режима и устойчивого состояния равновесия. При достаточно сильном «толчке» в системе сразу возникают автоколебания с ненулевой амплитудой. Наблюдается *жесткое установление* автоколебаний. При этом *система уходит со стационарного режима скачком и перескакивает на иной режим движения*. В общем случае этот режим может быть другим устойчивым стационарным режимом, или устойчивыми колебаниями или более сложным движением.

На рис. 7 изображена плоскость параметров α, β, разбитая на области различных режимов.

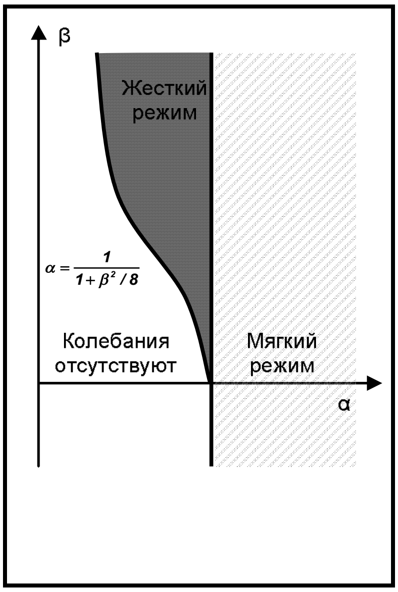


Рис. 7. Плоскость параметров α, β, разбитая на области различных режимов.

При убывании параметра α изображающая точка будет находиться на устойчивом предельном цикле до тех пор, пока α не станет равным α_0. При переходе α через это бифуркационное значение устойчивый предельный цикл, слившись с неустойчивым предельным циклом, пропадает, автоколебания срываются.

По-видимому, жесткая потеря устойчивости соответствует скачкам цен, которые возникают в кризисных ситуациях, подобных общеизвестным обвалам рынка в последние несколько лет. Например, правительство принимает решение о дефолте, участники рынка пытаются понять возможные последствия и предпринять выгодные с их точки зрения действия. В результате скачком возникают колебания цены, например доллара к рублю, большой амплитуды, которые мы могли наблюдать после знаменитого выступления Сергея Кириенко в августе 1998 года (рис. 8).

Заметим, что во всех примерах поведение системы качественно изменялось при переходе параметра α

через бифуркационное значение. Подобные качественные изменения являются предметом рассмотрения теории катастроф.

Катастрофой называется скачкообразное изменение (качественная трансформация), возникающее в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий.

Кроме описанных двух способов потери устойчивости положение равновесия может «умирать», слившись с другим при подходе параметра к критическому значению (или же «из воздуха» рождается пара положений равновесия). Из двух рождающихся (или умирающих) вместе положений равновесия одно устойчиво, другое неустойчиво [4, с.20].

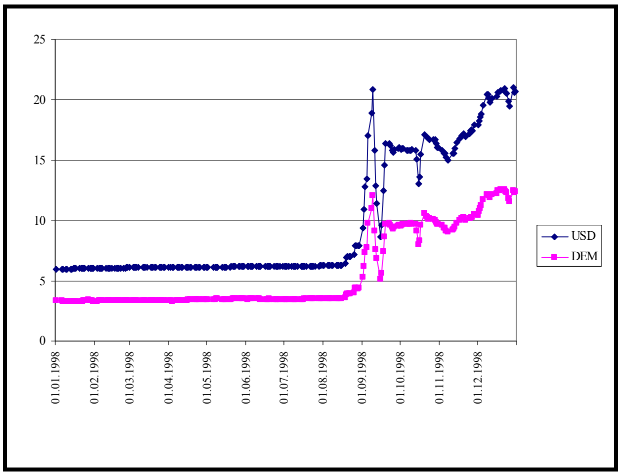


Рис. 8. Курс USD, DEM ЦБ РФ за 1998 год

5. НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ БИРЖЕВОЙ ЦЕНЫ БЛАГА

Предположим, что на некое благо x возник повышенный спрос на рынке. Завышенная по сравнению со стоимостью цена на благо приводит к активизации процесса производства и постепенному росту предложения, что ведет к постепенному снижению цены. В определенный момент, когда предложение достаточно превышает спрос, происходит резкое падение цены, которое вызывает сворачивание процесса производства и постепенное увеличение спроса, что в свою очередь ведет к постепенному росту цены. Наступает момент, когда спрос настолько превышает предложение, что цена скачком повышается до прежней величины. Далее повторяется периодический процесс, т.е. возникают автоколебания.

Скачок переменной называется быстрым движением. Переменная x за время скачка изменяется лишь на малую величину, поэтому ее можно считать неизменной. Напротив, движения изображающей точки, для которых скорости переменных остаются ограниченными в течение конечных промежутков времени, называют «медленными» движениями. Совокупность данных видов движения называется разрывными колебаниями.

Самое простое предположение заключается в том что скорость изменения количества блага на рынке *во время медленных движений* пропорциональна как его количеству, так и цене на него:

$$\dot{x} = f(x,p) = \alpha p - \beta x\,. \qquad (14)$$

Участники рынка стремятся максимизировать функцию $\varepsilon = px$ – которая представляет собой суммарную стоимость блага на рынке. Мы можем записать функцию: $p = \varphi(x) = \dfrac{\varepsilon}{x}$. Все медленные движения происходят вдоль кривой, которая задается этой функцией.

Для точек, не принадлежащих кривой $g(x,p) = \varphi(x) - p = 0$, имеем подсистему быстрых движений:

$$\delta\dot{p} = g(x,p) = \frac{\varepsilon}{x} - p\,, \qquad (15)$$

где $0 < \delta << 1$,

$x = \cos t$.

Таким образом, при известной идеализации нам нужно решить *два* уравнения, причем одно сменяет другое, когда меняется знак $\dot{x}$. В этом заключается нелинейность системы, обусловленная присутствием в ней нелинейной зависимости p от x, имеющей гистерезисный характер, которая вызвана наличием определенных ожиданий у покупателей и продавцов того, как будет развиваться ситуация на рынке. Сами уравнения являются линейными.

Таким образом, мы имеем систему из двух уравнения первого порядка, что соответствует одному уравнению второго порядка. График движения системы состоит из прямолинейных и криволинейных отрезков (рис. 9).

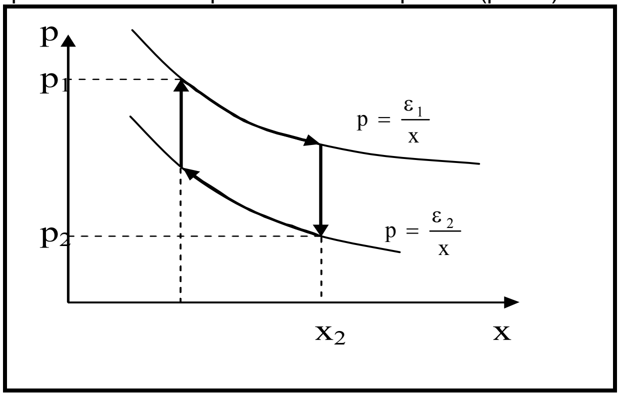


Рис.9. График движения системы

Начнем рассмотрение с того момента, когда на рынке возникает спрос на благо и устанавливается некоторая цена p_1. Будем считать, что на этом участке мы имеем функцию $p = \dfrac{\varepsilon_1}{x}$. Тогда, подставив выражение для p в уравнение движения $\dot{x} = \alpha p - \beta x$, мы имеем:

$$\dot{x} = \frac{E_1\beta}{x} - \beta x\,, \qquad (16)$$

где $E_1 = \dfrac{\alpha\varepsilon_1}{\beta}$.

Решением уравнения при начальных условиях $t = 0$, $x = x_1$ будет

$$x = \left(E_1 - \left(E_1 - x_1^2\right)\exp(-2\beta t)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

Очевидно, что E_1 – это то максимальное количество товара, которое теоретически может быть на рынке при $t \to \infty$ Однако реально максимального насыщения рынка никогда не достигается, и при x_2 происходит срыв значения цены до величины p_2. Промежуток времени для первого участка определяется соотношением:

$$x_2 = \left(E_1 - (E_1 - x_1^2)\exp(-2\beta\tau_1)\right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\tau_1 = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{E_1 - x_1^2}{E_1 - x_2^2}. \qquad (18)$$

После срыва значения цены мы имеем функцию $p = \frac{\varepsilon_2}{x}$ и получаем уравнение движения $\dot{x} = \frac{E_2\beta}{x} - \beta x$, где $E_2 = \frac{\alpha\varepsilon_2}{\beta}$. При начальных условиях $t = 0$, $x = x_2$ получим

$$x = \left(E_2 + \left(x_2^2 - E_2\right)\exp(-2\beta t)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (19)$$

E_2 – это то минимальное количество блага, которое теоретически может быть на рынке при $t \to \infty$. Однако это состояние также никогда не достигается, и при достижении x_1 происходит резкий скачок значения цены до p_1.

