МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ЖИЛИЩНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА И ВНЕДРЕНИЯ ИПОТЕКИ[1]

Хачатрян С.Р. к.э.н.,
член-корр. Жилищно-коммунальной академии

ЦЭМИ РАН

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

В переходном к рыночным отношениям периоде средства частных инвесторов, финансово-кредитных учреждений, других коммерческих структур, сбережения населения в значительной степени компенсировали падение объемов государственных инвестиций – традиционных источников финансирования (бюджета, средств министерств и ведомств) в воспроизводство жилищного фонда г. Москвы (что, впрочем, нельзя признать характерным для всех субъектов Российской Федерации). Поэтому строительный комплекс, в частности, жилищное строительство, в течение долгого времени остается едва ли не наиболее успешно функционирующей и развивающейся отраслью экономики города.

Однако как отмечалось ранее, в последнее время на рынке жилья наблюдается «затоваривание» готовой строительной продукции – об этом свидетельствует значительное количество нереализованного жилья (по Москве долгое время не могли реализовать порядка 1 млн. кв. м жилья). Факторы, объясняющие возникновение указанных дисбалансов, различные. Это, во-первых, падение платежеспособного спроса населения и близкий к состоянию насыщения спрос высокодоходных слоев населения; во-вторых, высокая стоимость коммерческих продаж на первичном рынке нового жилья (что в значительной степени, помимо объективных причин, объясняется высокой долей вводов жилья за счет средств частных инвесторов, передаваемых в муниципальную собственность для решения социальных программ города); в-третьих, это соответствие структуры предложения жилья, его размещение (территориальный разрез) структуре спроса на жилье, т.е. сглаживание и ликвидация значительных структурных диспропорций; в-четвертых, это наличие конкурентного предложения жилья на вторичном рынке; в-пятых, это отсутствие развитой системы ипотечного жилищного кредитования, которая может существенно повысить доступность населения к рынку готовых для заселения квартир.

В сложившихся условиях функционирования рынка жилья, снижения его доходности для предотвращения оттока («бегства») капитала инвесторов с рынка второй, третий и пятый факторы выдвигаются на первый план. Для своевременного преодоления возникшей негативной тенденции превышения предложения над платежеспособным спросом в жилищно-строительной программе первоочередными задачами представляются:

- диверсификация строительного производства, предложение разнообразного по стоимости и потребительским качествам жилья, его оптимальное размещение, что повысит сбалансированность между платежеспособным спросом и предложением;
- внедрение системы ипотечного кредитования приобретения и строительства жилья, что существенно повлияет на рост доступности предлагаемого жилья (модельный анализ этой системы, проведенный нами, приведен в [1]).

Проводится интенсивная работа в этих двух важных направлениях: принят Федеральный Закон об ипотеке, аналогичный документ принимается в г.Москве, где уже с осени 1998г. предполагается начать выдачу первых ипотечных кредитов населению. В ближайшей перспективе ежегодные объемы вводов жилья оцениваются в 50 тыс. кв. м общей площади, а объем необходимых кредитных ресурсов (ежегодных) до 500 млн. дол. США, процентная ставка должна быть не более 10% (в $ США).

Диверсификация жилищного строительства, разнообразие предложения жилья по потребительским свойствам и его размещения, соответствующего предпочтениям населения (по оценкам, до 50 млн. кв. м. общей площади может быть размещено в г.Москве в районах сложившейся застройки), вместе с внедрением системы ипотечного кредитования повысит «затухающую» инвестиционную привлекательность жилищного сектора, позволит приостановить наметившийся отток капитала с рынка жилья.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В новых условиях – диверсификации строительного производства и внедрения системы ипотечного кредитования — актуальной становится задача оптимизации портфеля инвестора жилищного сектора, его диверсификации с целью минимизации рисков, связанных с достижением определенного заданного уровня доходности. Для решения поставленной задачи предлагается следующая модель оптимального распределения капитала инвестора жилищного строительства. Прежде, чем перейти к формализованному описанию модели, введем основные предположения, в рамках которой строиться модель, а также основные используемые обозначения.

Инвестор, располагающий определенной суммой средств (собственных и кредитных ресурсов), может вкладывать их в жилищное строительство, причем в портфельной форме: для последующей реализации в форме ипотечного кредитования потенциальных потребителей, коммерческой продажи другой части построенного жилья по рыночным ценам.

