ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ФИНАНСАМИ

ПОДХОД К УЧЕТУ ДОЛГОВЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ В ПРОГРАММАХ ФОНДОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА

Недосекин А.О., финансовый инженер, к.т.н.;
Заблоцкий С.Н., руководитель проекта, к.т.н.

Компания Артифишел Лайф Рус (Санкт-Петербург)

Известные на мировом рынке программы фондового менеджмента, включая портфель-менеджеры, не проводят оптимизацию портфелей из долговых обязательств по критерию «доходность-риск», как это в ряде случаев успешно делается для акций и паев взаимных фондов, например, в продукте Portfolio Manager 1.0 (разработка фирмы Artificial Life Inc.).[1]. К известным способам оптимизации портфелей из долговых бумаг мы можем отнести подбор портфеля по критерию минимальной продолжительности.

Трудность учета долговых обязательств в программных портфель-менеджерах состоит главным образом в том, что доходность такого рода бумаг *не лежит в произвольно широких пределах*, как это имеет место для акций и паев взаимных фондов. Моделируя ценные бумаги с фиксированным доходом, мы знаем параметры выпуска (дата выпуска, цена размещения, дата погашения, число купонов, их размер и периодичность). Единственное, чего мы не знаем, — это то, как будет изменяться котировка этих бумаг на рынке в зависимости от текущей стоимости заемного капитала, которая косвенно может быть оценена уровнем федеральной процентной ставки страны, где осуществляются заимствования.

Идея учета долговых обязательств в портфеле, которую выдвигают авторы настоящей работы, состоит в том, чтобы **отслоить** от истории сделок с долговыми обязательствами неслучайную составляющую цены (**тренд**). Тогда оставшаяся случайная составляющая (**шум**) цены может рассматриваться нами как случайный процесс с непрерывным временем, в сечении которого лежит нормально распределенная случайная величина с нулевым средним значением и со среднеквадратичным отклонением (СКО), равным $\sigma(t)$, где t – время наблюдения случайного процесса. Ожидаемый вид функции $\sigma(t)$ будет исследован нами позже.

Получим аналитический вид трендов долговых обязательств и для начала рассмотрим простейшие случаи таких выражений, которые имеют место для дисконтных бескупонных облигаций и дисконтных векселей.

1. ДИСКОНТНЫЕ ОБЛИГАЦИИ И ВЕКСЕЛЯ

Пусть бумага данного вида эмиттирована в момент времени T_I по цене $N_0 < N$, где N – номинал ценной бумаги. Тогда разница $N - N_0$ составляет дисконт по бумаге. Параметрами выпуска также определен срок погашения бумаги T_M, когда владельцу бумаги возмещается ее номинал в денежном выражении.

Пусть t – момент времени, когда инвестор собирается приобрести бумагу. Определим ее справедливую рыночную цену $C(t)$. Это выражение и является трендом для случайного процесса цены бумаги.

Пусть время в модели дискретно, а интервал дискретизации — год. Бумага выпускается в обращение в начале первого года, а гасится в конце n – го. Тогда рыночная цена дисконтного инструмента, приобретаемого в начале ($k+1$) – го года обращения бумаги, имеет вид:

$$C(k) = \frac{N}{(1+r)^{n-k}}, \qquad (1)$$

где r – внутренняя норма доходности долгового инструмента, определяемая по формуле:

$$r = (N/N_0)^{1/n} - 1. \qquad (2)$$

Формула (1) предполагает, что на рынке имеются бумаги с той же самой внутренней нормой доходности, что и наша, которые при этом имеют реинвестируемые купонные платежи, а период реинвестирования равен одному году. Если бы не так, то расчет следовало бы вести по формуле, предполагающей, что период реинвестирования платежей совпадает с периодом обращения дисконтного инструмента.

Получим аналоги формул (1) и (2) для непрерывного времени, предполагая по ходу, что реинвестирование также идет в непрерывном времени с периодом бесконечно малой длительности. Это делается следующим образом. Разобъем весь период обращения ценной бумаги [T_I, T_M] на интервалы числом n и длительностью

$$\Delta = (T_M - T_I) / n. \qquad (3)$$

Обозначим $t = T_I + k * \Delta$ и применим к расчету рыночной цены бумаги формулы (1) и (2). Это дает:

$$C(t) = \frac{N}{\left(1 + \frac{r \times \Delta}{T_M - T_I}\right)^{\frac{T_M - t}{\Delta}}}, \qquad (4)$$

$$r = \left((N/N_0)^{\frac{\Delta}{T_M - T_I}} - 1 \right) \times \frac{T_M - T_I}{\Delta}. \qquad (5)$$

Предельный переход в (4) и (5) при $\Delta \to 0$ дает:

$$C(t) = N \times \exp\left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \times r \right), \qquad (6)$$

$$r = \ln \frac{N}{N_0}. \qquad (7)$$

Это и есть соотношение для справедливой цены дисконтной бумаги для непрерывного времени. Качественный вид функции (5) представлен на рис. 1.