Подставляя $x = x_1$ при $t = \tau_2$, получим:

$$\tau_2 = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{x_2^2 - E_2}{x_1^2 - E_2}. \qquad (20)$$

Период автоколебаний равен:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2.$$

На рис. 10 изображен вид колебаний p и x.

Колебания состоят из кусков экспонент и по форме весьма отличны от синусоидальных. Период колебаний обратно пропорционален коэффициенту β и зависит более сложным образом от остальных параметров. Вид реальных колебаний цены на рынках также мало похож на синусоидальные и часто имеет пики и понижения скорее прямоугольной формы.

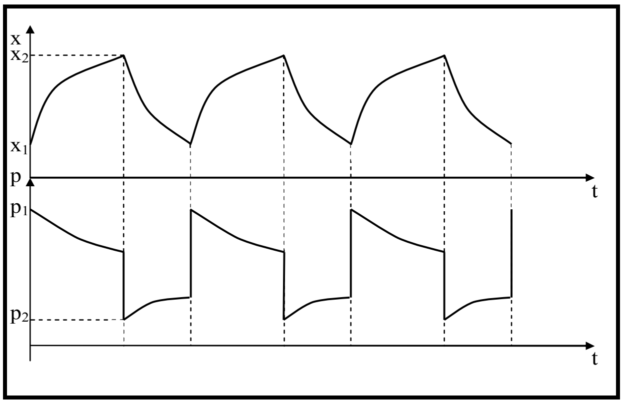


Рис.10. Вид колебаний p и x

Применим полученные результаты для объяснения некоторых процессов на фондовом рынке. Одна из трех теоретических посылок так называемого технического анализа при изучении состояния фондового рынка состоит в том, что прошлые состояния рынка периодически повторяются. В связи с этим задача инвестора состоит в том, чтобы на основе изучения прошлой динамики рынка определить, какой она будет в следующий момент. Циклическое повторение состояния системы говорит об устойчивых колебаниях около некого равновесного состояния.

Приведем несколько терминов, которые применяются при анализе фондового рынка:

Линия сопротивления – это линия, выше которой цена акции не должна подняться. Если цена акции преодолевает линию сопротивления, то это служит сигналом для покупки, поскольку она перешагнула психологический барьер инвесторов.

Линия поддержки – это линия, ниже которой цена акции не должна опуститься. Если курсовая стоимость бумаги падает ниже данного уровня, считается, что она будет падать и дальше, поскольку преодолен психологический рубеж восприятия ситуации инвесторами.

Линии поддержки или сопротивления могут быть направлены как вверх, так и вниз в соответствии с существующим трендом. Об изменении ценового тренда говорит диаграмма, которую называют «голова и плечи». Если цена бумаги опускается ниже линии шеи, это сигнал о смене тренда на противоположный.

Как мы видим, график $p(t)$ предложенной нами модели содержит эти характерные черты фондового рынка. Мы можем интерпретировать значение p_1 как линию сопротивления и p_2 – как линию поддержки соответственно. Значения ε_1 и ε_2 вычисляются из соответствующих объемов продаж. Хотя надо учитывать, что фактический товарооборот может составлять менее 1% от общего объема международной торговли, так как контракты многократно переходят из рук в руки в ходе биржевых торгов.

Аналогичные несинусоидальные колебания характерны не только для фондовых, но и для сырьевых рынков.

В качестве примера рассмотрим динамику цены на нефть марки Brent на IPE (Лондонской нефтяной бирже) с 05.01.2006 по 05.03.2006 которая представлена на рис. 11 [www.quote.ru]. Как мы видим, колебания весьма отличны от синусоидальных и зависят от различных событий.

За последнюю неделю февраля нефть в среднем подорожала на 1,20 долл., а цены достигли рекордного уровня с начала февраля 2006 г. Неопределенность решения предстоящего 8 марта совещания министров нефти ОПЕК в Вене формировала пониженный интерес к покупкам.

В центре внимания участников рынка находилсоь совещание МАГАТЭ в Вене по вопросу продолжения Ираном собственных ядерных разработок. Однако ожидать скорого введения ООН экономических санкций против Тегерана и рассчитывать на сокращение поставок нефти из Ирана пока еще рано.

Технически ценовые изменения нефтяных котировок 6 марта возможны в диапазоне:

- Light, Sweet Crude Oil (бессернистая нефть).
  - уровни сопротивления - 64,80-65,05 долл./барр.;
  - уровни поддержки - 62,70-61,80 долл./барр.;
- IPE Brent Crude.
  - уровни сопротивления - 64,35-64,64 долл./барр.;
  - уровни поддержки - 63,57-62,55 долл./барр.
- Объем ежедневных продаж составляет 70-74 млн. баррелей.

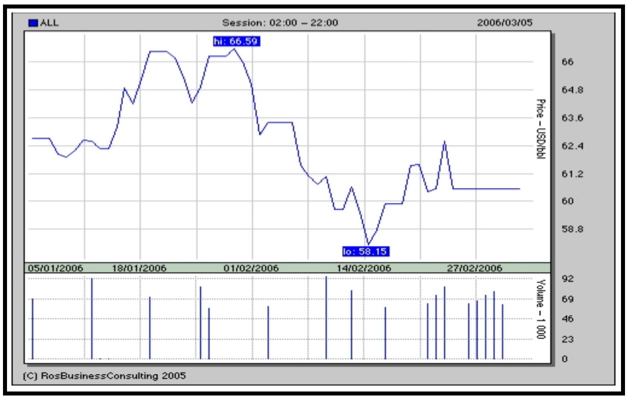


Рис. 11. Динамика цены на нефть марки Brent на IPE

6. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ВИДОВ БЛАГ

В качестве еще одного примера динамической системы рассмотрим экономическую модель, аналогичную известной биологической модели Вольтера, которую он построил для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море [13].

Мы можем разделить все блага, производимые в некой хозяйственной системе, на два больших класса: блага, используемые для производства других благ, в том числе и для самовоспроизводства (производственное потребление) и блага, используемые для конечного потребления (индивидуальное потребление непосредственно людьми). Причем совершенно неважно, используется ли любое данное благо для одной цели или сразу для двух. Оба вида блага производятся при помощи известных факторов производства (труд, капитал и природные ресурсы), которые, мы предположим, имеются всегда в достаточном количестве. Количество единиц каждого блага есть, конечно, целое число, но чтобы применить методы дифференциального исчисления, мы будем рассматривать их как непрерывные функции времени. Обозначим количество условных единиц первого блага через x, второго – через y.

Если бы первое благо производилось в отсутствии индивидуального потребления, то его количество непрерывно увеличивалось бы, причем скорость увеличения мы предположим пропорционально уже имеющемуся количеству. В этом случае мы можем записать

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x . \qquad (21)$$

Коэффициент увеличения ε_1 зависит от производства и производственного потребления.

Если бы второе благо только индивидуально потреблялось, не производилось и не участвовало в производственном потреблении, то его количество постепенно уменьшалось бы. Предположим, что

$$\dot{y} = -\varepsilon_2 y . \qquad (22)$$

В общей хозяйственной системе мы сделаем простейшее предположение, что коэффициент увеличения ε_1 уменьшится за счет индивидуального потребления на величину, пропорциональную y. Аналогичным образом предположим, что коэффициент уменьшения ε_2 в результате производства (учитывается как производство, так и производственное потребление) увеличится на величину, пропорциональную x.

Из этих соображений запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\varepsilon_1 - \xi_1 y); \\ \dot{y} = -y(\varepsilon_2 - \xi_2 x). \end{cases} \qquad (23)$$

Причем все коэффициенты больше нуля и обе переменных всегда больше нуля. Таким образом, фазовые траектории на фазовой плоскости (x, y) лежат в правом верхнем (первом) квадранте.

Умножая первое уравнение на ξ_2, второе – на ξ_1 и складывая, получим:

$$\xi_2\dot{x} + \xi_1\dot{y} = \varepsilon_1\xi_2 x - \varepsilon_2\xi_1 y . \qquad (24)$$

Умножая же первое на $\dfrac{\varepsilon_2}{x}$ и второе на $\dfrac{\varepsilon_1}{y}$ и складывая, имеем:

$$\varepsilon_2\frac{\dot{x}}{x} + \varepsilon_1\frac{\dot{y}}{y} = -\varepsilon_2\xi_1 y + \varepsilon_1\xi_2 x . \qquad (25)$$

Следовательно,

$$\varepsilon_1\frac{d(\ln y)}{dt} + \varepsilon_2\frac{d(\ln x)}{dt} - \xi_2\dot{x} - \xi_1\dot{y} = 0 . \qquad (26)$$

Откуда

$$\xi_2 x + \xi_1 y - \varepsilon_2 \ln x - \varepsilon_1 \ln y = const . \qquad (27)$$

Этот интеграл мы можем записать в виде:

$$\frac{\exp\xi_2 x}{x^{\varepsilon_2}}\frac{\exp\xi_1 y}{y^{\varepsilon_1}} = const . \qquad (28)$$

Положениями равновесия системы будут точка $x = 0$, $y = 0$, что неинтересно, и более интересная точка $x_0 = \dfrac{\varepsilon_2}{\xi_2}, y_0 = \dfrac{\varepsilon_1}{\xi_1}$.