Для этого осуществляется классификация типов жилья по двум признакам: сериям (категориям) жилых домов и местам их размещения (застройки). Если серии (стандартные, разных модификаций, повышенной комфортности, элитные, экспериментальные и т.д.) обозначить через j, $j= 1, 2, \ldots, l$, а возможные места их размещения – через k, $k= 1, 2,\ldots, m$, тогда каждый жилой дом характеризуется парой (j, k), т.е. в модели переменные будут двухиндексные. В целях дальнейшего упрощения двухиндексную систему обозначений можно свести к одноиндексной следующим преобразованием:

$$i = j + (k-1)\, l,\ j= 1, 2,\ldots, l,\ k= 1, 2,\ldots, m. \quad (1)$$

[1] Ðàáîòà âû ïîëíåíà ïðè ïîääåðæêå ÐÔ Ô È (ïðîåêò ¹ 97-06-80415)

Следовательно, i меняется от 1 до ml. Обозначим через $n = ml$ общее число типов жилых домов с учетом их серий и размещения.

Положим, что для коммерческой продажи могут быть предложены дома всех типов $i \in I = \{1, 2,..., n\}$, а за счет ипотечных кредитов $j \in J$, где $J \subset I$, J является подмножеством I, ибо стоимость 1 кв. м общей площади должна быть ограниченной (не более $1500), а значит и выбор серий домов ограничен предельной стоимостью, выше которой жилье приобретается на рынке без кредитования.

Обозначим через R_i случайную величину, характеризующую эффективность единицы вложений (инвестиций) в i-й тип жилья. В качестве измерителя этой эффективности можно принять, например, доход (или прибыль), а через R_{oj}- эффективность вложений в рамках системы ипотечного кредитования в j-й тип жилья, $i \in I$, $j \in J$.

Обозначим через Y_i долю вложений инвестора в i-й тип домов для коммерческой продажи, $i \in I$ $(i = 1, 2,..., n)$, а через Y_{oj} - долю вложений в j-й тип домов в рамках ипотечного кредитования, $j \in J$.

Тогда эффективность портфеля инвестора в жилищном секторе является случайной величиной, обозначаемой через R_p и определяемой следующим выражением:

$$R_p = \sum_{j\in J} Y_{oj} R_{oj} + \sum_{i\in I} Y_i R_i. \tag{2}$$

Ожидаемая эффективность портфеля (доход или прибыль на единицу вложений) определяется как математическое ожидание R_p. Из (2) получим:

$$M[R_p] = M[\sum_{j\in J} Y_{oj} R_{oj}] + M[\sum_{i\in I} Y_i R_i] =$$

$$= \sum_{j\in J} Y_{oj} M[R_{oj}] + \sum_{i\in I} Y_i M[R_i]. \tag{3}$$

Если через r_{oj} и r_i обозначить ожидаемую эффективность от соответствующих вложений, т.е.

$$r_{oj} = M[R_{oj}],\ j \in J,\ r_i = M[R_i],\ i \in I, \tag{4}$$

тогда с учетом (4) соотношение (3) примет вид:

$$M[R_p] = \sum_{j\in J} Y_{oj}\, r_{oj} + \sum_{i\in I} Y_i\, r_i. \tag{5}$$

Вообще говоря, вложения инвестора в рамках системы ипотечного кредитования можно рассматривать в целом как безрисковые и имеющие стабильную (неслучайную) и гарантированную доходность, которая одинакова для всех $j \in J$, т.е.

$$R_{oj} = r_{oj} = r_o \text{ для всех } j \in J. \tag{6}$$

Тогда выражение (5) для ожидаемой эффективности портфеля инвестора r_p примет вид:

$$r_p = M[R_p] = Y_o r_o + \sum_{i\in I} Y_i r_i, \tag{7}$$

где

$$Y_o = \sum_{j\in J} Y_{oj} \tag{8}$$

обозначает долю безрисковых вложений в строительство жилья с ипотечным кредитованием с гарантированной доходностью, определяемой процентной ставкой и условиями ипотечного кредита.