Сделаем предположение о характере шума цены. Для этого построим частную производную цены по показателю внутренней нормы доходности бумаги:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = N \times \exp\left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \times r \right) \times \left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \right). \qquad (8)$$

Видно, что чувствительность цены к колебаниям процентной ставки имеет нестационарный вид и убывает до нуля по мере приближения срока погашения бумаги. Таким образом, резонно искать среднеквадратичное отклонение (СКО) шума как функцию вида, показанного на рис. 2.

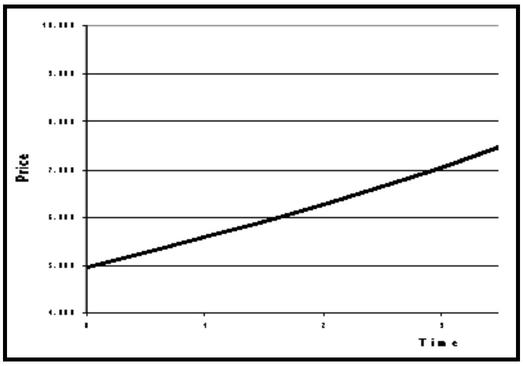

Рис. 1. Качественный вид функции (5)

$$\sigma(t) = \sigma_0 \times exp\left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \times r\right) \times \frac{T_M - t}{T_M - T_I}. \qquad (9)$$

Ожидаемый вид СКО представлен на рис. 2.

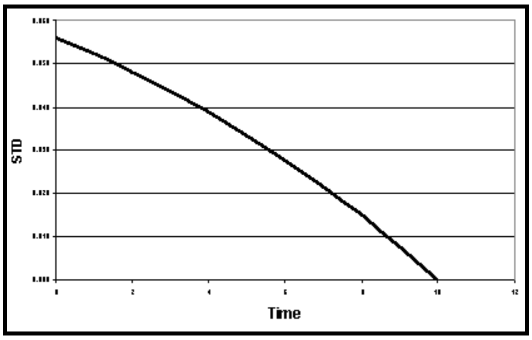

Рис. 2. Ожидаемый вид СКО

С практической точки зрения это означает следующее. Мы наблюдаем случайный процесс цен на бумаги, который можно обозначить ***H(t)***. Тогда шум процесса имеет вид

$$\varepsilon(t) = H(t) - C(t), \qquad (10)$$

где ***C(t)*** – тренд цены — определяется по (6).

Перейдем от нестационарного шума к стационарному введением корректирующего делителя

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon(t) \ / \left\{ exp\left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \times r\right) \times \frac{T_M - t}{T_M - T_I} \right\}. \qquad (11)$$

Тогда процесс $\varepsilon^*(t)$ является стационарным, и в его сечении находится случайная величина с матожиданием 0 и с СКО σ_0. И определение фактического значения параметра σ_0 этого процесса может производиться стандартными методами.

Теперь посмотрим, что делается со случайной величиной доходности долгового инструмента, в процентах годовых:

$$R(t, T)\Big|H(t) = \frac{H(t+T) - H(t)}{H(t) \times T} =$$

$$= \frac{C(t+T) - H(t) + \varepsilon(t+T)}{H(t) \times T}, \qquad (12)$$

где ***T*** — период владения долговым инструментом.

Заметим здесь, что рыночная цена ***H(t)***, измеренная в момент t, не рассматривается нами как случайная величина, так как ее значение в этот момент известно. Эта же цена неизвестна в будущем времени ***(t + T)*** и является случайной величиной, которая имеет нормальное распределение с матожиданием ***C(t + T)*** и СКО $\sigma(t+T)$ (эти функции вычисляются по формулам (6) и (9)).