Если координата y изображающей точки меньше y_0, то координата x всегда растет, если больше – всегда убывает. В свою очередь, если координата x изображающей точки меньше x_0, то, как следует из нижнего уравнения, координата y всегда убывает, если больше – всегда растет. Таким образом, изображающая точка на плоскости (x, y) движется против часовой стрелки вокруг точки равновесия (x_0, y_0) и пробегает замкнутую траекторию. А это означает, что решения являются функциями, периодическими во времени. Интегральные кривые все замкнуты, кроме одной, соответствующей координатным осям (рис. 12).

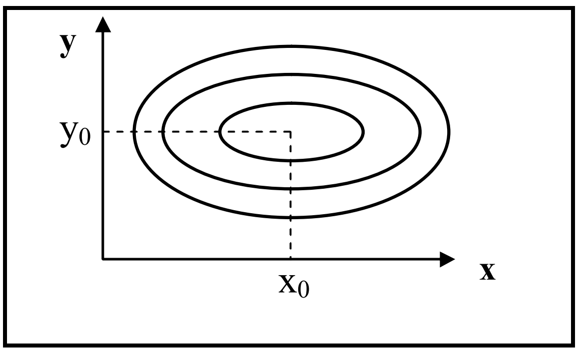


Рис. 12. Интегральные кривые

При этом максимум x не попадает на максимум y, т.е. колебания происходят в разных фазах. Итак, мы видим, что в исследуемом случае изменение количества товаров происходит по периодическому закону.

На рис. 13 приведены зависимости x и y от времени.

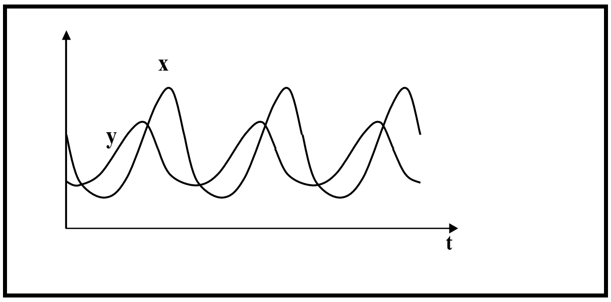


Рис.13. Зависимости x и y от времени

7. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Расходуя фиксированный бюджет

$$M = \sum_i p_i q_i \ . \tag{29}$$

где

p_i – отраслевые цены;

q_i – количества приобретенных благ;

потребитель стремится получить максимум полезности от совокупности приобретенных благ. Если мы рассмотрим совокупность всех бюджетов потребителей, то они дадут нам стоимость совокупности всех активов, принадлежащих экономическим субъектам, т.е. богатство Φ.

Субъекты рынка стремятся максимизировать эту функцию, покупая и продавая наличные активы и создавая тем самым определенный портфель инвестиций.

Необходимым условием экстремальности функции является обращение в нуль совокупности членов ее дифференциала

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \sum_i q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i p_i \delta q_i = \\ &= \sum_i \left(q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} + p_i \right)\delta q_i = 0\end{aligned} \ . \tag{30}$$

Дифференциал должен быть равен нулю при произвольных и независимых значениях δq_i. Это возможно только в том случае если выражение в скобках тождественно обращается в нуль для всех i.

Получаем:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_i} = -\frac{p_i}{q_i} \ . \tag{31}$$

Уравнения такого типа физики называют автомодельными, так как зависимость цены от количества актива всегда одинакова и отличается только масштабами измерений, т.е. существует масштабная инвариантность измерений. Поэтому решение такого дифференциального уравнения не зависит от начальных условий и имеет вид:

$$p_i q_i = const \ . \tag{32}$$

Между прочим, мы получили функцию спроса, предложенную Маршаллом. Однако такое решение имеет для нас смысл только в окрестности максимума функции Φ, которая должна быть выпуклой, а не постоянной. Попробуем искать решение в виде:

$$p_i = A exp(\lambda q_i) \ . \tag{33}$$

Для точки максимума q_i^0 получаем:

$$\lambda exp(\lambda q_i^0) e^{\lambda x_i^0} = -exp(\lambda q_i^0)/q_i^0 \ , \tag{34}$$

откуда: $\lambda = -1/q_i^0$.

В окрестности точки максимума функция цены и функция богатства имеют следующий вид:

$$p_i = A_i exp(-q_i/q_i^0) \ ,$$

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i A_i q_i exp(-q_i/q_i^0) \ , \tag{35}$$

где A_i – константа интегрирования.

Вид этих функций представлен на рис. 14, 15.

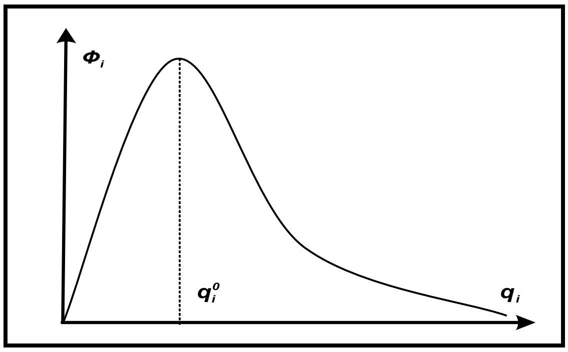


Рис.14. Функция богатства

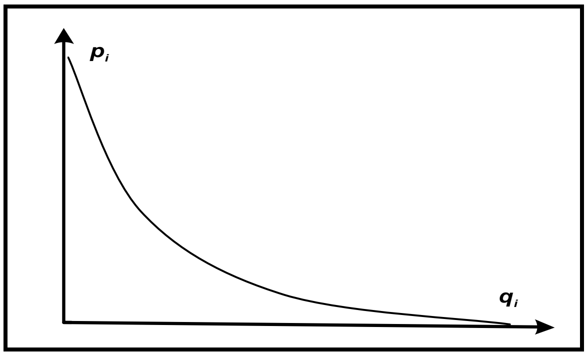


Рис.15. Зависимость цены от количества блага.

Эластичность актива определяется по формуле

$$\varepsilon_i = -\frac{dq_i}{dp_i}\frac{p_i}{q_i} = \frac{q_i^0}{q_i} \ . \tag{36}$$

В зависимости от того, насколько наличное количество актива отличается от оптимального, настолько его эластичность отличается от единичной. Если $q_i < q_i^0$, то экономическая система находится в зоне с высокой эластичностью, характерной, например, для предметов роскоши. Если $q_i > q_i^0$, то экономическая система находится в зоне с низкой эластичностью, как, например, для основных продуктов питания. Для активов с эластичностью, близкой к единице, система находится в зоне максимума Φ_i для данного актива.

Представив функцию Φ через цены активов, получим:

$$\Phi = -\sum_i p_i q_i^0 \ln \frac{p_i}{A_i} . \qquad (37)$$

Рассмотрим движение экономической системы, если функция богатства экономической системы не находится в точке максимума. Однако подобное рассмотрение неудобно проводить в n – мерном пространстве. Поделим все активы на две большие группы, на которые их подразделяют как блага: на потребительские блага в количестве x, удовлетворяющие потребности людей непосредственно, и блага производственного характера в количестве y, удовлетворяющие потребности людей опосредовано.

Будем считать что величина богатства медленно меняется со временем по сравнению со скоростью изменения цен и количеств благ, и мы можем считать ее постоянной.

Тогда получаем:

$$xA_x e^{-x/x_0} + yA_y e^{-y/y_0} = const . \qquad (38)$$

Продифференцируем наше уравнение по x:

$$\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) A_x e^{-x/x_0} + \left(1 - \frac{y}{y_0}\right) A_y e^{-y/y_0} \frac{dy}{dx} = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y_0}{x_0}\frac{A_x}{A_y}\frac{x_0 - x}{y_0 - y}\frac{e^{-x/x_0}}{e^{-y/y_0}} . \qquad (39)$$

Величина $\frac{y_0}{x_0}\frac{A_x}{A_y}$ зависит от выбора единиц измерения, и мы можем для простоты рассмотрения положить ее равной единице.