Очевидно, что при этом должно выполняться равенство:

$$Y_o + \sum_{i\in I} Y_i = 1. \tag{9}$$

Таким образом, рисковыми для инвестора являются вложения в жилье типа i, предназначенные для коммерческой реализации по рыночным ценам со средней доходностью r_i, $r_i > r_o$, $i \in I$.

В предположении (6) постоянства дохода от вложений r_o риск портфеля инвестора можно оценить, как принято в статистических методах финансового анализа [2], дисперсией (точнее среднеквадратическим отклонением) случайной эффективности (дохода или прибыли) портфеля R_p. С учетом (6), (7), (8) и используя известные свойства для дисперсии суммы случайных величин [2] , получим:

$$V_p = D[R_p] = D[Y_o r_o + \sum_{i\in I} Y_i R_i] =$$

$$= M[(Y_o r_o + \sum_{i\in I} Y_i R_i) - M(Y_o r_o + \sum_{i\in I} Y_i R_i)]^2 =$$

$$= M[\sum_{i\in I} Y_i R_i - \sum_{i\in I} Y_i r_i]^2 =$$

$$= M[\sum_{i\in I} Y_i (R_i - r_i)]^2 = \tag{12}$$

$$= M[\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} Y_i Y_j (R_i - r_i)(R_j - r_j)] =$$

$$= \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} Y_i Y_j M[(R_i - r_i)(R_j - r_j)] =$$

$$= \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} Y_i Y_j V_{ij},$$

где V_{ij} - ковариация (или корреляционный момент) случайных величин R_i и R_j:

$$V_{ij} = cov(R_i, R_j) = \underset{i,j\in I}{M} [(R_i - r_i)(R_j - r_j)]. \tag{13}$$

В выражениях (12) и (13) случайные величины R_i и R_j предполагаются коррелированными, т.е. доходность от вложений в i-й тип жилья влияет на доходность вложений в j-й тип (или зависит от нее), что объясняется периодическими колебаниями платежеспособного спроса и изменениями в потребительских предпочтениях населения.

Заметим, что при $i = j$ из (13) следует:

$$V_{ii} = D(R_i) = \sigma_i^2,\ i \in I,$$

а при коррелированности R_i и R_j , $V_{ij} = 0$, $i \neq j$, тогда

$$D(R_p) = \sum_{i\in I} Y_i^2 V_{ii} = \sum_{i\in I} Y_i^2 \sigma_i^2. \tag{14}$$

Если риск портфеля инвестора жилищного сектора оценивать среднеквадратическим отклонением σ_p, тогда в случае коррелированности R_i и R_j из (12) имеем:

$$\sigma_p = \sqrt{D[R_p]} = \sqrt{\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} Y_i Y_j Y_{ij}}, \tag{15}$$

а в случае их некоррелированности из (14) следует:

$$\sigma_p = \sqrt{D[R_p]} = \sqrt{\sum_{i\in I} Y_i^2 \sigma_i^2}. \tag{16}$$

В последнем случае при $Y_o = 0$ (отсутствие вложений в строительство жилья за счет ипотечных кредитов) и при $Y_i = 1/n$, $i = 1, 2,..., n$, т.е. равномерном распределении инвестиций по типам жилья, из (7) и (16) следует:

$$r_p = \sum_{i \in I} 1/n \; r_i = \sum_{i \in I} r_i / n , \qquad (17)$$

$$\sigma_p = \sqrt{1/n^2 \sum_{i=1}^{n} \bar{\sigma}^2} . \qquad (18)$$

Если обозначить $\bar{\sigma} = \max\limits_{i} \sigma_i$, то из (18) следует:

$$\sigma_p \le \sqrt{1/n^2 \sum_{i=1}^{n} \bar{\sigma}^2} = \sqrt{(1/n^2) n \bar{\sigma}^2} =$$

$$= \bar{\sigma} / \sqrt{n} \to 0 \qquad (19)$$

при $n \to \infty$,

т.е. при некоррелированности доходности вложений в различные типы жилья при росте их числа n риск портфеля инвестора уменьшается и стремится к 0 при $n \to \infty$. Здесь сказывается эффект диверсификации строительного производства и соответственно портфеля инвестора («не класть все яйца в одну корзину»).