Случайный процесс доходности на интервале ***[t, t+T]*** в сечении имеет параметры:

$$\bar{R}(t, T)\Big|H(t) = \frac{C(t+T) - H(t)}{H(t) \times T} \text{ - матожидание}, \qquad (13)$$

$$\Theta(t, T)\Big|H(t) = \frac{\sigma(t+T)}{H(t) \times T} \text{ - СКО}. \qquad (14)$$

Рассмотрим пример анализа доходности дисконтной облигации.

Тестовый расчетный пример 1

Облигация номиналом ***N*** = 1000$ выпускается в обращение в момент времени T_I = 0 *(далее все измерения времени идут в годах)* сроком на 2 года с дисконтом 30%, то есть по эмиссионной цене N_0 = 700$. Инвестор намеревается приобрести бумагу в момент времени ***t*** =1. В этот момент текущая цена бумаги на рынке составляет ***H(1)*** = 820$. Для проведения статистического анализа доступна история сделок с бумагой за истекший год ее обращения.

Требуется идентифицировать доходность облигации ***R(t=1, T)*** на протяжении оставшегося года владения ($T \in [0, 1]$) как случайный процесс и определить параметры этого процесса.

Решение. Согласно (6), (7), внутренняя норма доходности нашей облигации составляет

$$r = ln(1000/700) = 35.67\% \text{ годовых}, \qquad (15)$$

а справедливая цена

$$C(t) = 1000*exp(-(2-t)*0.3567/2), \ t \in [0, 2]. \qquad (16)$$

Далее следует этап анализа истории цены за истекший год. СКО шума цены, согласно (9), имеет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0 \times exp\left(-\frac{2-t}{2} \times 0.3567\right) \times \frac{2-t}{2}, \qquad (17)$$

где σ_0 определяется на основе анализа истории скорректированного шума цены вида (11).

Теперь бумага полностью идентифицирована. Случайный процесс ее доходности имеет параметры, которые определяются по формулам (13), (14). В частности, на момент погашения бумаги ***T = 1, C(2) = 1000$,*** $\sigma(1+1) = 0$, $\varepsilon(1+1) = 0$, ***и R(1,1) = (1000-820)/(820*1) = 21.95%*** годовых – *неслучайная величина*.

Оценим процесс количественно через ***T = 0.5*** лет владения бумагой, задавшись параметром СКО ***шума*** σ_0 ***= 20$.*** Тогда

$$C(1.5) = 1000*exp(-(2-1.5)*0.3567/2) = 914.7\$, \qquad (18)$$

$$\sigma(1.5) = 20 \times exp\left(-\frac{2-1.5}{2} \times 0.3567\right) \times \frac{2-1.5}{2} = 4.5\$, \qquad (19)$$

$$\bar{R}(1, 0.5)\Big|H(1) = \frac{C(1.5) - H(1)}{H(1) \times 0.5} = 22.9\% \text{ годовых}, \qquad (20)$$

$$\Theta(1,0.5)H(1) = \frac{\sigma(1.5)}{H(1) \times 0.5} = 1.1\% \text{ годовых}. \qquad (21)$$

2. ПРОЦЕНТНЫЕ ОБЛИГАЦИИ И ВЕКСЕЛЯ

Пусть бумага данного вида эмиттирована в момент времени T_I по цене N_0, причем эта цена может быть как выше, так и ниже номинала (это обусловлено соотношением объявленной купонной ставки и среднерыночной ставки заимствования, с учетом периодичности платежей). Обозначим размер купона ***N***, а число равномерных купонных выплат длительностью $\Delta\tau$ за период обращения обозначим за ***K***, причем для общности установим, что платеж по последнему купону совпадает с моментом погашения бумаги.

Тогда временная последовательность купонных платежей может быть отображена вектором на оси времени с координатами

$$\tau_i = i \times \Delta\tau + T_I, \quad \Delta\tau = \frac{T_M - T_I}{K}, \quad i = 1, \ldots, K. \qquad (22)$$

Формула для справедливой цены процентного долгового инструмента имеет вид:

$$C(t) = C_{БК}(t) + \sum_{j=i}^{K-1} C_j(t), \qquad (23)$$

где

$$i = index\left(\tau_j \,\middle|\, \tau_{j-1} \le t \le \tau_j, \ \tau_0 = T_I\right) - \qquad (24)$$

номер интервала, которому принадлежит рассматриваемый момент ***t***,

$$C_{БК}(t) = (N + \Delta N) \times exp\left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \times r\right), \qquad (25)$$

$$C_j(t) = \Delta N \times exp\left(-\frac{\tau_j - t}{T_M - T_I} \times r\right), \ j = i, \ldots K-1 \qquad (26)$$

моменты τ_i определяются соотношением (22), а внутренняя норма доходности долгового инструмента ***r*** отыскивается как корень трансцендентного уравнения вида

$$C(T_I) = N_0. \qquad (27)$$

Если купон по процентной бумаге нулевой, то переходим к рассмотренному выше случаю дисконтной бумаги.