Окончательно получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_0 - x}{y_0 - y}\frac{e^{-x/x_0}}{e^{-y/y_0}} . \qquad (40)$$

Как известно, произвольно выбранная (заданная граничными и начальными условиями) точка пространства задает *состояние* движущейся системы. Движение в пространстве точки, изображающей состояние нашей системы (изображающей точки) выглядит как кривая линия или *траектория* – геометрическое место точек, где система побывала за время своего движения. Если наша кривая гладкая (т.е. непрерывно дифференцируема нужное число раз), то касательная к кривой в любой ее точке задает направление движения нашей системы или вектор движения. Так как касательная гладкой кривой может быть определена в каждой точке пространства, то говорят, что в пространстве задано *поле направлений*. Если мы рассмотрим систему, заданную только двумя координатами x и y, то экономическое пространство представляет собой плоскость, а тангенс угла наклона касательной к кривой является уравнением производной кривой в выбранной точке $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = k$. Тогда y-компонента вектора движения в точке (x, y) в k раз больше x-компоненты. Хотя в курсах математического анализа при введении производной учат, что dy/dx не дробь, а единый символ, мы обращаемся с этим символом как с дробью. Лейбниц не стал бы вводить это сложное обозначение, если бы не имел в виду самой настоящей дроби. Дело в том, что dy и dx – вовсе не таинственные «бесконечно малые величины», а вполне конечные числа, точнее – функции вектора.

Разделив верхнюю и нижнюю часть дроби на dt, мы получим выражение:

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} .$$

Величины $\dot{y}$ и $\dot{x}$ есть не что иное, как проекции вектора скорости движения нашей системы, которые вычисляются подстановкой в правые части системы уравнений нормальной формы. В общем случае приложенный в выбранной точке пространства вектор $\dot{x}_i$ указывает направление изменения состояния, а его длина – скорость этого изменения.

В некоторых точках x_i^0 выполняется условие $\dot{x}_i = 0$. Такие точки называют *положениями равновесия*. В положении равновесия какое-либо направление отсутствует и траектория представляет собой точку, не связанную с другими кривыми.

В нашем случае положением равновесия будет точка x_0, y_0. Если система отклоняется от точки равновесия незначительно, то $\xi = x_0 - x$ и $\eta = y_0 - y$ небольшие. Значит, экспоненты можно принять равными единице. Получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi}{\eta} \qquad (41)$$

или

$$\eta^2 + \xi^2 = const . \qquad (42)$$

Система совершает периодические колебания около точки равновесия, амплитуда которых задается константой интегрирования (начальными условиями). Вблизи максимума траектории осциллятора представляют собой окружности, т.е. интегральные кривые окружают положение равновесия, но через сам максимум не проходит ни одна интегральная кривая. Причем, ξ и η можно рассматривать не как абсолютные количества активов, а как их доли относительно равновесных величин. Мы опять получили, что величины не зависят от масштаба измерения и самоподобны (автомодельны), они совершают колебания в противофазе по закону

$$\xi = r\cos\omega t , \ \eta = r\sin\omega t , \qquad (43)$$

где ω – некая угловая скорость;

$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ – абсолютная величина относительного отклонения.

Функция богатства Φ_i в этот момент выглядит как:

$$\Phi_i = p_i^0\left(x_i^0 - r\cos\omega_i t\right)\exp\left(\frac{r}{x_i^0}\cos\omega_i t\right), \qquad (44)$$

где x_i^0, ω_i – «медленные переменные» по t;

$r < x_i^0$.

Когда константа равна нулю, кривая представляет собой точку в начале координат. Точка равновесия такого типа называется *центром*. При удалении от точки равновесия угловая скорость системы постепенно экспоненциально уменьшается и может уменьшиться на величину экспоненты, при этом соответственно возрастет период колебания. Однако при этом относительное отклонение от точки равновесия достигнет единицы, и система остановится ввиду исчерпания одного из активов.

Цены активов совершают колебания по аналогичному закону и колеблются в противофазе с колебаниями их количеств, что следует из разложения экспоненты в ряд при малых значениях аргумента:

$$e^x \approx 1 + x \, .$$

Полученные результаты желательно подтвердить некими статистическими данными, однако мы сталкиваемся с проблемой единиц измерения. Необходимо сравнивать натуральные статистические показатели производства различных благ между собой. Представляется полезным выбрать некий общий показатель, характеризующий уровень мирового производства в целом.

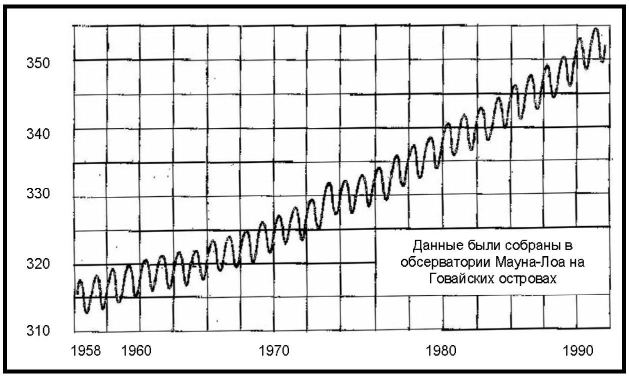


Рис. 16. Результаты измерений содержания диоксида углерода в атмосфере, проведенные в обсерватории Мауна-Лоа на Гавайях на высоте 330 м, в млн.$^{-1}$ [14].

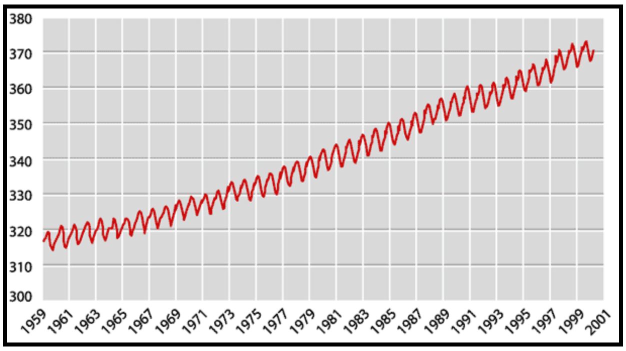


Рис. 17. Результаты измерений содержания диоксида углерода в атмосфере, проведенные в обсерватории Мауна-Лоа на Гавайях на высоте 330 м, в млн.$^{-1}$ [15].

Кроме того, нам требуются очень точные измерения выбранного показателя, чтобы заметить синусоидальные колебания на общем фоне. Но, очевидно, что статистические данные не обладают необходимой степенью точности. Тем не менее, выход из положения существует. Уже более сорока лет ведутся исследования содержания углекислого газа в атмосфере. Эти измерения были начаты в рамках исследования влияния человеческой деятельности на климат. Считается, что, сжигая ископаемое топливо в результате жизнедеятельности, человечество увеличивает это содержание. С 1957 г. исследования проводились в обсерватории Мауна – Лоа на Гавайях. Полученные данные за 1958 – 1990 г., опубликованные Робертом М. Уайтом [14], обнаружили неуклонное увеличение содержания в атмосфере диоксида углерода, которое сопровождается периодическими колебаниями синусоидального типа небольшой амплитуды (рис. 16, 17). Автор не обсуждает в тексте статьи эти колебания, но в надписи к рисункам указано, что флуктуации отражают сезонные вариации, связанные с тем, что в летнее время углекислый газ потребляется растениями. Эти наблюдения проверялись на Южном полюсе и в других районах мира. Данные до 2001 г. опубликованы в докладе «Глобальная экологическая перспектива 3» [15].

Объяснение флуктуаций CO_2 за счет потребления растениями вызывает большие сомнения. На земном шаре в целом не существует летнего времени, в то время как одинаковые флуктуации наблюдаются в разных точках Земли одновременно. Кроме того, при изучении данных до 2001 г. видно, что период колебаний немного меньше календарного года, и минимум значений диоксида постепенно смещается. Вообще довольно странно, когда исследователи основной тренд объясняют одной причиной – промышленным производством, а колебания тренда – другой. Мы считаем, что полученные результаты отражают именно колебания промышленного производства и тем самым подтверждают полученную зависимость.

Амплитуда колебаний составляет около 3% от абсолютного значения, т.е. столько же, сколько обычно составляет амплитуда локальных колебаний цены различных активов на биржевых торгах (рис. 3-5), т.е. мы наблюдаем мягкую потерю устойчивости как на отдельных рынках, так и для экономической системы в целом.

8. СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Мы рассмотрели различные примеры возникновения периодических колебаний (предельных циклов). В свою очередь, периодическое движение (или так называемый предельный цикл) также может терять устойчивость для систем с числом степеней свободы больше единицы, т.е. при количестве уравнений больше двух. В этом случае поведение фазовых кривых, близких к циклу, можно приближенно описывать при помощи эволюционного процесса, для которого цикл является положением равновесия.