Отметим еще два частных случая, связанных с влиянием корреляции на доходность портфеля инвестора. Для этого преобразуем уравнение (12) дисперсии портфеля, учитывая, что коэффициент корреляции K_{ij} между случайными величинами R_i и R_j равен:

$$K_{ij} = V_{ij} / \sigma_i \sigma_j . \qquad (20)$$

Тогда (12) примет вид:

$$V_p = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} Y_i Y_j V_{ij} =$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (Y_i \sigma_i)(Y_j \sigma_j) k_{ij} . \qquad (21)$$

1-й случай: $K_{ij} = 1$, т.е. при изменении доходности вложений в i-й тип жилья доходность вложений в j-й тип меняется прямо пропорционально.

Тогда из выражения (21) получим:

$$V_p = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (Y_i \sigma_i)(Y_j \sigma_j) = \sum_{i \in I} (Y_i \sigma_i) \sum_{j \in J} (Y_j \sigma_j) = [\sum_{i \in I} Y_i \sigma_i]^2 . \qquad (22)$$

Если $Y_i = 1/n$ для всех i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тогда из (22) получим:

$$V_p = [\sum_{i \in I} Y_i \sigma_i]^2 = (1/n^2) [\sum_{i \in I} \sigma_i]^2 , \qquad (23)$$

а

$$\sigma_p = \sqrt{V_p} = (1/n) \sum_{i \in I} \sigma_i . \qquad (24)$$

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля инвестора не дает никакого эффекта, так как риск портфеля равен среднеарифметическому отдельных рисков вложений и при росте n он к нулю не стремится, и

$$\sigma_p = 1/n \sum_{i \in I} \sigma_i \le (1/n) \sum_{i \in I} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}$$

и

$$\sigma_p = 1/n \sum_{i \in I} \sigma_i \ge (1/n) \sum_{i \in I} \underline{\sigma} = \underline{\sigma} ,$$

где

$\underline{\sigma} = \min \sigma_i$,

т.е.

$$\underline{\sigma} \le \sigma_p \le \bar{\sigma} .$$

Положительная корреляция между доходностью вложений в строительство жилья i-го и j-го типов, (т.е. между R_i и R_j) имеет место, когда ситуация на рынке жилья определяется одними и теми же факторами, изменение которых действует на доходности r_i и r_j в одну и ту же сторону.

2-й случай: $K_{ij} = -1$, $i \ne j$. Пусть $n = 2$. Тогда из (21) следует:

$$V_p = Y_1^2 \sigma_1^2 + Y_2^2 \sigma_2^2 - 2 Y_1 Y_2 \sigma_1 \sigma_2 =$$

$$= (Y_1 \sigma_1 - Y_2 \sigma_2)^2 . \qquad (25)$$

Откуда получим, что при

$$Y_2 = Y_1 \sigma_1 / \sigma_2 , \; V_p = 0 . \qquad (26)$$

Таким образом, из (26) можно сделать вывод, что при полной отрицательной корреляции существует такое распределение инвестиций в строительство жилья разных типов, при котором риск достигает нижней границы, т.е. полностью отсутствует.

3. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТОРА

Проведенный ранее анализ показывает, что рынок жилья (как и любой другой) является рисковым, цены на котором претерпевают определенные, порой значительные колебания, причем они дифференцированы как по структуре жилья (по сериям домов и по квартирной структуре), так и их размещению.

При этом, как отмечалось выше, в значительной степени они вызваны диспропорциями в структуре предложения. Например, большинство потенциальных потребителей (по оценкам - до 75%) ориентировано на приобретение одно- и двухкомнатных квартир, в то время как в структуре предложения преобладают квартиры с большим числом комнат. Заметная в 1996 г. тенденция снижения стоимости жилья в Москве – в среднем за год на 16,6% сохранилась и в 1997 г., хотя снижение оказалось менее значительным – в среднем на 6,7%, причем на протяжении всего года происходило выравнивание стоимости 1 кв. м общей площади для квартир различного типа. В целом за 1997 г. трехкомнатные квартиры подешевели на 12,2%, двухкомнатные – на 2,2%, однокомнатные подорожали на 0,7%, причем в основном за счет быстрого роста стоимости в 4-м квартале – на 4,2%. Одновременно динамика цен по структуре жилых домов заметно отличается. Например, при дефиците предложения и сложившемся уровне платежеспособности цены на одно- и двухкомнатные квартиры в пятиэтажках возросли в среднем за 1997 г. на 4% и 3,7% соответственно. В конце 1997 г. и начале 1998 г возросли цены и в 17-22-этажных жилых домах с улучшенными планировочными характеристиками (возможно, сказалось влияние предстоящей денежной деноминации, финансовой, экономической и политической нестабильности, желание физических и юридических лиц вложить свободные денежные средства).