Анализ соотношений (25) и (26) показывает, что шум цены, тренд которой имеет вид (23), является нелинейно затухающей кусочной функцией на каждом интервале накопления купонного дохода, причем шум получает как бы две составляющих: глобальную – для всего периода обращения бумаги, и локальную – на соответствующем моменту t интервале накопления купонного дохода.

Исследуем характер шума цены процентной бумаги.

$$\varepsilon(t) = H(t) - C(t), \qquad (28)$$

где ***C(t)*** – тренд цены - определяется по (23).

Руководствуясь соображениями, изложенными в предыдущем примере дисконтных бумаг, будем отыскивать СКО шума цены в виде:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \times \lambda(t), \qquad (29)$$

где

$$\lambda(t) = \frac{\Delta N}{N} \times \sum_{j=i}^{K-1} exp\left(-\frac{\tau_j - t}{T_M - T_I} \times r\right) \times \frac{\tau_j - t}{T_M - T_I} + \frac{N + \Delta N}{N} \times exp\left(-\frac{T_M - t}{T_M - T_I} \times r\right) \times \frac{T_M - t}{T_M - T_I}, \qquad (30)$$

а ***i*** определяется по (24). Соотношение (30) является частной производной справедливой цены (23) по показателю внутренней нормы доходности бумаги с точностью до постоянного множителя.

Аналогично предыдущему примеру, мы можем получить нормировочный делитель для шума цены процентной бумаги. Переход от нестационарного шума к стационарному будет иметь вид:

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon(t) / \lambda(t), \qquad (31)$$

где $\lambda(t)$ определяется по (30). При уменьшении величины купона до нуля соотношение (29) переходит в (9), что косвенно подтверждает правоту наших выкладок.

На рис. 3 приведен примерный вид тренда цены процентной бумаги, а на рис. 4 – примерный вид СКО такой бумаги.

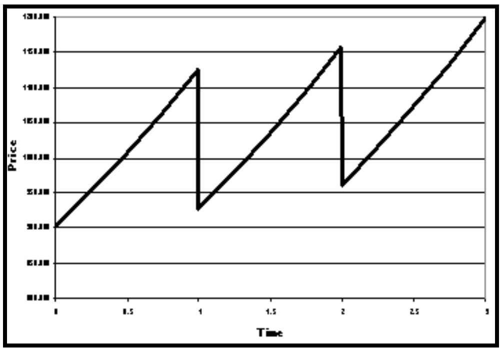

Рис. 3. Приведен примерный вид тренда цены процентной бумаги

Что касается доходности процентных инструментов, то формулы (12) – (13) получают поправку в виде проплаченного за время ***T*** купонного дохода:

$$R(t, T)\big|H(t) = \frac{H(t+T) - H(t) + m \times \Delta N}{H(t) \times T} = \frac{C(t+T) - H(t) + m \times \Delta N + \varepsilon(t+T)}{H(t) \times T}, \qquad (32)$$

где ***m*** – число оплаченных купонов процентной бумаги за период ***T***.

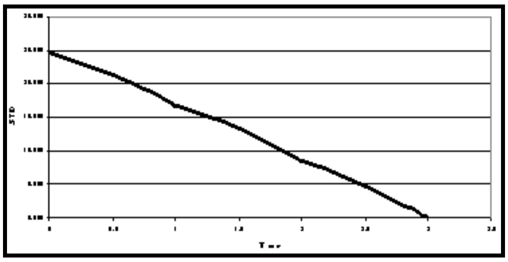

Рис. 4. Примерный вид СКО процентной бумаги

Вывод о том, что случайный процесс $R(t,T)$ имеет в своем сечении нормальную величину, сохраняется без изменений. Параметры этой случайной величины:

$$\overline{R}(t, T)\big|H(t) = \frac{C(t+T) - H(t) + m \times \Delta N}{H(t) \times T}, \qquad (33)$$

$$\Theta(t, T)\Big|H(t) = \frac{\sigma(t+T)}{H(t) \times T}. \qquad (34)$$

Рассмотрим расчетный пример.