Устойчивые неподвижные точки и незатухающие колебания в рассмотренных моделях выступают как аттракторы. Аттрактор [т.е. притягатель] – это такая область в фазовом пространстве, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории из этой области, так как он «притягивает» соседние режимы (переходные процессы). Эту область называют бассейном данного аттрактора.

Аттракторы, отличные от состояния равновесия и строго периодических колебаний, получили название странных аттракторов. При таких режимах происходит экспоненциально быстрое разбегание фазовых траекторий, т.е. плохая предсказуемость течения событий по начальным условиям.

Так, в известной модели метеоролога Лоренца, которая изучает конвекцию в подогреваемом слое жидкости, система совершает сложное хаотическое движение (от греч. cháos – в греческой мифологии беспредельная первобытная масса, из которой образовалось впоследствии все существующее – беспорядок, неразбериха), похожее на «танец» вокруг двух неустойчивых фокусов, описывая витки по раскручивающейся спирали, однако никакой периодичности в таком движении нет: и времена, в течение которых система находится вблизи одного из фокусов, и число витков на каждой из спиралей кажутся совершенно случайными. В частности, из этого вытекает практическая невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды: для предсказания всего на 1-2 месяца вперед нужно знать начальные условия с погрешностью 10^{-5} от погрешности предсказания. Очевидно, что системы более высокого порядка будут еще более стохастическими (от греч. stochastikós – умеющий угадывать – случайный, вероятностный).

Переход от устойчивого состояния равновесия процесса к странному аттрактору может совершаться как скачком (при жесткой или катастрофической потере устойчивости) так и после мягкой потери устойчивости. В последнем случае родившийся цикл сам теряет устойчивость. Потеря устойчивости цикла в общем однопараметрическом семействе систем возможна несколькими способами:

1) *столкновение* с неустойчивым циклом,

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= -\alpha r + 2\beta r^3 - r^5, \\ \dot{\varphi} &= \omega. \end{aligned}\right\},$$

$$(\dot{w} = (i\omega - \alpha)w + 2\beta w|w|^2 - w|w|^4).$$

2) *удвоение*,

3) *рождение или смерть тора* (в терминологии Андронова: *с цикла слезает шкура*). Детали последних процессов зависят от резонансов между частотами движения вдоль меридиана тора и вдоль его оси, т.е. от того, будет ли отношение этих частот рациональным или иррациональным числом. Интересно, что рациональные числа со знаменателем 5 и больше ведут себя практически как иррациональные» [4, с. 23 − 26].

Одним из аттракторов может быть разрушение системы.

Большинство экономических моделей имеет своей целью объяснение реальной экономической динамики и поиск путей воздействия на экономическое развитие в нужном направлении. В свое время эконометрическое моделирование сделалось модным, точно так же, как несколько позже пошла мода на линейное программирование и матричную алгебру.

Модели могут служить каркасом, «скелетом» комплексной программы развития, а чтобы одеть его плотью и кровью, требуется здравый смысл и глубокое знание предмета. Моделирование доставляет лишь отдельные строительные блоки, на основе которых центр координирует деятельность отдельных министерств. Так, оказалось достаточно даже простейших моделей, чтобы показать, что программы инвестиций, рекомендованные Мировым банком на заре его существования, не дадут желаемого результата. То же самое удалось доказать и в отношении некоторых программ антициклического характера, предлагавшихся во время Великой депрессии [16, с. 38].

Современные экономические модели становятся все более сложными, в них включается все больше переменных, их становится все труднее исследовать, получающиеся выводы становятся все более неоднозначными. Часто модель, обладающая, как казалось, «высокой корреляцией» начинает «разваливаться» через несколько лет. Подобное положение вещей привело многих экономистов к убеждению, что экономическая система настолько сложна, насколько неопределенна натура человека, и, следовательно, ее очень трудно или практически невозможно описать известными математическими методами. Крайней позицией является убежденность некоторых экономистов в том, что математику в экономике вообще использовать не нужно и даже вредно.

Однако, указанная неоднозначность выводов легко объясняется при использовании, например, теории колебаний. Дело в том, что экономические модели содержат слишком много переменных. В то время, как уже системы с тремя переменными (третьего порядка) при подробном исследовании демонстрируют стохастический характер.

В то же время известно, что, например, создание глубоких и громоздких математических теорий часто происходило при обобщениях решений одной или нескольких хорошо изученных и понятных физических задач. Подробный анализ решений этих задач и использование полученных результатов зачастую представляется намного более важным, чем изучение последующих теорий.

Так решение Ньютоном задачи о притяжении тел (задачи о движении в поле силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до притягивающего центра) заложило основы современной теоретической физики и, фактически, привело к созданию науки в ее современном виде. Почти тогда же и там же начался математический анализ, как способ решения различных уравнений при помощи рядов Тейлора. Именно это открытие, а не решение задачи о притяжении тел, Ньютон считал самым важным своим достижением и именно его закодировал в письме к Лейбницу 24 октября 1676 года, в котором описал анализ.

По сути, строгое решение школьной задачи о колебании математического маятника привело к созданию современной теории колебаний и теории катастроф, а также оказало существенное влияние на создание современных теорий стохастических процессов.

Чувствительная зависимость от начальных условий говорит о невозможности долгосрочного прогноза ценовых колебаний, так как необходимая для предсказания точность задания начальных условий недостижима, кроме того, любое «возмущение» переводит систему на соседнюю фазовую кривую, которая в дальнейшем экспоненциально расходится с исходной. Тем не менее, имеет смысл изучать предложенные выше модели колебаний цены, так как они приводят к лучшему пониманию сути происходящих на рынке процессов.

Между прочим, благодаря хаотическим колебаниям цены около состояния равновесия мы можем говорить о некой вероятности распределения значения цены, но смысл этой вероятности существенно отличается от вероятности, возникающей в результате представлений о случайных актах обмена товаров на рынке.

9. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Разновидностью динамических систем являются дискретные или, как их еще называют, стробоскопические отображения, когда динамика изображающей точки представляет собой дискретную последовательность состояний, соответствующих коротким моментам вспышек света в темноте. В этом случае под фазовой траекторией следует понимать дискретную последовательность точек в фазовом пространстве. Стробоскопическое отображение представляет собой частный случай более общей конструкции – отображения Пуанкаре или отображения последования, являющегося одним из основных рабочих инструментов в современной нелинейной динамике [17].

Для указанного отображения характерно возникновение хаотического режима, т.е. нерегулярного, похожего на случайный процесс, изменения динамических переменных во времени.

Правило, по которому значения динамических переменных в любой последующий момент времени получаются из исходного набора, задает оператор эволюции системы.

Начнем с обсуждения модельных систем, состояние которых характеризуется одной-единственной переменной x, т.е. фазовое пространство одномерно, а оператор эволюции задается рекуррентным (от лат. recurrens – возвращающийся) отображением вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad (45)$$

где n – дискретное время.

Это очень специфический класс динамических систем, но их анализ оказывается очень полезным и важным, проливая свет на многие феномены, встречающиеся в более сложных ситуациях.

Попытки математического описания динамики популяций восходят к Томасу Мальтусу (1766 – 1834), автору нашумевшей концепции о том, что численность людей возрастает в геометрической прогрессии, а средства поддержания жизни лишь в арифметической. Поэтому численность населения должна регулироваться войнами, эпидемиями и пр. Марксисты, как известно, заклеймили эту теорию как человеконенавистническую. Не входя в полемику, заметим, что в отсутствие факторов, сдерживающих рост населения, изменение численности популяции из года в год «по Мальтусу» можно описать как

$$x_{n+1} = Rx_n, \qquad (46)$$

где R – параметр, определяющий условия жизни популяции. (Если $R = 2$, то отображение называется «зуб пилы»: $x_{n+1} = \{2x_n\}$, где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Если исходное число рациональное, то последующие числа образуют бесконечное счетное множество; если иррациональное – множество мощностью континуума. Таким образом, детерминированное уравнение привело к случайной последовательности чисел – т.е. к хаосу.)