Таким образом, краткий анализ ценовой динамики на рынке жилья г.Москвы показывает, что инвестор жилищного сектора сталкивается с тенденцией снижения доходности вложений и возрастания рисков, связанных с динамикой спроса и конкуренции со стороны вторичного рынка. Поэтому инвестору необходимо осуществить, в соответствии с постановкой задачи в разд. III.2, выбор между эффективностью и риском.

Модель формирования оптимального портфеля инвестора приобретает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y_i Y_j V_{ij} \to \min, \qquad (27)$$

$$Y_o r_o + \sum_{i=1}^{n} Y_i r_i = r_p, \qquad (28)$$

$$Y_o + \sum_{j=1}^{n} Y_i = 1, \qquad (29)$$

$$Y_i \geq 0 \ (i = 0, 1, 2,..., n). \qquad (30)$$

Соотношение (27) показывает, что минимизируется дисперсия инвестиционного портфеля – $D[R_p]$, ибо этот минимум достигается в той же точке Y, что и критерий риска портфеля S_p.

В уравнении (28) правая часть - r_p представляет ожидаемую общую эффективность инвестора от единицы вложений (суммарный ожидаемых доход на единицу инвестиций), а левая часть показывает возможность достижения уровня эффективности r_p при искомом распределении единицы этих вложений между нерисковой Y_p и рисковыми $\{Y_i,\ i = 1, 2,..., n\}$ составляющими.

Соотношения (29) и (30) очевидны.

Модель (27)-(30) представляет собой оптимизационную задачу с критерием (27), представляющим квадратичную форму, которая является положительно (не отрицательно) определенной, а ограничения модели (28)-(30) - линейные. Следовательно, множество допустимых решений выпукло, а целевая функция – выпуклая, поэтому условия регулярности Куна-Таккера выполнены [3], и решение поставленной задачи может быть получено в следующем виде.

Если

V - квадратичная матрица ковариаций размерности n,

$Y = (Y_i)$ - вектор-столбец искомых долей вложений в i-й тип жилья, $i = 1, 2,..., n,$

$R = (r_i)$ - вектор-столбец ожидаемых доходностей от единичных вложений в i-й тип жилья, $i = 1, 2,..., n,$

E - n-мерный вектор-столбец с единичными компонентами,

тогда в соответствии с [3], оптимальное решение Y^* имеет вид:

$$Y^* = \frac{r_p - r_0}{(R - r_0E)^T V^{-1} (R - r_0E)} V^{-1}(R - r_0E), \qquad (31)$$

где V^{-1} - обратная к V матрица, а T - символ транспонирования матрицы.

В числителе (31) имеем число $(r_p - r_o)$, в знаменателе – произведение трех матриц: вектор-строки размерности $(1 \times n)$ (после транспонирования), матрицы размерности $(n \times n)$ (обратная матрица остается квадратной той же размерности) и вектор-столбца размерности $(n \times 1)$. В итоге имеем размерность, равную $(1 \times n)(n \times n)\ (n \times 1) = (1 \times n)\ (n \times 1) = 1$, т.е. в знаменателе также число.

Сомножитель $V^{-1}\ (R - r_oE)$ в (31) имеет размерность Y^*, равную $(n \times 1)$.

Число, полученное в знаменателе (31), является постоянной, определяемой рынком жилья, и фактически не зависит от влияния инвестора. Сомножитель $V^{-1}(R - r_oE)$ не зависит от r_p, задаваемого инвестором, поэтому вектор-столбец долей рисковых вложений, пропорциональный $V^{-1}\ (R - r_oE)$, также не зависит от r_p. Следовательно, структура рисковой части портфеля инвестора не зависит от r_p. Но сумма компонент Y^*, равная $\sum_{i=1}^{n} Y_i^*$, зависит от r_p – компоненты вектора Y^* пропорционально увеличиваются с ростом r_p, а следовательно, доля $Y_o^* = 1 - \sum_{i=1}^{n} Y_i^*$ будет сокращаться. В частном случае, когда рисковые вложения (и их доходность) являются некоррелированными случайными величинами, матрица V является диагональной, ибо $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т.е.