Тестовый расчетный пример 2

Облигация номиналом N = 1000$ выпускается в обращение в момент времени T_I = 0 *(далее все измерения времени идут в годах)* сроком на 3 года с дисконтом 10%, то есть по эмиссионной цене N_0 = 900$. По бумаге объявлено три годовых купона по ставке 20% годовых, то есть размером ΔN = 200$.

Инвестор намеревается приобрести бумагу в момент времени t =1 сразу после первого купонного платежа. В этот момент текущая цена бумаги на рынке составляет $H(1)$ = 940$. Для проведения статистического анализа доступна история сделок с бумагой за истекший год ее обращения.

Требуется идентифицировать доходность облигации $R(t=1, T)$ на протяжении оставшихся двух лет владения ($T \in [0, 2]$) как случайный процесс и определить параметры этого процесса.

Решение. Определим внутреннюю норму доходности нашей процентной бумаги, итеративно решив уравнение (27). Тогда, согласно (23), это уравнение приобретает вид:

$$(1000 + 200) * \exp(-r) + +200*(\exp(-r/3) + \exp(-2r/3)) = 900, \qquad (35)$$

откуда методом итераций получаем r = 67.2% годовых.

Выражение для справедливой цены приобретает вид:

$$C(t) = \begin{cases} 1{,}200 \times \exp\left(-\frac{3-t}{3} \times 0.672\right) + \\ +200 \times \exp\left(-\frac{2-t}{3} \times 0.672\right), & t \in [1, 2-0]; \\ 1{,}200 \times \exp\left(-\frac{3-t}{3} \times 0.672\right), & t \in [2, 3]. \end{cases} \qquad (36)$$

Далее следует этап анализа истории цены за истекший год. СКО шума цены, согласно (29) – (30), имеет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0 \times \lambda(t), \qquad (37)$$

где

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{200}{1{,}000} \times \exp\left(-\frac{2-t}{3} \times 0.672\right) \times \frac{2-t}{3} + \\ + \frac{1{,}200}{1{,}000} \times \exp\left(-\frac{3-t}{3} \times 0.672\right) \times \frac{3-t}{3}, & t \in [1, 2-0]; \\ \frac{1{,}200}{1{,}000} \times \exp\left(-\frac{3-t}{3} \times 0.672\right) \times \frac{3-t}{3}, & t \in [2, 3]. \end{cases} \qquad (38)$$

а σ_0 определяется на основе анализа истории скорректированного шума цены вида (31).

Теперь бумага полностью идентифицирована. Случайный процесс ее доходности имеет параметры, которые определяются по формулам (13), (14). В частности, на момент погашения бумаги $T = 2$, $C(3) = 1{,}200\$$,

$\sigma(1+2) = 0$, $\varepsilon(1+2) = 0$, и $R(1,2) = (1200-940)/(940*2) = 13.83\%$ годовых – неслучайная величина.

Оценим процесс количественно через T = 1 год владения бумагой *непосредственно перед* получением дохода по второму купону, задавшись параметром СКО шума σ_0 = $20. Тогда

$$C(2-0) = 1200*\exp(-(3-2)*0.672/3) + + 200 = 1159.2\$; \qquad (39)$$

$$\sigma(2-0) = 20 \times 1.2 \times \exp\left(-\frac{3-2}{3} \times 0.672\right) \times \frac{3-2}{3} = 6.4\$; \qquad (40)$$

$$\bar{R}(1, 1-0)\Big|H(1) = \frac{C(2-0) - H(1)}{H(1) \times 1} = 23.3\% \text{ годовых}; \qquad (41)$$

$$\Theta(1, 1-0)\Big|H(1) = \frac{\sigma(2-0)}{H(1) \times 1} = 0.7\% \text{ годовых}. \qquad (42)$$

3. ПОРТФЕЛЬ ИЗ ДОЛГОВЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ И ЕГО ОПТИМИЗАЦИЯ

Выше по тексту работы мы предложили принципы учета долговых обязательств в фондовом портфеле, предполагая, что курсовые цены этих бумаг будут рассмотрены как случайные процессы, в которых можно будет выделить тренд и шум. Параметры случайных процессов могут быть также определены.

Предположим, что доходности долговых бумаг являются случайными процессами, в сечении которых лежат нормально распределенные случайные величины. В этом случае на классе долговых обязательств можно ставить и решать задачу оптимизации по Марковицу [2]. Продемонстрируем это на примере из двух бумаг - дисконтной и процентной.