Ввести сдерживающий фактор можно, если добавить в уравнение нелинейный, например, квадратичный член:

$$x_{n+1} = R\left(x_n - x_n^2\right). \qquad (47)$$

Полученное соотношение называют логистическим отображением. Заменой переменной и параметра соотношение можно привести к виду

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \qquad (48)$$

Рассмотрим хаос в логистическом отображении, следуя замечательно простой идее, развитой в конце 40-х годов XX в. в работе американских математиков Станислава Улама (1909 – 1984) и Джона фон Неймана (1903 – 1957) [18]. Их подход применим при частном значении параметра $\lambda = 2$. При замене переменной $x_n = -\cos 2\pi y_n$ получаем соотношение $\cos 2\pi y_{n+1} = \cos 4\pi y_n$. Это соотношение будет справедливым для всех n, если потребовать, чтобы переменная y_n удовлетворяла рекуррентному уравнению «зуб пилы», для которого было установлено присутствие хаоса. Следовательно, хаос имеет место и в логистическом отображении. Интересно, что это хаотическое решение рекуррентного уравнения $x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$ можно записать в явном виде с помощью формулы

$$x_n = -\cos\left(2^{n+1}\pi \arccos\left(x_0\right)\right). \qquad (49)$$

В 1975 г. американские математики Ли и Йорке опубликовали работу «Период три означает хаос». Речь шла о том, что если у одномерного отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ есть цикл периода три, то оно имеет бесконечное множество циклов всех прочих периодов. Единственное требование к функции f состоит в том, что она должна быть непрерывной. Эта работа привлекла большое внимание, и именно в ней в контексте нелинейной динамики впервые появился термин «хаос». Только через несколько лет на Западе стало широко известно, что еще в 1964 г. советский математик А.Н. Шарковский опубликовал гораздо более содержательную теорему: Если непрерывное отображение одномерного интервала в себя имеет цикл периода m, то оно имеет также и циклы со всевозможными периодами, предшествующими числу m, в перечне всех целых чисел, выписанных в так называемом порядке Шарковского [19].

Одной из простейших динамических моделей экономики с дискретными временными интервалами является паутинообразная модель.

Паутинообразная модель ценообразования основана на предположении, что в текущем периоде производители и потребители определяют объем предложения на основе цены предшествующего периода и не имеют представления, какова будет цена к моменту выхода продукции на рынок. Таким образом, модель использует дискретные промежутки времени для изучения динамического процесса

$$p_t = f\left(p_{t-1}\right). \qquad (50)$$

Представим функцию f линейной функцией, тогда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$p_t = \alpha + \beta p_{t-1} = \alpha \sum_{n=0}^{t-1} \beta^n + \beta^t p_0 =$$

$$= \beta^t p_0 + \alpha \frac{1-\beta^t}{1-\beta} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \left(p_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\beta^t. \qquad (51)$$

Из полученного уравнения следует, что p_t примет конечное значение, если $|\beta| < 1$. Это возможно, когда в окрестности равновесия функция спроса имеет меньший наклон, чем функция предложения. В результате мы имеем два случая: устойчивого и неустойчивого равновесия.

Из двумерных отображений стоит упомянуть широко известные отображения пекаря и «кот Арнольда».

Допустим теперь, что координата x может принимать только дискретные значения x_i, и число этих значений конечно. Тогда наша динамическая система может находиться в конечном числе состояний. Пусть смена этих состояний происходит в соответствии с некоторыми вероятностями $p(x_i \to x_j)$. В этом случае мы имеем вектор вероятностей

$$p(p(x_i)). \qquad (52)$$

Его изменение происходит в соответствии с уравнением

$$\bar{p} = pP, \qquad (53)$$

где P – матрица, элементами которой являются вероятности смены состояний $p(x_i \to x_j)$.

Все элементы матрицы P неотрицательны. Сумма элементов любой строки этой матрицы равна единице. Такую матрицу называют стохастической. Стохастические матрицы обладают рядом отличительных особенностей. Одна из них состоит в том, что все собственные значения такой матрицы лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного. Так как переход из одного состояния в другое заранее не определен, то наша динамическая система является стохастической (стохастический автомат). Она перейдет в детерминированную динамическую систему (детерминированный конечный автомат), если все элементы матрицы P будут иметь значения нуль или единица.

Наша динамическая система относится к важному типу – марковским системам, точнее, к дискретным однородным марковским системам с конечным числом состояний. Пространством состояний марковской системы является пространство векторов p с неотрицательными компонентами, сумма которых равна единице. Это пространство называется симплексом $\sum_{n-1}$. Например, симплекс $\sum_3$ представляет собой тетраэдр, а симплекс $\sum_2$ – треугольник. На вершинах, ребрах и гранях симплекса обращаются в нуль соответственно три, две и одна из n компонент вектора p.

10. МОДЕЛЬ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Совместная деятельность людей предполагает управление процессом производства при помощи определенных методов.

Если представить экономику как динамическую систему

$$\dot{x} = f(x, u, a), \qquad (54)$$

где

x – k-мерный вектор, описывающий состояние объекта;

u – m-мерный вектор, задающий управляющее воздействие на объект.

a – n-мерный вектор параметров системы,

то *управление* этой системой состоит в последовательности принятия и реализации решений u, каждое из которых вызывает переход системы в следующее состояние. Правило, по которому выбирают последовательность решений, называется *стратегией управления*.

Переход в следующее состояние происходит с некоторой вероятностью. Значит, наш объект является марковской системой. Марковскую систему, вероятности смен состояний которой зависят от управляемой переменной или переменных, называют управляемой марковской системой. В общем случае управляемые марковские системы имеют конечное или бесконечное число состояний, вероятности смен которых зависят от управления и самого состояния.

Оптимальная стратегия обеспечивает максимальную вероятность достижения цели управления. При заданной нестационарной стратегии $g_n(x_i)$ наш объект управления является нестационарной марковской системой. Последующее состояние p_{n+1} связано с предыдущим состоянием p_n соотношением вида

$$p_{n+1} = p_n P_n, \qquad (55)$$

где P_n – матрица вероятности перехода при стратегии $g_n(x_i)$.

Стратегия одинаковая на всех этапах, называется стационарной. В случае стационарной стратегии $g(x_i) = g_n(x_i)$ при всех n, и поэтому матрица одна и та же на всех этапах, что соответствует стационарной (однородной) марковской системе.

Согласно (2) колебания как цен, так и количеств благ в экономической системе можно описать при помощи уравнения гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Когда $\gamma > 0$, экономическая система является саморегулируемой. В случае отклонения параметров системы от равновесного значения «рыночные силы» возвращают систему в точку равновесия. Однако если $\gamma < 0$, что возможно в результате появления, например, неоправданных ожиданий участников рынка, приводящих к возникновению ажиотажных явлений, система не может самостоятельно вернуться к равновесию, и в ней возникают различные виды автоколебаний. В этом случае государство может предпринять меры к стабилизации ситуации либо может еще больше ее дестабилизировать.

Любое высказывание высокопоставленного чиновника, переданное средствами массовой информации, является неким управляющим воздействием и может как улучшить ситуацию в системе, так и ухудшить ее.

При этом *оказывается воздействие на параметр* γ и может, например, произойти жесткая потеря устойчивости системы (рис. 8).

Другой способ управления заключается в том, чтобы, задавая необходимую цену блага или совершая необходимые государственные закупки блага (продавая блага из резервного запаса), повернуть ситуацию на рынке в нужную сторону. При этом задается необходимое отклонение x от равновесного значения. Очевидно, что существуют пределы, больше которых мы не сможем задавать отклонение. Эти пределы определяются имеющимися у нас ресурсами. Пусть максимально возможное отклонение равно y_0, $y_0 = \pm\omega^2 x_0$.

Если заданное отклонение равно нулю, т.е. цены либо количества благ жестко фиксированы, то, интегрируя по времени уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = 0$, получим

$$\dot{x} + 2\gamma x = const. \qquad (56)$$

Если $\gamma < 0$, то фазовая траектория на плоскости $(x, \dot{x})$ представляет собой наклонную прямую с положительным угловым коэффициентом, ограниченную линиями $x = \pm y_0$. Даже если в начальный момент времени $\dot{x} = 0$, то при любом малом отклонении от этой величины система начнет удаляться от положения равновесия. Такие состояния равновесия называют неустойчивыми, и для стабилизации системы нам необходимо организовать стратегию управления исходя из условия $y = -(\ddot{x} + 2\gamma\dot{x})$.

Там, где выражение в скобках отрицательное, y положительное, и наоборот.

С учетом указанных ограничений функция y может быть, вообще говоря, произвольной и определяется выбранными нами критериями. Можно выбрать в качестве критерия минимум затрат. Во всех случаях, когда программируемое движение системы определяется из условия минимума или максимума некоторого критерия цели, его называют *оптимальным*. Управление, реализующее оптимальное программированное движение системы, называют оптимальным программированным или *программным управлением*.

Управление достигается введением обратной связи в виде некой стратегии управления, зависящей от x и $\dot{x}$.

Возьмем простую стратегию в виде линейной функции от состояния объекта

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -y\ ,\ y = \alpha x + \beta\dot{x}\ . \qquad (57)$$

Тогда уравнение будет иметь вид

$$\ddot{x} + (2\gamma + \beta)\dot{x} + \alpha x = 0\ . \qquad (58)$$

Решение уравнения имеет вид

$$x = c_1 exp(\lambda_1 t) + c_2 exp(\lambda_2 t), \qquad (59)$$

где c_1, c_2 – постоянные, определяемые из начальных условий, а λ_1, λ_2 являются корнями характеристического уравнения.