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Тогда, как известно, матрица V^{-1} имеет вид:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & \ldots & 0 \\ & 1/\sigma_2^2 & \\ 0 & \ldots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Поэтому соотношение (31) для Y^* примет следующий вид:

$$Y^* = \frac{r_p - r_0}{\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_0)/\sigma_i^2} \begin{pmatrix} (r_1 - r_0)/\sigma_1^2 \\ \ldots \\ (r_n - r_0)/\sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

<u>Пример:</u>

Пусть $r_o = 1{,}2$;

$$R = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 4 \end{pmatrix};\ V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix};$$

$$V^{-1}\ (R - r_0E) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}4 - 1{,}2*1 \\ 4 - 1{,}2*1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}47 \end{pmatrix};$$

$$(R - r_oE)^T\ V^{-1}\ (R - r_0E) =$$

$$= (1{,}2;2{,}8) \begin{pmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}47 \end{pmatrix} =$$

$$= (1{,}2*0{,}6 + 2{,}8*0{,}47) = 2{,}03;$$

$$Y^{**} = [(r_p - 1{,}2)/2{,}03] \begin{pmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}47 \end{pmatrix};$$

$$Y_1^{**} = [(r_p - 1{,}2)*0{,}60/\ 2{,}03];$$

$$Y_2^{**} = [(r_p - 1{,}2)*0{,}47/\ 2{,}03].$$

Если инвестор устанавливает общий уровень доходности на уровне $r_p = 2$ ($r_p > r_o$), тогда по приведенным выше соотношениям получим:

$Y_1^* = 0{,}24;\ Y_2^* = 0{,}19.$

$Y_o^* = 1 - (Y_1^* + Y_2^*) = 0{,}57.$

Следовательно, портфель инвестора должен более, чем наполовину (на 57%) состоять из нерисковых вложений в ипотечное жилищное строительство, а рисковая часть портфеля составлять 43% от общего объема инвестиций.

При $r_p = 3$ получим:

$Y_1^* = 0{,}53;\ Y_2^* = 0{,}42;\ Y_o^* = 0{,}05.$

Следовательно, чтобы получить столь высокую доходность $r_p=3$, когда нерисковые вложения дают доходность $r_o = 1{,}2$, т.е. в 2,5 раза больше, инвестор должен рисковать, и 95% от общих инвестиций вложить в жилье, реализуемое по коммерческим ценам, и только 5% - в жилье с ипотечным кредитованием.

Можно найти тот пороговый уровень r_p, при котором Y_o^* становятся отрицательными:

$$Y_o^* = 1 - (Y_1^* + Y_2^*) =$$
$$=1 - [(r_p - 1{,}2)/2{,}03]\ (0{,}6 + 0{,}47) =$$
$$=1 - (r_p - 1{,}2)0{,}53 \le 0.$$

Откуда получим:

$$r_p \ge 3{,}09,$$

т.е.

$$\bar{r}_p = 3{,}09.$$

Это можно интерпретировать следующим образом: если инвестор ожидает получить

доходность на уровне $r_p > \bar{r}_p$, то его портфель должен состоять только из рисковых вложений. Более того, в этих условиях инвестор должен взять деньги в долг (в кредит, т.к. $Y_o^* < 0$, то $(Y_1^* + Y_2^*) > 1$), чтобы обеспечить заданную на этом уровне доходность.

4. К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Для проведения расчетов по оптимизационной модели (27)-(30) необходимо предварительно осуществить оценку ее параметров $\{r_o, r_i, V_{ij}, i, j = 1, 2,..., n\}$, что представляет достаточно сложную задачу статистического анализа рынка жилья, наличия достаточной информации по операциям, осуществляемым в нем, доходности от реализации жилья того или иного типа. Параметр r_o определяется процентной ставкой и условиями ипотечного кредитования.

В общем случае при заданном n необходимо оценить $N(n)$ параметров:

$$N(n) = n + [n(n - 1)]/2 = [n(n + 1)]/2, \qquad (35)$$

среди которых n средних $r_i,\ i = 1, 2,..., n$ и $[n(n - 1)]/2$ ковариаций $V_{ij},\ i, j = 1, 2,..., n$, т.к. матрица V симметрична ($V_{ij} = V_{ji}$ для всех i и j). Например, при $n = 10$ необходимо оценить $N(10) = 55$ параметров.