Пример оптимизации bond-портфеля

Пусть в момент T_I = 0 выпущено две облигации – А и В – с равным сроком обращения $T_M - T_I$ = 3 (здесь и далее параметры времени - в годах). Также бумаги А и В характеризуются следующими параметрами выпуска:

А:

- тип бумаги – дисконтная;
- номинал бумаги N_1 = $2,000;
- размер дисконта при выпуске – $(N_1 - N_{01}) / N_1$ = 30%.

В:

- тип бумаги – процентная;
- номинал бумаги N_2 = $1,000;
- размер дисконта при выпуске – $(N_2 - N_{02}) / N_2$ = 10%;
- размер процента – $\Delta N_2 / N_2$ = 15% годовых;
- число процентных выплат K_2 = 3 с частотой 1 раз в год.

Время принятия решения о формировании портфеля $t = 1+0$, плановый срок владения портфелем $T = 1.5$. Поэтому доходности и риски измеряются на момент времени $t + T = 2.5$.

Не прибегая к статистическому анализу шумов курсовых цен и их взаимной корреляции, заложим расчетные значения СКО шумов цен бумаг А и В, причем эти шумы считаем приведенными к стационарному виду по правилам, изложенным нами в предыдущем сообщении:

$$\sigma_{01} = \sigma_{02} = \sigma_0. \qquad (43)$$

Также предположим что совместный статистический анализ нормализованных шумов случайных процессов *доходностей* бумаг А и В дает нам значение коэффициента корреляции ρ_{12}. Тогда ковариационная матрица доходностей на интервале $t \in [1,3]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Theta_1^2(t,T) & \Theta_1(t,T)\times\Theta_2(t,T)\times\rho_{12} \\ \Theta_1(t,T)\times\Theta_2(t,T)\times\rho_{12} & \Theta_2^2(t,T) \end{pmatrix}, \qquad (44)$$

где соответствующие параметры СКО определяются по формулам (14) и (34).

Задача состоит в том, чтобы исследовать свойства портфеля из бумаг А и В и найти такую их пропорцию, которая оптимизирует портфель в точке ($t + T$).

Решение задачи

1. Справедливая цена дисконтной бумаги А определяется соотношением

$$C_1(t) = 2{,}000 \times \exp\left(-\frac{3-t}{3}\times r_1\right), \qquad (45)$$

где $r_1 = \ln\dfrac{N_1}{N_{01}} = 0.357$. (46)

СКО шума цены бумаги А определяется по формуле

$$\sigma_1(t) = \sigma_0\times\exp\left(-\frac{3-t}{3}\times r_1\right)\times\frac{3-t}{3}. \qquad (47)$$

Среднеожидаемая доходность по бумаге за плановый период владения имеет вид

$$\overline{R_1}(t,T)\,\Big|H_1(t) = \frac{C_1(t+T) - H_1(t)}{H_1(t)\times T}, \qquad (48)$$

где $C_1(t)$ определяется по (3), а СКО случайной величины доходности бумаги А

$$\Theta_1(t,T)\,\Big|H_1(t) = \frac{\sigma_1(t+T)}{H_1(t)\times T}, \qquad (49)$$

где $H_1(t)$ – известное значение покупной цены бумаги А в момент времени t.

2. Справедливая цена дисконтной бумаги В определяется соотношением

$$C_2(t) = 1{,}150\times\exp\left(-\frac{3-t}{3}\times r_2\right) \text{, если } 2 < t \le 3;$$

$$C_2(t) = 150\times\exp\left(-\frac{2-t}{3}\times r_2\right)\text{, если } 1 < t \le 2;$$

$$C_2(t) = 150\times\exp\left(-\frac{1-t}{3}\times r_2\right) +$$

$$+\exp\left(-\frac{2-t}{3}\times r_2\right)\text{, если } 0 \le t \le 1, \qquad (50)$$

а внутренняя норма доходности долгового инструмента r_2 отыскивается как корень трансцендентного уравнения вида

$$C_2(0) = 1{,}150\times\exp(-r_2) +$$

$$150\times\left(\exp\left(-\frac{r_2}{3}\right)+\exp\left(-\frac{2\times r_2}{3}\right)\right) = 900, \qquad (51)$$

а решение уравнения (9) дает

$$r_2 = 0.540. \qquad (52)$$

Замечание. Здесь и далее договоримся, что купонный платеж производится в моменты времени, строго равные расчетным. Непосредственно сразу после платежа (в момент $t + 0$) справедливая цена бумаги падает ровно на размер купона, поэтому левые ограничения по переменной t в (50) выполняются как строгие неравенства. То есть мы определяем функцию (50) как непрерывную слева.