Чтобы управление было возможным, все коэффициенты в уравнении (58) должны иметь положительные значения. Первую фазу управления назовем «приведением». Условие $\alpha > 0$ означает, что отклонение y должно задаваться в ту же сторону, куда сместилось равновесие, если скорость $\dot{x}$ не очень велика. Кроме того, необходимо чтобы выполнялось условие $\beta > -2\gamma$. При $\gamma < 0$ это означает, что если скорость отклонения достаточно велика, то отклонение надо задавать в противоположную сторону, т.е. надо не приводить систему к равновесию, она сама приводится, а «одерживать» ее.

Таким образом, учет скорости внес в стратегию управления системой, кроме понятия приведения системы к равновесию, понятие одерживания. Нужно хорошо делать две вещи: во-первых, не давать системе сильно отклоняться от равновесия; во-вторых, когда она отклонилась от равновесия и быстро к нему приводится, то надо ее одерживать.

Выбранная стратегия обеспечивает движение системы по заданному пути и возвращение на него после любых отклонений. С точки зрения фазового портрета это означает существование единственного устойчивого состояния равновесия, к которому стремятся все фазовые траектории системы, а именно – выбранного курса движения, при котором $x = 0$.

Опять рассмотрим более простую стратегию управления вида

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -y_0 sign(\alpha x + \beta\dot{x}), \qquad (60)$$

где sign означает знак стоящей после него величины.

При замене x на $-x$ и $\dot{x}$ на $-\dot{x}$ уравнения не изменяются, т.е. фазовые траектории симметричны относительно начала координат. Проведем прямую $\sigma = \alpha x + \beta\dot{x} = 0$ – назовем ее прямой переключений (рис. 18). В каждой полуплоскости уравнения движения легко могут быть проинтегрированы. Уравнение в полуплоскости Φ^+ имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -y_0$.

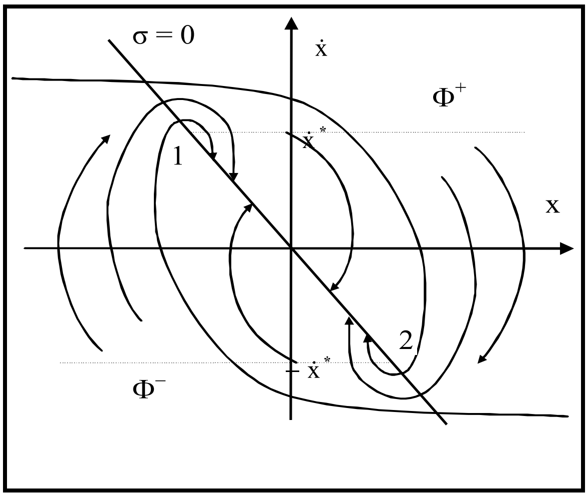


Рис. 18. Прямая переключений

Найдем, как меняется вдоль фазовых траекторий величина $\sigma = \alpha x + \beta\dot{x}$.

Считая x решением уравнения, получим

$$\dot{\sigma} = -\beta y_0 + (\alpha - 2\gamma\beta)\dot{x}\ .$$

Пусть $\alpha > 2\gamma\beta$, при $\dot{x}^* = \beta y_0/(\alpha - 2\gamma\beta)$, имеет место $\dot{\sigma} = 0$. Если $\dot{x} < \dot{x}^*$, то $\dot{\sigma} < 0$, а если $\dot{x} > \dot{x}^*$, то $\dot{\sigma} > 0$. Так как в Φ^+ значение σ положительное, то при $\dot{x} > \dot{x}^*$ фазовые траектории уходят от прямой $\sigma = 0$ в направлении увеличения σ. При $\dot{x} < \dot{x}^*$ фазовые траектории идут в направлении уменьшения σ и втыкаются в прямую $\sigma = 0$. На полупрямой $\dot{x} = \dot{x}^*$, $\sigma > 0$ значение σ вдоль фазовой траектории достигает своего максимума. На прямой $\sigma = 0$ есть отрезок (1, 2), в который фазовые траектории втыкаются с двух сторон.

Вне этого отрезка фазовые траектории втыкаются в прямую в одной полуплоскости и выходят из нее в другой, и при этом происходит мгновенное изменение заданного отклонения из одного крайнего положения в другое.

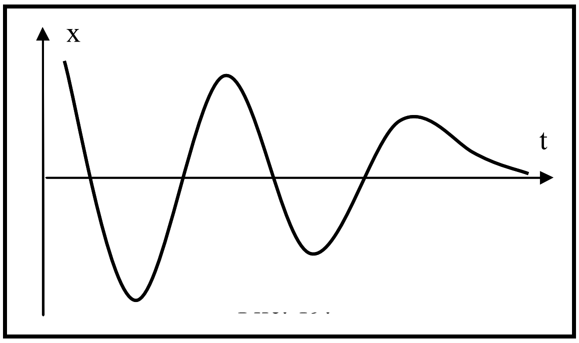


Рис. 19. Движение системы к точке равновесия

На самом отрезке за исключением начала координат положений равновесия нет. Но система не может уйти с этого отрезка, так как фазовые траектории втыкаются в отрезок с двух сторон. Следовательно, имеет место уравнение $\alpha x + \beta \dot{x} = 0$, решение которого $x = x_0 exp(-\alpha t/\beta)$ означает, что система движется по отрезку к началу координат. После конечного числа смен знака заданного отклонения система переходит в режим, когда σ все время равно нулю (рис. 19). В таком режиме система монотонно приближается к точке равновесия и на нем удерживается. Этот последний режим называется скользящим.

Если мы учтем запаздывание управления на время, необходимое для измерения состояния системы и на время, необходимое для принятия решения об изменении заданного отклонения, то мы должны уравнение стратегии управления записать в виде

$$\tau \dot{y} + y = \alpha x + \beta \dot{x} . \tag{61}$$

Действительно, пусть в нулевой момент времени необходимо задать отклонение y_0. Тогда в соответствии с уравнением $\tau \dot{y} + y = y_0$ изменение отклонения будет происходить следующим образом:

$$y = y_0\left[1 - exp(-t/\tau)\right] . \tag{62}$$

Чем меньше τ, тем быстрее отклонение приходит к положению y_0, при $\tau = 0$ получаем идеальное исполнительное устройство и приходим к прежним уравнениям (рис. 20).

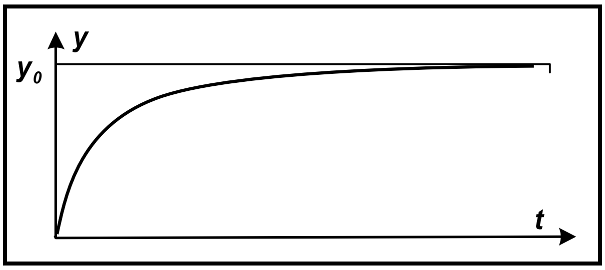


Рис. 20. Изменение отклонения

Теорию процессов, связанных с переходом в состояние равновесия, называют кинетикой.

11. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть на наш объект управления действуют случайные возмущения. В этом случае мы не можем заранее рассчитать управляющие воздействия, и нам необходимо выбрать некий критерий цели управления.

Как уже упоминалось в предыдущем параграфе, когда программируемое движение системы определяется из условия минимума или максимума некоторого критерия цели, его называют *оптимальным*.

Задача оптимизации стратегии управления состоит в том, чтобы минимизировать некий функционал, оценивающий качество поведения объекта управления.

Задача минимизации по управляющим переменным является, вообще говоря, задачей математического программирования. Но оказывается, что такой подход нам ничего не дает, так как число управляющих воздействий u_i может быть огромным, и минимизировать сразу по всем этим переменным очень трудоемко. На помощь приходит принцип динамического программирования Беллмана, который утверждает, что необходимым условием оптимальности программного движения является оптимальность любого последнего участка движения.

Мы имеем множество программных движений системы из начальной точки в конечную и некоторыми естественными ограничениями. Критерий цели управления представляет собой функционал, заданный на этом множестве. Надо выбрать программное движение так, чтобы функционал принимал наименьшее значение.

Оказывается, если мы найдем оптимальную программу движения системы только для конечного участка движения, то и для всего предыдущего участка это программное движение будем оптимальным. т.е. необходимым условием оптимальности программного движения является оптимальность любого последнего участка движения. Это условие было сформулировано американским математиком Р. Беллманом в виде так называемого принципа динамического программирования. Нам не нужно программировать и запоминать всю оптимальную программу на всем участке движения, нужно только измерять состояние системы и в соответствии с ним выбирать задаваемое отклонение. В каждый такт нужно знать лишь текущее состояние объекта.