При росте n число оцениваемых параметров $N(n)$ быстро растет в соответствии с (35), что значительно усложняет проблему их оценивания, так как потребует большего количества данных для обеспечения необходимой точности оценок.

Статистическая база организуется с использованием данных риэлтерских компаний по продаже жилья исследуемых типов на первичном рынке. При дефиците исходной информации для пополнения статистической базы могут быть привлечены дополнительные данные по реализации жилья аналогичного типа на вторичном рынке с некоторой их корректировкой.

Поскольку исходная информация по операциям на рынках жилья имеет структуру вида $\{(P_i, C_i),\ i = 1, 2,..., n\}$, где P_i - цены реализации, C_i -себестоимость строительства этого жилья, а в модели фигурируют параметры их доходности r_i, то при конкретном характере принятой эффективности вложений можно однозначно ее рассчитать по (P_i, C_i), т.е. построить преобразование φ вида:

$$r_i = \varphi(P_i, C_i),\ i = 1, 2,..., n. \qquad (36)$$

Непосредственный статистический подход для получения оценок $\{r_i, V_{ij}, i,j=1,2, ..., n\}$ состоит в рассмотрении n -мерного вектора случайных величин $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ эффективности вложений i-го типа $i = 1, 2, ..., n$ и формировании статистической базы для R в форме следующей выборки размерности m:

$$(r_1(1),\ r_2(1),\ ...\ r_n(1)),\ r_1(2),\ r_2(2),\ ...\ r_n(2)),\ ...,\ (r_1(m), r_2(m), ..., r_n(m)).$$

Несмещенные оценки искомых параметров получаются на основе следующих соотношений:

$$\hat{r}_i = \sum_{k=1}^{m} r_i(k)/m,\ i = 1, 2,..., n, \qquad (37)$$

$$\hat{V}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [r_i(k) - \hat{r}_i]*[r_j(k) - \hat{r}_j]/(m-1),$$
$$i, j = 1, 2,..., n. \qquad (38)$$

В частности, для дисперсий имеем:

$$\hat{V}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [r_i(k) - \hat{r}_i]^2/(m-1),$$
$$i, j = 1, 2,..., n. \qquad (39)$$

При отсутствии данных необходимого объема точность оценок параметров будет низкой, поэтому прямой статистический подход для получения средних и ковариаций непригоден. В этом случае может быть использован метод анализа зависимостей доходности от «ведущих» факторов, разработанный в теории финансового анализа зависимостей курсов и других характеристик ценных бумаг от такого рода ведущих факторов финансового рынка [4].

Современный рынок жилья имеет специфические характеристики своего становления, функционирования и развития, обусловленные сильной дифференциацией доходов населения за короткий срок и значительной потребностью в социальном жилье. Поэтому использовать уже разработанные подходы необходимо с осторожностью,

адаптируя их к специфике рынка жилья, и их особенностям поведения его участников.

Рассмотренная модель предназначена для инвесторов жилищного сектора, решающих задачу оптимальной диверсификации портфеля при сложившихся параметрах функционирования рынка жилья. Однако предложенный подход можно распространить и на более широкий круг инвесторов, работающих на других рынках (не только жилья) при анализе размещения финансовых ресурсов.

Литература

1. Егорова Н.Е., Хачатрян С.Р. Моделирование инвестиционной деятельности в жилищном секторе/ препринт #WP/98/059 – М.; ЦЭМИ РАН, 1998;
2. Фаерман Е.Ю., Хачатрян С.Р., Локтионов В.М., Фонтана К.А., Петров И.П. Дифференцированный подход к реформе жилищно-коммунального хозяйства/ Препринт #WP/97/037. –М.; ЦЭМИ РАН, 1997;

3. Егорова Н.Е., Кириллова А.Н., Фаерман Е.Ю., Хачатрян С.Р., Фонтана К.А. Типология и анализ экономико-математических моделей рынка воспроизводства жилья./ Препринт #WP/97/022. – М.; ЦЭМИ РАН, 1997;
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., 1962;