СКО шума цены бумаги В определяется по формуле

$$\sigma_2(t) = 1.15\,\sigma_0\times\exp\left(-\frac{3-t}{3}\times r_2\right)\times\frac{3-t}{3}\times r_2\text{, если}$$

$$2 < t \le 3;$$

$$\sigma_2(t) = 0.15\,\sigma_0\times\exp\left(-\frac{2-t}{3}\times r_2\right)\times\frac{2-t}{3}\text{, если}$$

$$1 < t \le 2;$$

$$\sigma_2(t) = 0.15\,\sigma_0\times\exp\left(-\frac{1-t}{3}\times r_2\right)\times$$

$$\times\frac{1-t}{3}+\exp\left(-\frac{2-t}{3}\times r_2\right)\times\frac{2-t}{3}\text{, если } 0 \le t \le 1. \qquad (53)$$

Среднеожидаемая доходность по бумаге за плановый период владения имеет вид

$$\overline{R_2}(t,T)\,\Big|H_2(t) = \frac{C_2(t+T) - H_2(t) + m\times\Delta N_1}{H_2(t)\times T}, \qquad (54)$$

где $\underline{m}$ – число купонных платежей в интервале времени [$t, t+T$];

$C_2(t)$ определяется по (50), а СКО случайной величины доходности бумаги В

$$\Theta_2(t,T)\,\Big|H_2(t) = \frac{\sigma_2(t+T)}{H_2(t)\times T}. \qquad (55)$$

где $H_2(t)$ – известное значение покупной цены бумаги В в момент времени t.

3. Тогда показатели среднеожидаемой доходности и риска портфеля имеют выражения

$$\overline{R}(t,T) = x_1\times\overline{R_1}(t,T) + x_2\times\overline{R_2}(t,T), \qquad (56)$$

$$\Theta^2(t,T) = x_1^2\times\Theta_1^2(t,T) +$$

$$2\times x_1\times x_2\times\Theta_1(t,T)\times\Theta_2(t,T)\times\rho_{12} +$$

$$+x_2^2\times\Theta_2^2(t,T), \qquad (57)$$

где x_1 и x_2 - соответственно доли бумаг А и В в объединенном портфеле, и выполняется

$$x_1 + x_2 = 1. \qquad (58)$$

В формулах (56) и (57) нами использована сокращенная запись.

4. Произведем упрощение формул (45) – (57), подставив в них значения $t = 1, T = 1.5$:

$$C_1(1) = 2{,}000\times\exp\left(-\frac{2}{3}\times 0.357\right) = 1{,}576.4; \qquad (59)$$

$$C_1(2.5) = 2{,}000\times\exp\left(-\frac{1}{6}\times 0.357\right) = 1{,}884.5; \qquad (60)$$

$$\sigma_1(2.5) = \sigma_0\times\exp\left(-\frac{1}{6}\times 0.357\right)\times\frac{1}{6} = 0.157\,\sigma_0; \qquad (61)$$

$$\overline{R_1}(1, 1.5) = \frac{1{,}884.5 - 1{,}576.4}{1{,}576.4\times 1.5} = 0.130; \qquad (62)$$

Для упрощения, не влияющего на ход наших рассуждений, мы полагаем $H_1(1) = C_1(1), H_2(1) = C_2(1)$. Тогда

$$\Theta_1(1,1.5) = \frac{0.157\,\sigma_0}{1{,}576.4\times 1.5} = 6.64\times 10^{-5}\times\sigma_0; \qquad (63)$$

$$C_2(1+0) = 1{,}150 \times \exp\left(-\frac{2\times 0.540}{3}\right) +$$

$$+150 \times \exp\left(-\frac{1\times 0.540}{3}\right) = 927.6\ ; \qquad (64)$$

$$C_2(2.5) = 1150 \times \exp\left(-\frac{0.540}{6}\right) = 1051.0\ ; \qquad (65)$$

$$\sigma_2(2.5) = 1.15\ \sigma_0 \times \exp\left(-\frac{0.54}{6}\right) \times \frac{0.54}{6} =$$

$$= 0.175\ \sigma_0\ ; \qquad (66)$$

$$\overline{R}_2(1+0,\ 1.5) = \frac{1{,}051.0 - 927.6 + 150}{927.6 \times 1.5} = 0.196\ ; \qquad (67)$$