Оказалось, что *оптимальное управление – это некоторое оперативное управление по состоянию объекта управления*. Это справедливо для любой динамической системы и любой цели управления. Этот общий факт делает *понятие состояния* динамической системы *одним из важнейших общих понятий теории управления*, центральным ее понятием, синонимом обратной связи, которая в силу этого оказывается универсальным средством управления.

Запишем уравнения движения системы (57) в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} = -y + \xi \; ; \; y = \alpha x + \beta \dot{x} , \tag{63}$$

где ξ – некоторая случайная величина в каждый момент времени t. Эту случайную функцию времени можно представить как известную функцию $\xi(t,\omega)$ при каждом значении параметра ω, который является случайной величиной с заданной плотностью вероятности $p(\omega)$. С появлением случайного воздействия фазовая точка начинает как-то хаотически перемещаться в окрестности этого состояния равновесия, т.е. решение системы это не только функция времени, но и функция случайного параметра: $x(t,\omega)$. Мы хотим, чтобы хаотическое перемещение как можно меньше отклонялось от нуля. Пусть процесс управления происходит в течение заданного времени T. Рассмотрим величину

$$Q(\alpha, \beta, \omega) = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t,\omega)dt . \tag{64}$$

Для каждого значения ω эта величина представляет собой среднеквадратичное уклонение системы от заданного направления за время T. Хотелось бы эту величину сделать минимальной, но поскольку параметр ω – случайная величина, то и Q – случайная величина, т.е. мы ее заранее не можем подсчитать.

Найдем ее математическое ожидание, которое является функцией параметров α и β

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\alpha, \beta, \omega)p(\omega)d\omega . \tag{65}$$

Если мы хотим минимизировать математическое ожидание среднеквадратичного уклонения от заданного направления, мы должны найти минимум функции I, т.е. должны решить задачу оптимизации. Поскольку распределение плотности вероятности $p(\omega)$ для случайной величины ω считается известным, то это математическое ожидание находится, и мы можем теперь выбрать параметры управления α и β из условия минимизации функции I. Решив задачу минимизации функции I, мы найдем оптимальный фильтр, т.е. задача полностью математически поставлена. Ясно, что в качестве критерия оптимизации можно брать и другие показатели.

12. МОДЕЛЬ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

На пути фактического отыскания стратегии управления и ее реализации стоит немало трудностей, и не только вычислительного плана. Это еще трудности фактического определения состояния, вызванные отсутствием достаточно полной и точной математической модели объекта управления, а подчас и очень скромными о нем сведениями. Кроме того, объект управления может быть недоступен, очень сложен или изменяющимся непредсказуемым образом.

Первая трудность носит название *задачи идентификации* динамической системы. Мы не знаем, вообще говоря, каковы уравнения, которые описывают систему, или же уравнения эти есть, например система (63), но относительно параметров y и γ, входящих в эти уравнения, у нас имеется лишь некоторая информация, например, они положительны.

Вторая трудность приводит к *адаптивному управлению, к системам управления, способным строить в результате адаптации и обучения оптимальное управление любым объектом из некоторого класса*. Статистического описания случайных воздействий на систему нет, т.е. плотность вероятности $p(\omega)$ для случайной величины ω неизвестна. Тем не менее в этих условиях мы хотим создать регулятор, который решил бы задачу минимизации функции $I(\alpha,\beta)$.

В чем же существенная разница? Раньше, при классической детерминированной и стохастической постановках задачи, параметры регулятора α и β могли быть найдены заранее путем решения некоторых математических задач (задачи устойчивости и задачи минимизации). Теперь же, в адаптивной постановке задачи управления, мы не имеем модели, описывающей поведение объекта, и не знаем критерия качества управления (65), поскольку $p(\omega)$ нам неизвестна. Объект управления – это некий «черный ящик», внутреннее устройство которого нам неизвестно, и нам необходимо подобрать параметры α и β, используя вход в ящик – управление y и выход – уклонение от курса x.

Контур адаптации реализует *процесс обучения показами*: регулятор выдает управление y, система имеет отклонение от курса x – это и есть показ. На основе этого обучения и вырабатываются нужные значения параметров α и β.

Сформулируем задачу управления в общем виде.

Рассмотрим объект управления вида

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{66}$$

где x – k-мерный вектор, описывающий состояние объекта;

u – m-мерный вектор, задающий управляющее воздействие на объект.

Качество управления будем определять функционалом $\Phi(x)$.

Стратегию управления примем вида

$$u = \varphi(x,a), \tag{67}$$

где a – n-мерный вектор неизвестных параметров.

Цель управления будет заведомо достижима, если при некоторых a^* и $\sigma > 0$ выполнено условие

$$\dot{\Phi} = grad\Phi\,\dot{x} = \nabla_x \Phi f(x,u(x,a^*)) < -\sigma\Phi\,. \tag{68}$$

Путеводная нить поиска стратегии управления – это *изменение параметров* a в направлении убыстрения убывания функции Φ вдоль фазовой траектории, т.е. для подстройки параметров примем

$$\dot{a} = -\mu\nabla_a\dot{\Phi}, \tag{69}$$

где μ – симметричная матрица n×n, такая, чтобы вектор $\mu\nabla_a\dot{\Phi}$ образовывал острый угол с вектором $\nabla_a\dot{\Phi}$. Это требование будет выполнено, если квадратичная форма, соответствующая скалярному произведению этих векторов определена положительно

$$\nabla_a\dot{\Phi}\mu\nabla_a\dot{\Phi} > 0\,. \tag{70}$$

При выполнении этого условия параметры a будут изменяться согласно (69) в направлении убыстрения убывания функции Φ.

Таким образом, мы пришли к *адаптивной системе управления*.

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,\varphi(x,a)) = \bar{f}(x,a), \\ &\dot{a} = -\mu\nabla_a\dot{\Phi}. \end{aligned} \tag{71}$$

При этом параметр a стремится к некоторому a^*. При разных начальных условиях эти предельные значения a^* разные, что соответствует наличию у системы управления с адаптацией многообразия состояний равновесия. Анализ поведения адаптивной системы управления при наличии случайных возмущений – достаточно сложная задача. Отметим только, что один из возможных подходов к ее решению основывается на известном методе усреднения в предположении медленности процессов адаптации по сравнению с процессами в объекте управления. При этом в первом уравнении (71) можно принять параметр a постоянным, а после этого, усредняя второе уравнение по x, найти уравнение, определяющее процесс адаптации параметра a при наличии случайных возмущений [20].

По сути, единственные параметры экономической системы, которые до настоящего времени удавалось если не менять, то по крайней мере осознанно учитывать, были предложены Кейнсом. К параметрам также можно отнести предельную эффективность капитала, текущую норму процента и т.д. Так предельная склонность к потреблению устанавливает обратную связь между доходом и инвестициями, что в свою очередь влияет на занятость. Экономическая модель на основе кейнсианской теории предложена, например, Тастином [21].

Литература

1. Маршалл А. Принципы экономической науки., т. II. – М.: Прогресс, 1993 – 310 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959 – 915 с.
3. Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Краткий физико-математический справочник. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 368 с.
4. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990 – 128 с., с.19.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука. 1967 – 648 с.
6. Понтрягин Л.С. Знакомство с высшей математикой: Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988 – 208 с.
7. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – К.: Вища школа, 1984 – 200 с.
8. Васильев А.Н. Модель самоорганизации рынка труда // Экономика и мат. методы, 2001. Т. 37, № 2. с. 123-127.
9. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1971, 1972.
10. Пуанкаре А. Теория вихрей. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000 – 160 с.
11. Сорос Дж. Алхимия финансов (Soros G. The alchemy of finance). – М.: ИНФРА-М, 1996. – 416 с.
12. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии. Т. I. – М.: Политиздат, 1983. – 905 с.
13. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существования. М.: Наука, 1976.
14. White R.M. The Great Climate Debate// Scientific American. 1990. Vol.263, №1.
15. DEWA: Produced by the UNEP GEO team Division of Early Warning and Assessment (DEWA) United Nations Environment Programme. Global Environment Outlook3. http://www.unep.org/geo/
16. Нобелевские лауреаты по экономике: взгляд из России. – СПб.: Изд-во «Гуманистика», 2003.
17. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). Серия «Современная теория колебаний и волн», – 295 с. http://fizmatlit.narod.ru
18. Ulam S.M., von Neumann J. On combination of stochastic and deterministic processes// Bull. Amer. Math. Soc. 1947. V.53, №11. P.1120.
19. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя// Укр.мат.журн. – 1964. – №1. – С. 61 – 71.
20. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 400 с.
21. Tustin A. The Mechanism of Economic Systems, Heinemann, London, 1953.
22. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
23. Коуз Р. Фирма, рынок и право. – М.: Дело ЛТД, 1993. – 192 с.

Царев Игорь Геннадьевич