$$\Theta_2(1+0{,}1.5) = \frac{0.175\ \sigma_0}{927.6 \times 1.5} = 1.26 \times 10^{-4}\sigma_0. \qquad (68)$$

$$\overline{R}(1+0,\ 1.5) = 0.13\ x_1 + 0.196\ (1-x_1) =$$

$$= 0.196 - 0.066\ x_1; \qquad (69)$$

$$\Theta^2(1+0{,}1.5) = 10^{-10}\ \sigma_0^2 \times \{44.1\ x_1^2 +$$

$$+167.3\ x_1(1-x_1)\rho_{12} + 158.8\ (1-x_1)^2\}; \qquad (70)$$

При $x_1 = 0$

$$\overline{R}(1+0{,}1.5) = \overline{R}_2(1+0{,}1.5) = 0.196\ ;$$

$$\Theta(1+0{,}1.5) = \Theta_2 1+0{,}1.5) = 1.26\ x 10^{-4}\sigma_0.$$

А при $x_1 = 1$

$$\overline{R}(1+0{,}1.5) = \overline{R}_1(1+0,\ 1.5) = 0.130,$$

$$\Theta(1+0{,}1.5) = \Theta_1(1+0{,}1.5) = 6.64\ x 10^{-5}\sigma_0.$$

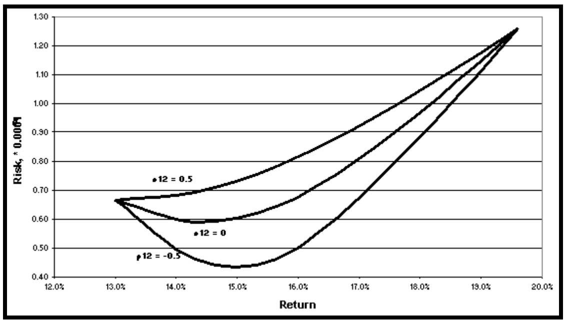

Рис. 5. Эффективные границы портфелей из бумаг А и В

На рис. 5 представлены эффективные границы портфелей из бумаг А и В, где вариантой выступает коэффициент корреляции ρ_{12}. Видно, что при отрицательной корелляции бумаг на эффективной границе есть участок, где падение риска портфеля сопровождается ростом его доходности, и есть безусловный оптимум соотношения «доходность - риск». А задача Марковица, решаемая для двумерного случая, вырождается в поиск ординаты эффективной границы, соответствующей фиксированной абсциссе (выбор максимума доходности при заданном уровне риска или минимума риска при заданной доходности).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сегодня для нас не составляет труда производить квадратичную оптимизацию портфелей на долговых бумагах, потому что мы показали, что доходности бумаг в этих портфелях имеют нормальное распределение с матожиданиями в своих трендах, для которых есть аналитическое выражение.

Все бумаги в портфелях следует представлять как *процентные*. Дисконтные бумаги следует считать разновидностью процентных, где на дату погашения запланирован *один нулевой купон*. При таком подходе мы добиваемся унификации представления данных по бумагам в базе данных портфель-менеджера.

Итак, по каждой бумаге необходимо иметь набор следующих параметров:

- идентификатор бумаги,
- место выпуска,
- рейтинг по MorningStar (или иной рейтинг),
- дата эмиссии,
- дата погашения,
- номинал,
- текущая цена с учетом накопленного купонного дохода,
- эмиссионный дисконт (премия),
- купонный доход,
- время до первого купонного платежа,
- время между купонными платежами,
- расчетный параметр σ_0 нормализованного шума цены бумаги (определяется по истории или задается экспертно).

Главный итог нашей работы состоит в следующем. Мы находим, что сегодня не существует никаких методологических затруднений, препятствующих совместному учету долговых обязательств, акций и паев взаимных фондов при оптимизации смешанного портфеля. Это дает очень серьезные основания для развития программных портфель-менеджеров в сторону применения оптимизации по Марковицу к портфелям из бумаг различных типов.

Литература

1. http://www.artificial-life.ru/default_luci.asp?pSection=products&pContent=products.asp

Markovitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversif ication of Investments. N.Y., Wiley, 1959.

***Выражаем признательность руководству компании Артифишел Лайф Рус за поддержку и понимание*.**

Недосекин Алексей, Заблоцкий Сергей
http: \\www.artificial-life.com